

# Optimisation des valeurs propres sous contrainte de périmètre (Dirichlet, Steklov)

Benjamin Bogosel

LAMA, Chambéry

09/01/2015

## 1 Valeurs propres - Laplacien Dirichlet

## 2 Valeurs propres Steklov

# Valeurs propres - Laplacien Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \\ u &\in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$$0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \dots \rightarrow +\infty$$

Rayleigh :

$$\lambda_k(\Omega) = \min_{S_k \subset H_0^1(\Omega)} \max_{\phi \in S_k} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx}{\int_{\Omega} \phi^2 dx}$$

Consequence :  $\lambda_k(t\Omega) = \frac{1}{t^2} \lambda_k(\Omega)$ .

Monotonie :  $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \lambda_k(\Omega_1) \geq \lambda_k(\Omega_2)$



# Optimisation spectrale

- Contrainte de volume dans une boîte  $D$  avec  $|D| < \infty$  (Buttazzo, Dal Maso)
- Contrainte de volume sans boîte (Bucur, Mazzoleni, Pratelli)
- Contrainte de périmètre (Velichkov, de Philippis, existence + régularité  $C^{1,\alpha}$ )

$$\min_{\text{Per}(\Omega)=1} \lambda_k(\Omega)$$

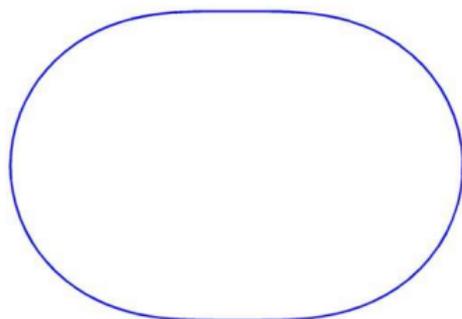
équivalente (à une homothétie près) à

$$\min \lambda_k(\Omega) + \text{Per}(\Omega).$$

# Quelles sont les formes optimales ?

- $\lambda_1$  avec contrainte de volume : la boule (Faber-Krahn)
- $\lambda_2$  avec contrainte de volume : deux boules identiques
- $\lambda_1$  avec contrainte de périmètre : la boule (Faber-Krahn + l'inégalité isopérimétrique).
- $\lambda_2$  avec contrainte de volume + convexité n'est pas l'enveloppe convexe de deux disques (Oudet, Henrot). La frontière contient deux segments parallèles.

- $\lambda_2$  avec contrainte de périmètre :  $\Omega^*$  est un ensemble  $C^\infty$  et sa frontière ne contient des segments ou des arcs des cercles (Bucur, Buttazzo, Henrot)



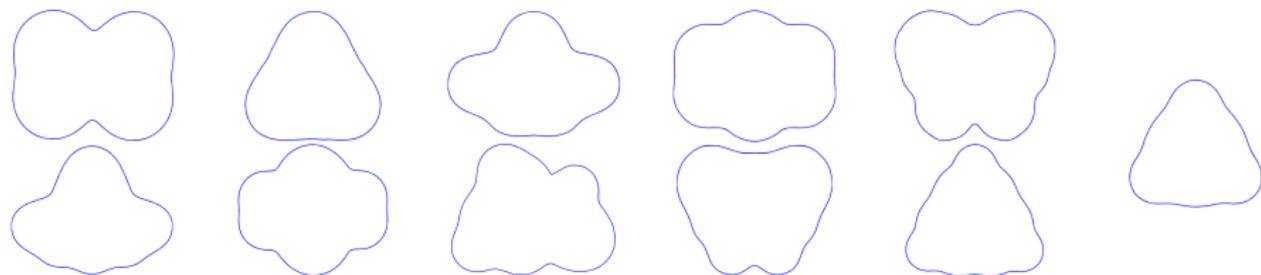
→ l'enveloppe convexe du forme optimale pour le volume n'est pas optimale pour le périmètre

→ **motivation étude numérique**

- Conjecture : 2D,  $k = 3$ , contrainte volume : la boule
- Conjecture : 2D,  $k = 3$ , contrainte périmètre : la boule

