

Optimisation spectrale sous contrainte de périmètre

Benjamin Bogosel

LAMA, Chambéry

05/07/2013

Valeurs propres - Laplacien Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \\ u &\in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

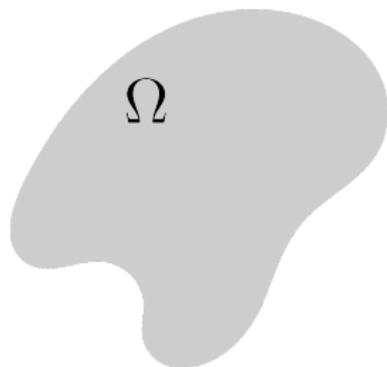
$$0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \dots \rightarrow +\infty$$

Rayleigh :

$$\lambda_k(\Omega) = \min_{S_k \subset H_0^1(\Omega)} \max_{\phi \in S_k} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx}{\int_{\Omega} \phi^2 dx}$$

Consequence : $\lambda_k(t\Omega) = \frac{1}{t^2} \lambda_k(\Omega)$.

Monotonie : $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \lambda_k(\Omega_1) \geq \lambda_k(\Omega_2)$



Optimisation spectrale

Contraintes :

- Contrainte de volume dans une boîte $|D|$ avec $|D| < \infty$ (Buttazzo, Dal Maso, 1993)

$$\min_{|\Omega|=1, \Omega \subset D} \lambda_k(\Omega)$$

- Contrainte de volume (Bucur 2011)

$$\min_{|\Omega|=1} \lambda_k(\Omega)$$

- Contrainte de périmètre (Velichkov, de Philippis 2012, existence + régularité $C^{1,\alpha}$)

$$\min_{\text{Per}(\Omega)=1} \lambda_k(\Omega)$$

équivalente (à une homothétie près) à

$$\min \lambda_k(\Omega) + \text{Per}(\Omega).$$

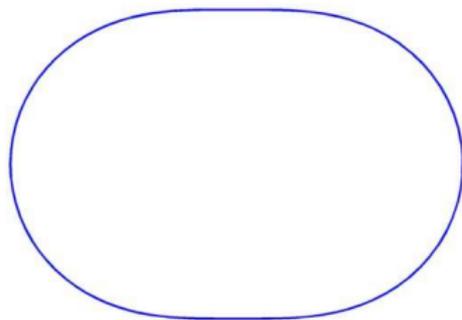
Quelles sont les formes optimales ?

- λ_1 avec contrainte de volume : la boule (Faber-Krahn 1921)

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^2$$

- λ_2 avec contrainte de volume : deux boules identiques (Krahn, Szego)
- λ_1 avec contrainte de périmètre : la boule (Faber-Krahn + l'inégalité isopérimétrique).
- λ_2 avec contrainte de convexité n'est pas l'enveloppe convexe de deux disques (Oudet, Henrot). La frontière contient deux segments parallèles.

- λ_2 avec contrainte de périmètre : Ω^* est un ensemble C^∞ et sa frontière ne contient des segments ou des arcs des cercles (Bucur, Buttazzo, Henrot)

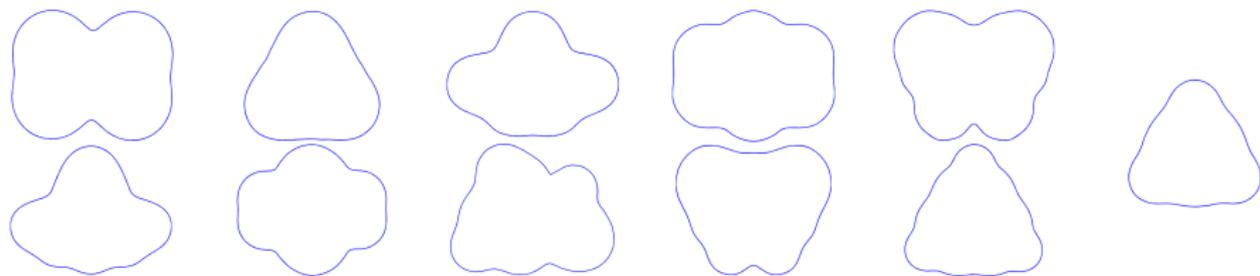


Donc l'enveloppe convexe du forme optimale pour le volume n'est pas optimale pour le périmètre.

