

Partitions minimales sur des surfaces

Benjamin Bogosel

LAMA, Chambéry

05/11/2015

Problème

Trouver numériquement les partitions de longueur minimale en cellules d'aire prescrite d'une surface tri-dimensionnelle.

Objectif

- méthode numérique efficace
- comparer avec autres travaux

Coût minimal - production balles cousus à la main



Résultats connus



Bernstein 1905



Masters 1996



Engelstein 2009



pb. ouvert - 6 carrés



Hales 2002 - partition correspondant au dodécaèdre

F. Morgan

La partition de longueur minimale en cellules d'aire fixée existe et elle vérifie les propriétés suivantes :

- les bords des domaines ont courbure géodésique constante
- les points singuliers sont triples et les courbes correspondantes font des angles de 120° .

Cox, Fickema 2010 - a l'aide du logiciel Evolver

- partitions 2D : triangle équilatéral, carré, pentagone, hexagone, cercle, $N \leq 42$
- partitions sphériques $N \leq 32$.

Formulation fonctionnelle

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_D |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_D u^2(u-1)^2, \int_D u = \text{const.}$$

$$F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} \frac{1}{3} \text{Per}()$$

pour la topologie L^1 .

Les minimiseurs de F_ε convergent vers le minimiseur de Per a aire constante quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Domaines non-rectangulaires

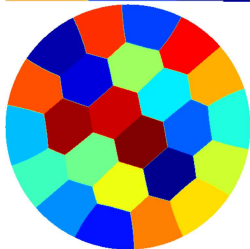
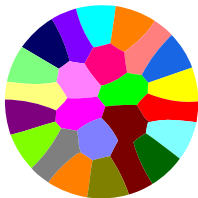
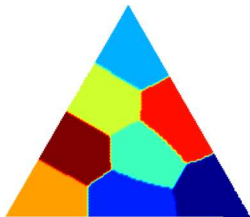
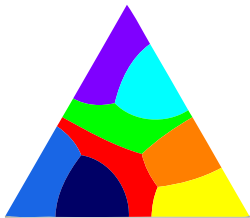
1. Différences finies - négliger les points à l'extérieur du domaine.

- problèmes près du bord
- ça marche si on a une grande résolution depuis le début

2. Éléments finis

- $\int_D |\nabla u|^2 = u^T K u$ ou $K = (\int_D \nabla \phi_i \nabla \phi_j)$
- $\int_D u^2 (u - 1)^2 = v^T M v$ ou $M = (\int_D \phi_i \phi_j)$.
- pas de problèmes au bord
- extension directe sur des surfaces...

Amélioration 2D



Extension - surfaces ?

$$\text{Per}(\Omega) \approx \varepsilon \int_S |\nabla_\tau u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_S u^2(1-u)^2$$

Théorème Γ -convergence ?

- Espaces BV sur des surfaces (div. tangentielle)
- formule de co-aire sur de surfaces

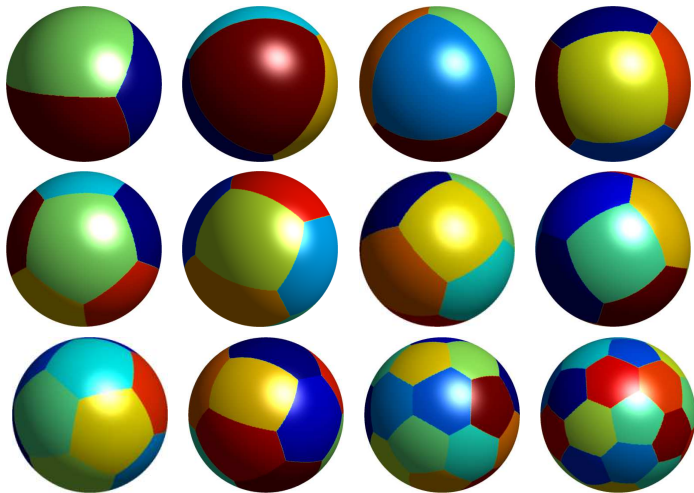
Extension au cas des partitions ? Même argument que en 2D

→ travail en cours

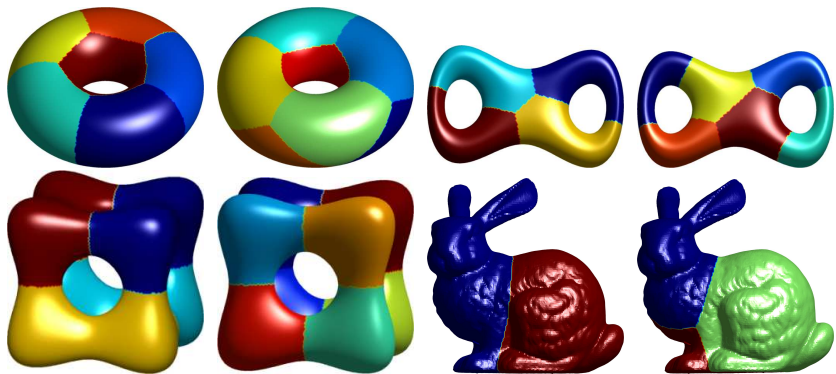
- Éléments finis P_1 surfaciques \rightarrow matrices de rigidité et de masse K, M .
- $\varepsilon \int_S |\nabla_\tau u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_S u^2(1-u)^2 = \varepsilon u^T K u + \frac{1}{\varepsilon} v^T M v$ avec $v = u \otimes (1-u)$.
- algorithme de descente basé sur le gradient
- contrainte de partition : $u_1 + \dots + u_n = 1$.
- contrainte d'aire fixée :

$$\int_S u_i = c \Leftrightarrow (1, 1, \dots, 1) M u_i = c.$$

Résultats - la sphère



Autre types de surfaces

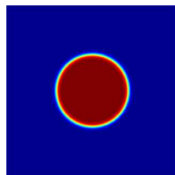


Comparaison Cox Fikkema - cas sphérique ?