### Études numériques antérieures :

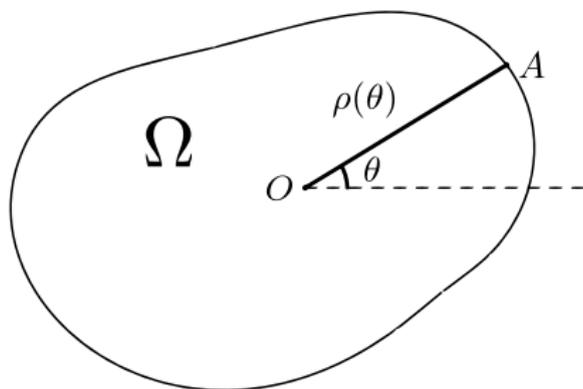
- Oudet, contrainte volume 2004 ;
- Antunes, Freitas, contrainte volume 2012 ;
- Antunes, Freitas, contrainte périmètre 2D et 3D, 2014.



# Première méthode

- en 2D la forme optimale est convexe
- en général la forme optimale est connexe

$$\Omega \longrightarrow \rho : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}_+.$$



# Développement en série de Fourier

$$\rho(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)).$$

- $a_n, b_n$  petits très vite

$$\rho(\theta) \approx \rho_N(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$$

$\Omega_N \longrightarrow \rho_N$  alors

$$|\lambda_n(\Omega_N) - \lambda_n(\Omega)| \leq \frac{3}{r^*} \lambda_n(B_{r^*}) \sum_{k \geq N+1} (|a_k| + |b_k|).$$

( $B_{r^*}$  est la boule maximale contenu en  $\Omega, \Omega_N$ )

# Calcul du gradient

$$\lambda_k(\Omega) \approx \lambda_k(a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n).$$

Si  $-\Delta u_n = \lambda_n(\Omega) u_n$ ,  $u_n \in H_0^1(\Omega)$

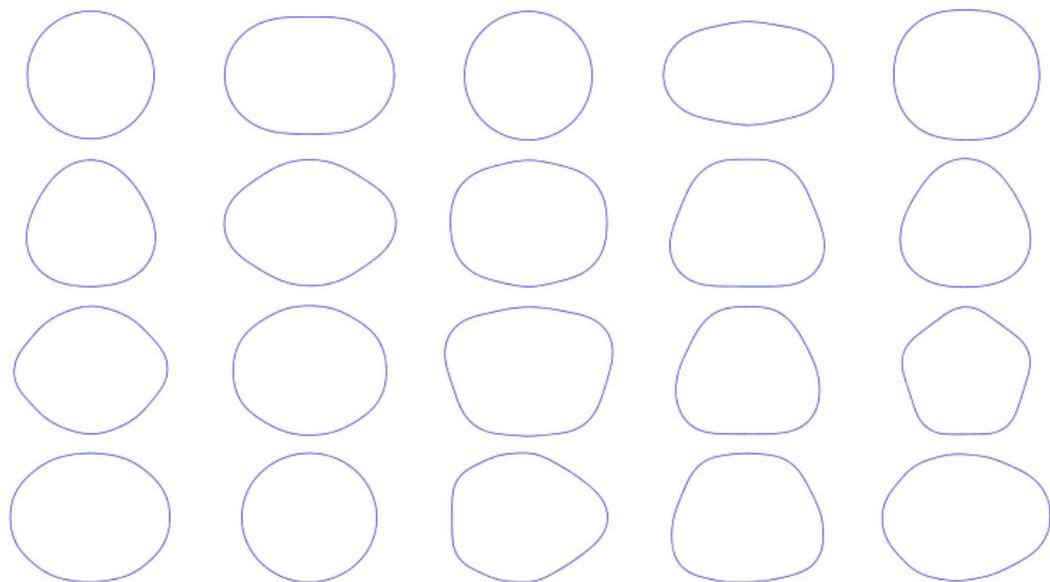
$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial a_k} = - \int_0^{2\pi} \rho(\theta) \cos(k\theta) \left| \frac{\partial u_n}{\partial n}(\rho(\theta), \theta) \right|^2 d\theta$$

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial b_k} = - \int_0^{2\pi} \rho(\theta) \sin(k\theta) \left| \frac{\partial u_n}{\partial n}(\rho(\theta), \theta) \right|^2 d\theta$$