Numériquement, 2D, $k = 3 \rightarrow$ la boule est optimale pour la contrainte de volume et donc pour le périmètre aussi. On n'a pas encore une preuve théorique.

Études antérieures :

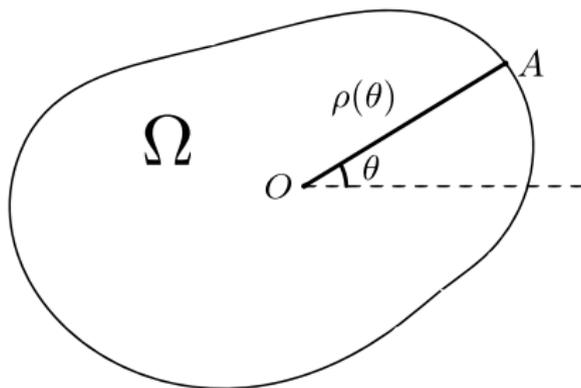
- Oudet, contrainte volume 2004
- Antunes, Freitas, contrainte volume 2012



Première méthode

- en 2D la forme optimale est convexe
- en général la forme optimale est connexe

$$\Omega \longrightarrow \rho : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}_+.$$



Développement en série de Fourier

$$\rho(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)).$$

- $a_n, b_n \rightarrow 0$ très vite, donc on peut approximer

$$\rho(\theta) \approx \rho_N(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$$

En pratique, $N = 20$ suffit pour cette problème et si $\Omega_N \rightarrow \rho_N$ alors

$$|\lambda_n(\Omega_N) - \lambda_n(\Omega)| \leq \frac{3}{r^*} \lambda_n(B_{r^*}) \sum_{k \geq N+1} (|a_k| + |b_k|).$$

(B_{r^*} est la boule maximale contenu en Ω, Ω_N)

Calcul du gradient

$$\lambda_k(\Omega) \approx \lambda_k(a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n).$$

Si $-\Delta u_n = \lambda_n(\Omega)u_n$, $u_n \in H_0^1(\Omega)$

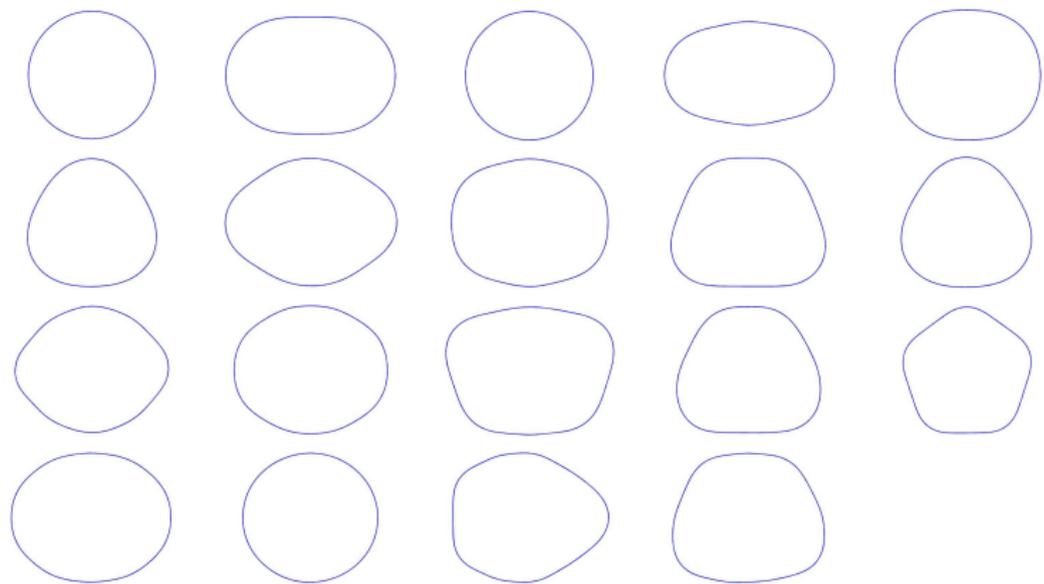
$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial a_k} = - \int_0^{2\pi} \rho(\theta) \cos(k\theta) \left| \frac{\partial u_n}{\partial n}(\rho(\theta), \theta) \right|^2 d\theta$$