- pas possible, discrétisation pas assez fine, pb. mémoire

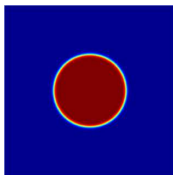
Ex. 2D : $\min_{|\Omega|=1/7} \text{Per}(\Omega)$. Valeur optimale : $2\sqrt{\pi/7} = 1.3398$

Valeurs obtenues avec la Γ -convergence :



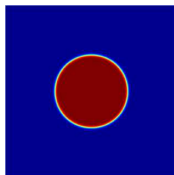
1.3216

$\varepsilon = 1/150$



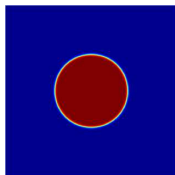
1.3276

$\varepsilon = 1/200$



1.3311

$\varepsilon = 1/250$



1.3398

$\varepsilon = 1/300$

Changer le contexte

- extraire la structure topologique : points triples, connectivité des arêtes, faces
- utiliser les résultats théoriques connus : les frontières ont courbure géodésique constante \Rightarrow portions de cercles
- nombre très petit des paramétrés, calculs explicites

Traitement des contraintes

Incorporer les contraintes dans la fonctionnelle :

$$G_\varepsilon((\omega_i)) = \sum_{i=1}^n \text{Per}(\omega_i) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (\text{Area}(\omega_i) - \text{Area}(\omega_j))^2.$$

$$\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon = G((\omega_i)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \text{Per}(\omega_i) & \text{if } (\omega_i) \in \mathcal{A}_n \\ \infty & \text{if } (\omega_i) \in \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{A}_n. \end{cases}$$

pour la convergence $L^1(S)$.

- \mathcal{P}_n partitions de la sphère en n cellules
- \mathcal{A}_n cellules de même aire

Idee de la preuve

(LI) Pour toute suite $(\omega_i^\varepsilon) \rightarrow (\omega_i)$ dans $L^1(S)$ on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon((\omega_i^\varepsilon)) \geq G((\omega_i))$$

(LS) Pour tout $(\omega_i) \in \mathcal{A}_n$ il existe $(\omega_i^\varepsilon) \rightarrow (\omega_i)$ dans $L^1(S)$ tel que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon((\omega_i^\varepsilon)) \leq G((\omega_i))$$

Gauss-Bonnet

Cas régulier :

$$\int_M K + \int_{\partial M} k_g = 2\pi\chi(M)$$

Cas régulier par morceaux :

$$\int_M K + \int_{\partial M} k_g + \sum \theta_i = 2\pi\chi(M)$$

θ_i - "turning angles", K - courbure, k_g - courbure géodésique
 $\chi(M)$ - caractéristique d'Euler

Les frontières de la partition optimale ne sont pas de géodésiques.

- hexagones avec angles $2\pi/3$?
Méthode Cox-Fikema...

Traitement numérique

Struct. { points
arêtes
faces
point sur chaque arête

longueur arêtes
rayon arc arêtes
vect. tangents
Calcul aire - orientation !

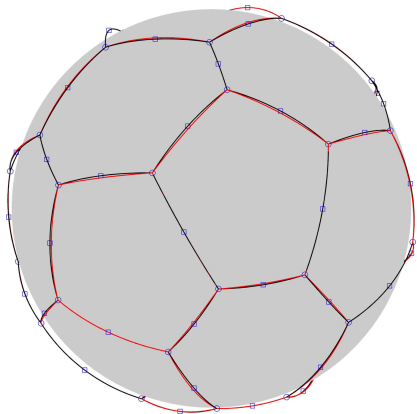
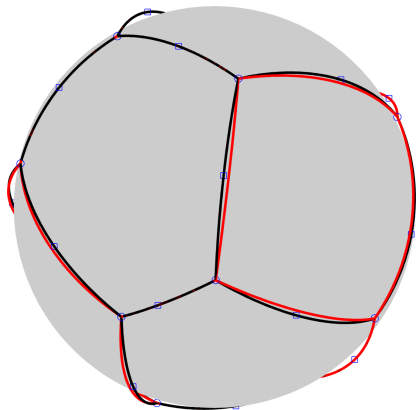
Sans gradient.

Début - $\varepsilon = 1$.

- perturber chaque point proportionnel a un param ρ .
- choisir la perturbation qui diminue le plus le coût.
- faire la même chose pour les points des arêtes.
- si le coût ne diminue pas $\rho \rightarrow \rho/2$.

On diminue ε et on répète - erreur aires petite

Deux exemples, $n = 9, 20$

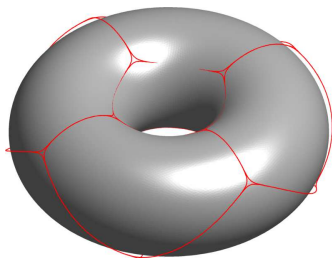


Comparaison

- Même résultats que Cox-Fikkema
- pas besoin d'optimiser la topologie
- résultats obtenus en une seule optimisation pour $n \in [3, 24] \cup \{32\}$.
- pour $n \in [25, 31]$ plusieurs optimisation avec configuration initiale aléatoire ont été nécessaires

Calcul explicite - autres surfaces

- extraire lignes niveaux
- interpolation
- optimisation sur le maillage



Merci !