# Optimisation

- algorithme d'optimisation base sur le gradient (LBFGS)
- point de départ aléatoire pour éviter les minima locaux ;
  - calcul des valeurs/vecteurs propres avec MpsPack ;

# Résultats numériques



# Différences - contrainte volume

- contrainte volume  $\longrightarrow \lambda_k(\Omega^*)$  ( $k \geq 2$ ) est multiple et la multiplicité est croissante
- contrainte périmètre  $\longrightarrow \lambda_k(\Omega^*)$  est simple pour  $k = 2, 6, 9, 13, 15$
- les formes optimales sont symétriques

# Conditions d'optimalité

- $\lambda_k$  simple :  $\Omega_\varepsilon = f_\varepsilon(\Omega)$ ,  $V = \frac{d}{d\varepsilon} F_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0}$

$$\frac{d\lambda_k(\Omega)}{dV} = - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u_k}{\partial n} \right)^2 V \cdot n d\sigma$$

→ a l'optimum on a  $\left( \frac{\partial u_k}{\partial n} \right)^2 = c\mathcal{H}$

# Conditions d'optimalité : multiplicité $> 1$

Contrainte de volume :

- $\lambda_k$  multiple : on trouve une famille  $(\phi_i)_{i=1}^m \subset E_k$  tel que

$$\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)^2 = 1$$

Ahmad El Soufi and Saïd Ilias. Domain deformations and eigenvalues of the Dirichlet Laplacian in a Riemannian manifold

# Conditions d'optimalité : multiplicité $> 1$

Contrainte de périmètre :

- $\lambda_k$  multiple : on trouve une famille  $(\phi_i)_{i=1}^m \subset E_k$  tel que

$$\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)^2 = \mathcal{H}$$

# Conséquences

$$\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)^2 = \mathcal{H}$$

- $\mathcal{H}(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi_i}{\partial n}(x) = 0$
- la frontière d'un minimiseur local ne contient pas un segment (partie plate en  $\dim > 2$ )

# Conditions d'optimalité : vérification numérique

$$\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)^2 = \mathcal{H}$$



$$\mathcal{H} \in \text{span} \left( \left\{ \left( \frac{\partial u_i}{\partial n} \right)^2, i = 1..p \right\} \cup \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial n} \frac{\partial u_j}{\partial n}, 1 \leq i < j \leq p \right\} \right).$$

# Conditions d'optimalité : vérification numérique

Numériquement - problème quadratique :

$$\min_{\substack{(\alpha_i)_{i=1}^p, \\ (\beta_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}}} \sum_{h=1}^l \left( \sum_{i=1}^p \alpha_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial n}(x_h) \right)^2 + \right. \\ \left. + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \beta_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial n}(x_h) \frac{\partial u_j}{\partial n}(x_h) - \mathcal{H}(x_h) \right)^2$$

- Observation : très bon indicateur d'un minimum local
- Erreur ponctuelle maximale en 2D :  $\in [0.01; 0.03]$

## Deuxième méthode

- remplacer  $\Omega$  par une densité  $\varphi$
- pour  $\mu = C(1 - \varphi)dx$  on considère  $\lambda_k(\mu)$  :

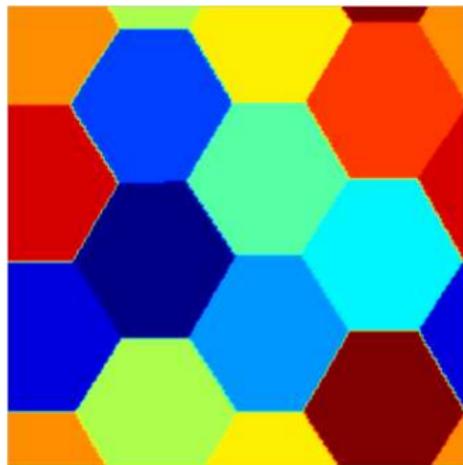
$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = \lambda_k(\mu)u \\ u \in H_1(D) \cap L^2(D, \mu) \end{cases}$$

- $\lambda_k(\Omega) \approx \lambda_k(\mu)$
- approximer le périmètre avec Modica-Mortola