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial b_k} = - \int_0^{2\pi} \rho(\theta) \sin(k\theta) \left| \frac{\partial u_n}{\partial n}(\rho(\theta), \theta) \right|^2 d\theta$$

—→ algorithme du gradient

- point de départ aléatoire pour éviter les minima locaux ;
- calcul des valeurs/vecteurs propres avec MpsPack ;

Résultats numériques



Différences - contrainte volume

- contrainte volume $\longrightarrow \lambda_k(\Omega^*)$ ($k \geq 2$) est multiple et la multiplicité est croissante
- contrainte périmètre $\longrightarrow \lambda_k(\Omega^*)$ est simple pour $k = 2, 6, 9, 13, (15?)$

Conditions d'optimalité

- λ_k simple : $\Omega_\varepsilon = f_\varepsilon(\Omega)$, $V = \frac{d}{d\varepsilon} F_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0}$

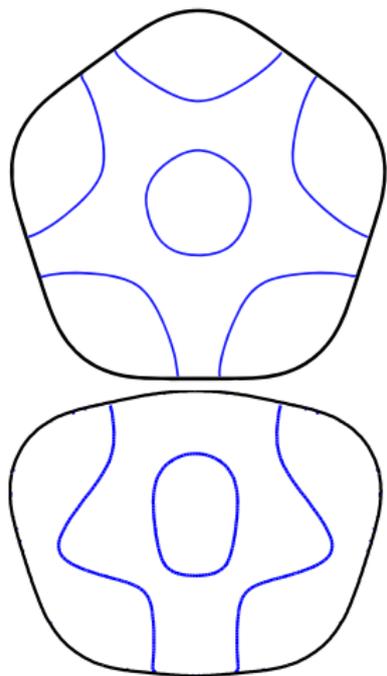
$$\frac{d\lambda_k(\Omega)}{dV} = - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_k}{\partial n} \right)^2 V \cdot nd\sigma$$

→ a l'optimum on a $\left(\frac{\partial u_k}{\partial n} \right)^2 = c\mathcal{H}$ (la courbure moyenne)

- λ_k multiple : on trouve une famille $(\phi_i)_{i=1}^m \subset E_k$ tel que

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)^2$$

Conséquences



- pour $\lambda_{15}(\Omega^*)$ on a $\lambda_{13} = \lambda_{14} = 26.88$ et $\lambda_{15} = 26.91$
- on pourrait croire que $\lambda_{15}(\Omega^*)$ est triple ;
- on a $\left(\frac{\partial u_{15}}{\partial n}\right)^2 = c\mathcal{H}$
- donc $\lambda_{15}(\Omega^*)$ semble être simple.

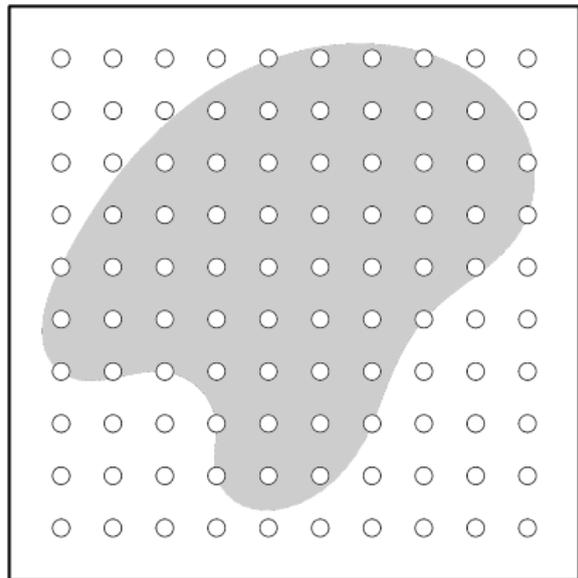
Deuxième méthode

$\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$ si

$$R_{\Omega_n}(f) \rightharpoonup R_{\Omega}(f) \text{ in } H_0^1(D), \forall f \in H^{-1}(D).$$