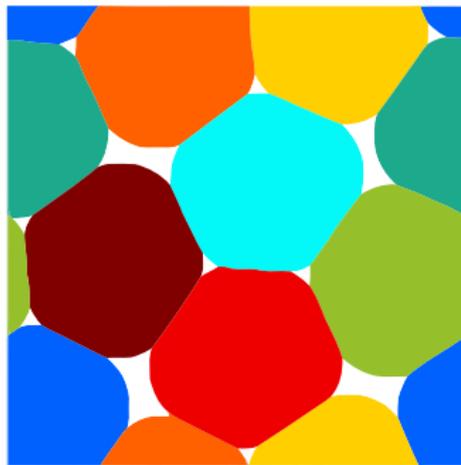
# Motivation (1)

$\lambda_k(\Omega) \longrightarrow -\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$  avec  $C \gg 1$ .

- utilisée par Bourdin, Bucur, Oudet pour étudier les partitions qui minimisent la somme des valeurs propres ;
- B., Velichkov, étude numérique des problèmes multiphases pour valeurs propres.



Benjamin Bogosel

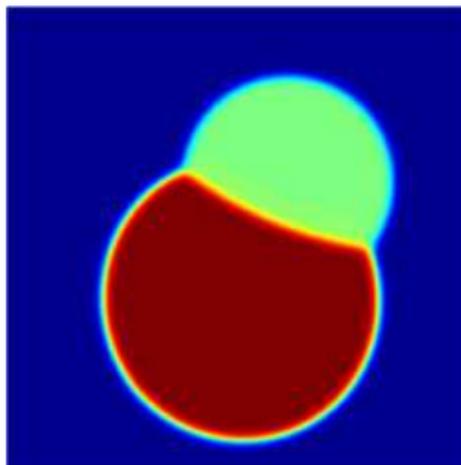
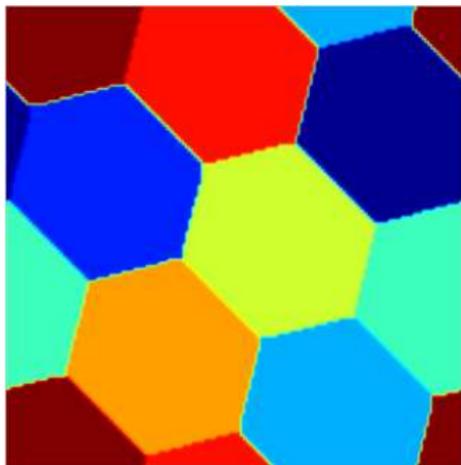


Optimisation spectrale - contrainte périmètre

## Motivation (2)

$$\text{Per}(\Omega) \longrightarrow c \left( \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx \right)$$

- utilisée par Oudet pour étudier les partitions qui minimisent la somme des périmètres en 2D et 3D.



# Combiner les deux

$$\begin{array}{c} \lambda_k(\Omega) + \text{Per}(\Omega) \\ \downarrow \\ \lambda_k(C(1-\varphi))dx + \varepsilon \int_D |\nabla\varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2(1-\varphi)^2 dx \end{array}$$

Connexion entre  $C$  et  $\varepsilon$  ?

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_\varepsilon = +\infty.$$

On peut prendre  $C_\varepsilon = 1/\varepsilon$ .

Pour  $\varepsilon$  fixé on peut trouver  $\varphi_\varepsilon \in H^1(D)$  qui réalise :

$$\min_{\varphi \in H^1(D)} \lambda_k \left( \frac{1 - \varphi}{\varepsilon} dx \right) + \varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx$$

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  on veut que

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow \chi_\Omega \text{ dans } L^1(D),$$

ou  $\Omega$  minimise

$$\lambda_k(\Omega) + \text{Per}(\Omega).$$

# $\Gamma$ -convergence

Soit  $F_\varepsilon, F : X \rightarrow [0, \infty]$ , ou  $\varepsilon > 0$  et  $X$  est un espace métrique.

On dit que  $F_\varepsilon$   $\Gamma$ -converges vers  $F$  si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(LI) Pour chaque  $u \in X$  et chaque suite  $(u_\varepsilon)$  tel que  $u_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $X$  on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(u)$$

(LS) Pour chaque  $u \in X$  il existe une suite  $(u_\varepsilon)$  tel que  $u_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $X$  et

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq F(u)$$

# Propriétés

- (i) La  $\Gamma$ -limite  $F$  est toujours semi continue-inférieurement sur  $X$  ;
- (ii) La  $\Gamma$ -convergence est stable pour des perturbations continues ;
- (iii) Si  $F_\varepsilon$   $\Gamma$ -converges vers  $F$  et  $v_\varepsilon$  est un minimiseur pour  $F_\varepsilon$  sur  $X$  alors chaque point limite de  $(v_\varepsilon)$  est un minimiseur de  $F$  sur  $X$ .

# Théorème de Modica-Mortola

$D \subset \mathbb{R}^N$  borné, ouvert.

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_D \left[ \varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} u^2 (1-u)^2 \right] dx & u \in H^1(D), \left( \int_D u = c \right) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{Per}(\Omega, D) & u \in BV(D; \{0, 1\}), \Omega = u^{-1}(1), \left( \int_D u = c \right) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

## Théorème Modica-Mortola

$F_\varepsilon$   $\Gamma$ -converge vers  $F$  dans la topologie  $L^1(D)$ .

# Résultat $\Gamma$ -convergence

$$J_\varepsilon, J : L^1(D) \rightarrow [0, +\infty]$$

$$J_\varepsilon(\varphi) = \begin{cases} \lambda_k \left( \frac{1-\varphi}{\varepsilon} dx \right) + & \text{si } \varphi \in H^1(D) \\ +\varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1-\varphi)^2 dx & \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$J(\varphi) = \begin{cases} \lambda_k(\Omega) + \frac{1}{3} \text{Per}(\Omega) & \text{si } \varphi = \chi(\Omega) \in BV(D, \{0, 1\}) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

## Théorème

$J_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} J$  dans la topologie de  $L^1(D)$ .

# Difficultés

- pour  $C > 0$  fixé on a  $C(1 - \varphi_\varepsilon)dx \xrightarrow{\gamma} C(1 - \varphi)dx$ , mais nous on a  $C = C_\varepsilon$ ;
- $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$  et  $G_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} G \not\Rightarrow F_\varepsilon + G_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F + G$ ;
- (LI)  $\longrightarrow$  OK;
- (LS) non : on doit trouver le même suite qui réalise la limite dans (LS).

# Calculs numériques

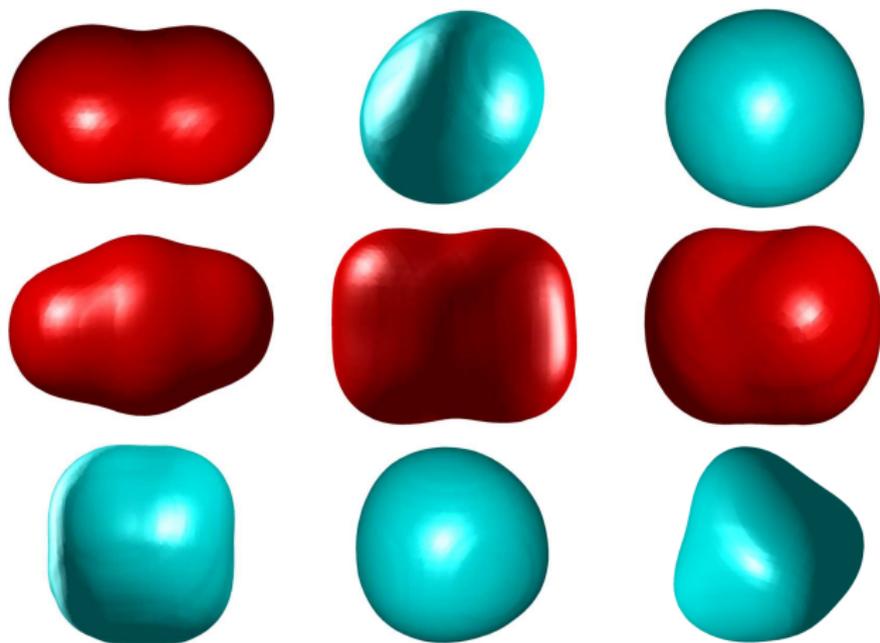
$D = [0, 1]^2$  avec une grille uniforme  $N \times N$ .