Problème : on peut construire une suite (Ω_n) des ouverts qui γ converge vers une mesure qui ne correspond pas à un quasi-ouvert

Cioranescu-Murat exemple



$\Omega \subset [0, 1]^2$ ouvert

$$C_n = \bigcup_{i,j=1}^n \overline{B}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, r_n\right)$$

$$A_n = \Omega \setminus C_n, \quad r_n = e^{-cn^2}, \quad c > 0.$$

$$\begin{cases} -\Delta u_n = f \text{ dans } A_n \\ u_n \in H_0^1(A_n) \end{cases}$$

Alors $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$ ou u satisfait

$$\begin{cases} -\Delta u + \frac{2\pi}{c}u = f \text{ dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

On peut définir en général pour μ une mesure capacitaire ($\text{cap}(B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$) la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f \\ u \in H_1(D) \cap L^2(D, \mu) \end{cases}$$

γ -convergence :

$$\mu_n \xrightarrow{\gamma} \mu \Leftrightarrow R_{\mu_n}(f) \rightharpoonup R_{\mu}(f) \text{ in } H_0^1(D), \forall f \in H^{-1}(D).$$

En pratique $f \equiv 1$ suffit.

$$R_{\mu_n}(1) \rightharpoonup R_{\mu}(1) \text{ in } H_0^1(D) \Rightarrow \mu_n \xrightarrow{\gamma} \mu.$$

On peut définir également $\lambda_k(\mu)$:

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = \lambda_k(\mu) u \\ u \in H_1(D) \cap L^2(D, \mu) \end{cases}$$

et on a

$$\mu_n \xrightarrow{\gamma} \mu \Rightarrow \lambda_k(\mu_n) \rightarrow \lambda_k(\mu).$$

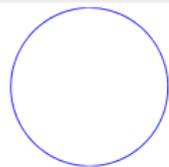
Monotonicité :

$$\mu \geq \nu \Rightarrow \lambda_k(\mu) \geq \lambda_k(\nu).$$

Si $\Omega \subset D$ on a $\lambda_k(\Omega) = \lambda_k(\infty_{\Omega^c})$ ou

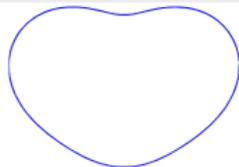
$$\infty_{\Omega^c}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{cap}(A \cap \Omega^c) > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Comparaison calcul valeurs propres



(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)

k	error
1	0.0033
2	0.0088
3	0.0088
4	0.0336
5	0.0008
6	0.0203
7	0.0287
8	0.0287
9	0.0360
10	0.0360



(1, 0, 0.2, 0, 0, 0, 0, 0.1)

k	error
1	0.0081
2	0.0034
3	0.0259
4	0.0094
5	0.0186
6	0.0046
7	0.0483
8	0.0537
9	0.0264
10	0.0131



(1, 0.1, 0, 0, 0, 0, 0.4, 0)

k	error
1	0.0143
2	0.0072
3	0.0048
4	0.0518
5	0.0029
6	0.0453
7	0.0518
8	0.0088
9	0.0569
10	0.0874



(1, 0.2, 0, -0.2, 0, 0, 0, 0.1)

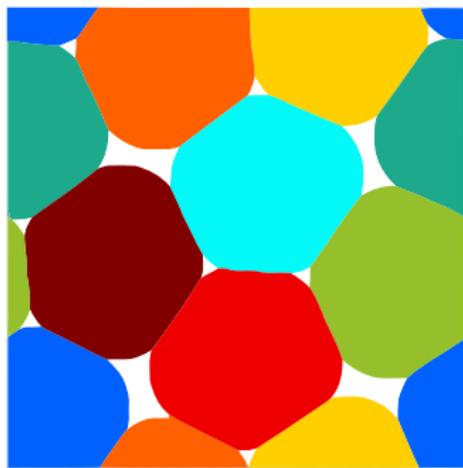
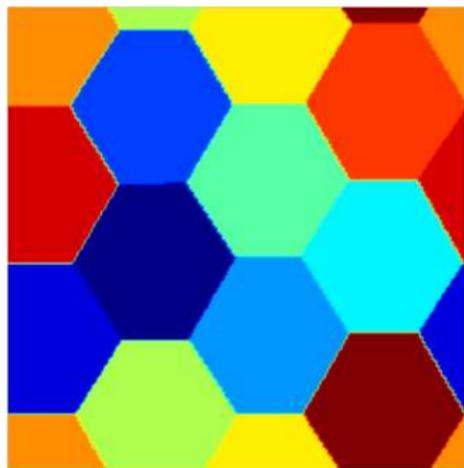
k	error
1	0.0114
2	0.0135
3	0.0269
4	0.0169
5	0.0425
6	0.0461
7	0.0329
8	0.0396
9	0.0643
10	0.0837

erreurs absolus; erreur relative : $\approx 10^{-3}$.

$$\Omega \leftrightarrow \varphi : D \rightarrow [0, 1]$$

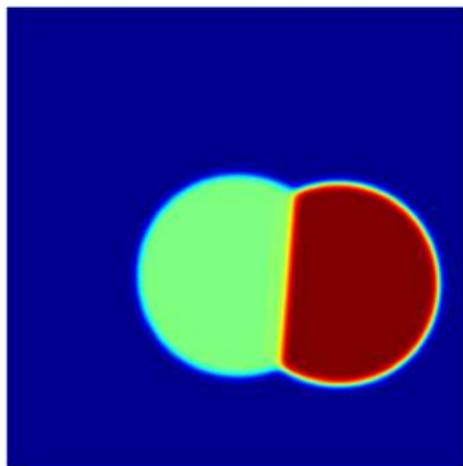
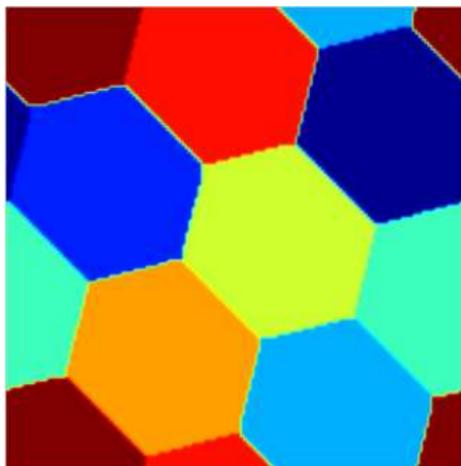
$$\lambda_k(\Omega) \longrightarrow -\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u \text{ avec } C \gg 1.$$

- utilisée par Bourdin, Bucur, Oudet pour étudier les partitions qui minimisent la somme des valeurs propres ;
- B., Velichkov, étude numérique des problèmes multiphases pour valeurs propres.



$$\text{Per}(\Omega) \longrightarrow c \left(\int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx \right)$$

- utilisée par Oudet pour étudier les partitions qui minimisent la somme des périmètres en 2D et 3D.



Combiner les deux

$$\begin{array}{c} \lambda_k(\Omega) + \text{Per}(\Omega) \\ \downarrow \\ \lambda_k(C(1-\varphi))dx + \varepsilon \int_D |\nabla\varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2(1-\varphi)^2 dx \end{array}$$

Connexion entre C et ε ?

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_\varepsilon = +\infty.$$

On peut prendre $C_\varepsilon = 1/\varepsilon$.