- quadrature + différences finies pour Modica-Mortola ;
- $\lambda_k \left( \frac{1-\varphi}{\varepsilon} dx \right) \longrightarrow \left[ A + \frac{1}{\varepsilon}(1 - \varphi)I \right] u = \lambda u$  ;
- algorithme du gradient ;
- choix initial aléatoire  $\Rightarrow k$  boules ;
- problème résolu si on met une concentration au centre.
- méthode moins précise : double approximation -  
périmètre, valeur propre ;
- on obtient les mêmes résultats que avec la première  
méthode ;

# Comparaison Methodes

$k$	mult.	Fourier	densité
1	1	11.55	11.55
2	1	15.28	15.28
3	2	15.75	15.75
4	2	18.35	18.36
5	2	19.11	19.11
6	1	20.09	20.09
7	2	21.50	21.50
8	2	22.02	22.07
9	1	23.20	23.21
10	2	23.55	23.58
11	2	24.60	24.64
12	3	24.74	24.76
13	1	25.98	26.02
14	2	26.44	26.50
15	1	26.91	26.93

# Extension directe en 3 dimensions



# Conclusions et perspectives

- méthode numérique basée sur  $\Gamma$ -convergence  $\rightarrow$  moins précise, mais donne les mêmes résultats ;
- on peut passer assez facilement en 3D ;
- on ne maîtrise pas l'erreur ;
- on n'a pas de garantie de convergence ;
- on doit augmenter la précision en 3D ;

1 Valeurs propres - Laplacien Dirichlet

2 Valeurs propres Steklov

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , assez régulier, simplement connexe on considère

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \sigma u & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

Valeurs propres Steklov :

$$0 = \sigma_0 \leq \sigma_1(\Omega) \leq \sigma_2(\Omega) \leq \sigma_3(\Omega) \leq \dots \rightarrow +\infty$$

Caractérisation variationnelle :

$$\sigma_n(\Omega) = \inf_{S_n} \sup_{u \in S_n \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$S_n \subset H^1(\Omega) \cap \left\{ \int_{\partial\Omega} u = 0 \right\};$$

$$\sigma_k(t\Omega) = \frac{1}{t} \sigma_k(\Omega).$$

# Stabilité des valeurs propres Steklov

$(\Omega_n), \Omega \subset D \subset \mathbb{R}^d$  vérifient une condition  $\varepsilon$ -cone et  $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$ , alors :

(1)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_k(\Omega_n) \leq \sigma_k(\Omega)$  ;

(2) Si  $\text{Per}(\Omega_n) \rightarrow \text{Per}(\Omega)$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_k(\Omega_n) = \sigma_k(\Omega)$ .

## Conséquence

On peut prouver des résultats d'existence pour des problèmes d'optimisation contenant les valeurs propres Steklov, sous contraintes de volume et périmètre, pour les classes d'ouverts suivantes : convexes, condition  $\varepsilon$ -cone.

# Idée de la preuve

$(\Omega_n), \Omega \subset D \subset \mathbb{R}^d$  vérifient une condition  $\varepsilon$ -cone,  $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$ ,  
 $u_n \in H^1(\Omega_n), u_n \rightharpoonup u \in H^1(\Omega)$  :

$$(1) \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_n} u_n \geq \int_{\partial\Omega} u.$$

$$(2) \text{ Si } \text{Per}(\Omega_n) \rightarrow \text{Per}(\Omega) \text{ alors } \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_n} u_n = \int_{\partial\Omega} u.$$

Arguments similaires ont été utilisés par Bucur et Gazzola

# Calcul numérique valeurs propres Steklov

- FreeFem++ - on a besoin d'une triangulation assez fine pour arriver a une precision importante, donc temps de calcul élevé.
- Méthode solutions fondamentales - gain de vitesse de calcul (0.02 sec pour les 10 premiers vp sur un i7 quad core, 2.2 Ghz) ; restriction sur la géométrie des formes : ça marche pas bien si on a des cusps.