Pour ε fixé on peut trouver $\varphi_\varepsilon \in H^1(D)$ qui réalise :

$$\min_{\varphi \in H^1(D)} \lambda_k \left(\frac{1-\varphi}{\varepsilon} dx \right) + \varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1-\varphi)^2 dx$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$ on veut que

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow \chi_\Omega \text{ dans } L^1(D),$$

ou Ω minimise

$$\lambda_k(\Omega) + \text{Per}(\Omega).$$

Γ -convergence

Soit $F_\varepsilon, F : X \rightarrow [0, \infty]$, ou $\varepsilon > 0$ et X est un espace métrique.

On dit que F_ε Γ -converges vers F si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(LI) Pour chaque $u \in X$ et chaque suite (u_ε) tel que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans X on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(u)$$

(LS) Pour chaque $u \in X$ il existe une suite (u_ε) tel que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans X et

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq F(u)$$

- (i) La Γ -limite F est toujours semi continue-inférieurement sur X ;
- (ii) La Γ -convergence est stable pour des perturbations continues ;
- (iii) Si F_ε Γ -converges vers F et v_ε est un minimiseur pour F_ε sur X alors chaque point limite de (v_ε) est un minimiseur de F sur X .

Théorème de Modica-Mortola

$D \subset \mathbb{R}^N$ borné, ouvert.

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_D \left[\varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} u^2 (1-u)^2 \right] dx & u \in H^1(D), \left(\int_D u = c \right) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{Per}(\Omega, D) & u \in BV(D; \{0, 1\}), \Omega = u^{-1}(1), \left(\int_D u = c \right) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème Modica-Mortola

F_ε Γ -converge vers F dans la topologie $L^1(D)$.

Résultat Γ -convergence

$$J_\varepsilon : L^1(D) \rightarrow [0, +\infty]$$

$$J_\varepsilon(\varphi) = \begin{cases} \lambda_k \left(\frac{1-\varphi}{\varepsilon} dx \right) + & \text{si } \varphi \in H^1(D) \\ +\varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1-\varphi)^2 dx & \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$J : L^1(D) \rightarrow [0, +\infty]$$

$$J(\varphi) = \begin{cases} \lambda_k(\Omega) + \frac{1}{3} \text{Per}(\Omega) & \text{si } \varphi = \chi(\Omega) \in BV(D, \{0, 1\}) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème

$J_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} J$ dans la topologie de $L^1(D)$.

- pour $C > 0$ fixé on a $C(1 - \varphi_\varepsilon)dx \xrightarrow{\gamma} C(1 - \varphi)dx$, mais nous on a $C = C_\varepsilon$;
- $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$ et $G_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} G \not\Rightarrow F_\varepsilon + G_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F + G$;
- (LI) marche ;
- (LS) non : on doit trouver la même suite qui réalise la limite dans (LS).

Preuve (LI)

Si $(\varphi_\varepsilon) \rightarrow \varphi$ dans $L^1(D)$ avec $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\varphi) < +\infty$ alors :

- Modica-Mortola $\Rightarrow \varphi = \chi_\Omega$ avec $\text{Per}(\Omega) < +\infty$, i.e. $\chi_\Omega \in BV(D, \{0, 1\})$.

- $-\Delta w_\varepsilon + \frac{1 - \varphi_\varepsilon}{\varepsilon} w_\varepsilon = 1, w_\varepsilon \in H^1(D)$.

- $\mu_\varepsilon = \frac{1 - \varphi_\varepsilon}{\varepsilon} dx \xrightarrow{\gamma} \mu = \begin{cases} +\infty & \Omega^c \\ \geq 0 & \Omega \end{cases} \geq \infty_{\Omega^c}$.

- $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_k(\mu_\varepsilon) \geq \lambda_k(\mu) \geq \lambda_k(\Omega)$.

Preuve (LS)

- Réduction a des ensembles C^∞ (niveaux de $\chi_\Omega * \rho_\varepsilon$);
- On utilise le même suite que dans la preuve de Modica-Mortola avec

$$\varphi_\varepsilon = \begin{cases} 1 & \Omega \\ 0 & (\Omega + B_\varepsilon)^c \\ \in [0, 1] & \text{sinon} \end{cases}$$

- donc $\infty_{\Omega^c} \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - \varphi_\varepsilon}{\varepsilon} \geq \infty_{(\Omega + B_\varepsilon)^c}$
- $\lambda_k(\Omega) \geq \lambda_l(\mu_\varepsilon) \geq \lambda_k(\Omega + B_\varepsilon)$
- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_k(\Omega + B_\varepsilon) = \lambda_k(\Omega)$.

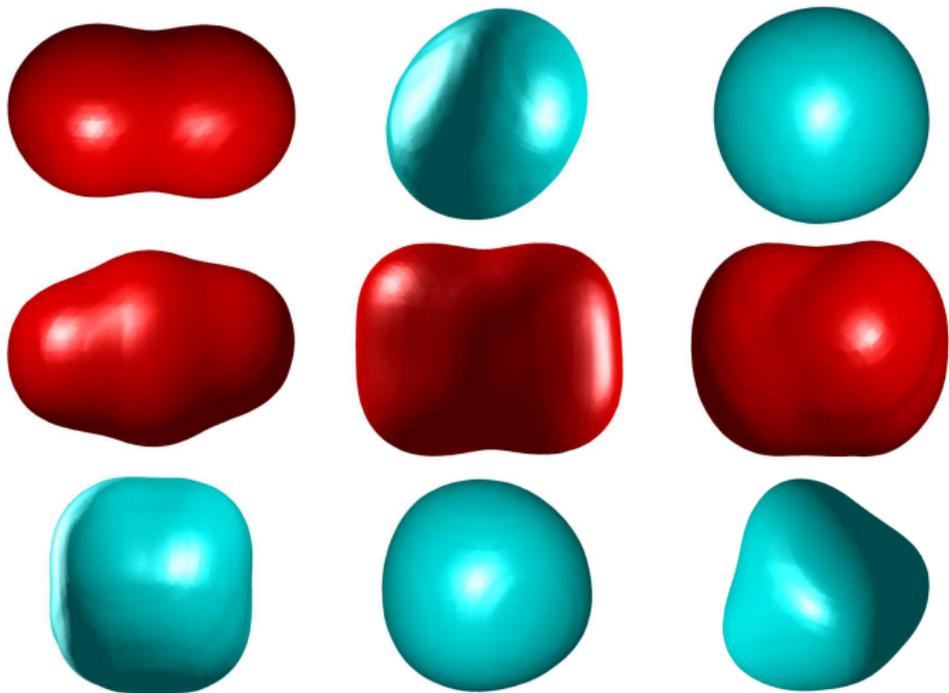
$D = [0, 1]^2$ avec une grille uniforme $N \times N$.

- quadrature + différences finies pour Modica-Mortola ;
- $\lambda_k \left(\frac{1-\varphi}{\varepsilon} dx \right) \longrightarrow \left[A + \frac{1}{\varepsilon}(1 - \varphi)I \right] u = \lambda u$;
- algorithme du gradient ;
- choix initial aléatoire $\Rightarrow k$ boules ;
- résolue si on met une concentration plus forte au centre.
- méthode moins précise : double approximation -
périmètre, valeur propre ;
- on obtient les mêmes résultats que avec la première
méthode ;

Comparaison Methodes

k	mult.	Fourier	densité
1	1	11.55	11.55
2	1	15.28	15.28
3	2	15.75	15.75
4	2	18.35	18.36
5	2	19.11	19.11
6	1	20.09	20.09
7	2	21.50	21.50
8	2	22.02	22.07
9	1	23.20	23.21
10	2	23.55	23.58
11	2	24.60	24.64
12	3	24.74	24.76
13	1	25.98	26.02
14	2	26.44	26.50
15	1	26.91	26.93

Extension directe en 3 dimensions



Conclusions et perspectives

- méthode numérique basée sur Γ -convergence \rightarrow moins précise, mais donne les mêmes résultats ;
- on peut passer assez facilement en 3D ;
- on ne maîtrise pas l'erreur ;
- on n'a pas de garantie de convergence ;
- on doit augmenter la précision en 3D ;