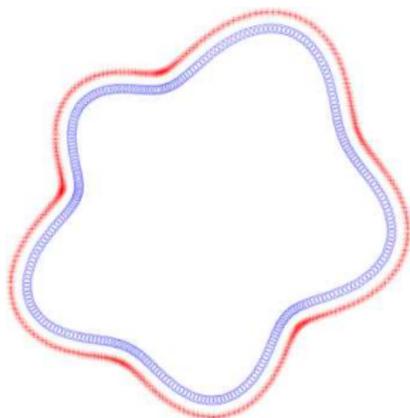
# Méthode solutions fondamentales

- $(y_i)_{i=1}^N$  - une famille des points a l'extérieur du domain  $\Omega$  ;
- $\phi_i$  - fonctions harmoniques radiales centrées en  $y_i$  ;
- $(x_i)_{i=1}^N$  - une discrétisation du  $\partial\Omega$  ou on impose la condition au bord ;
- calcul valeurs propres généralises : `eigs` (Matlab)

Antunes, Freitas utilisent la même méthode pour les vp Dirichlet, Neumann. Pour les vp Steklov c'est plus simple : les solutions particuliers ne dépendent pas de valeurs propres.

# Choix centres !

- Les  $(x_i)$  on les choisit uniformément sur  $\partial\Omega$  (angles ou longueur d'arc) ;
- Les  $(y_i)$  on les choisit sur les normales en  $(x_i)$  a  $\partial\Omega$  a distance 0.1 des  $(x_i)$ .



# Comparaison FreeFem++

		FreeFem++			
$k$	MFS	2096▲	33788▲	134898▲	211290▲
1	0.712751	0.714888	0.712886	0.712785	0.712773
2	0.940247	0.942837	0.940411	0.940288	0.940274
3	1.381278	1.38874	1.38175	1.3814	1.38135
4	1.443204	1.45137	1.44372	1.44333	1.44329
5	3.146037	3.15592	3.14665	3.14619	3.14614
6	3.443637	3.45562	3.44438	3.44382	3.44376
7	3.757833	3.78642	3.75962	3.75828	3.75812
8	3.922822	3.95461	3.92478	3.92331	3.92313
9	4.274362	4.32906	4.27774	4.27521	4.2749
10	4.693207	4.75819	4.69723	4.69422	4.69385

# Dérivée de forme

$$\rho(\theta) \approx a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cos(i\theta) + \sum_{i=1}^n b_i \sin(i\theta).$$

Dambrine, Kateb, Lamboley, *An extremal eigenvalue problem for the Wentzell-Laplace operator*, Section E

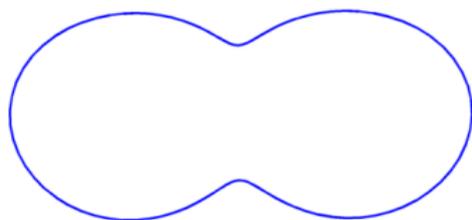
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_k}{\partial a_i} &= \int_0^{2\pi} (|\nabla u(\rho(\theta)\vec{r}(\theta))|^2 - (2\sigma_k^2 + \sigma_k \mathcal{H}) \\ &\quad |u(\rho(\theta)\vec{r}(\theta))^2| \rho(\theta) \cos(i\theta) d\theta \\ \frac{\partial \sigma_k}{\partial b_i} &= \int_0^{2\pi} (|\nabla u_k(\rho(\theta)\vec{r}(\theta))|^2 - (2\sigma_k^2 + \sigma_k \mathcal{H}) \\ &\quad |u_k(\rho(\theta)\vec{r}(\theta))^2| \rho(\theta) \sin(i\theta) d\theta. \end{aligned}$$

# Résultats numériques

- Weinstock, Hersch-Payne
- $\min \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i(\Omega)|\Omega|^{\frac{1}{2}}}$  réalisé par le disque
- $\min \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{2i-1}(\Omega)\sigma_{2i}(\Omega)|\Omega|}$  réalisé par le disque
- $\max |\Omega|^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sigma_i(\Omega)$  réalisé par le disque
- $\min \sum_{i \in A} \frac{1}{\sigma_i(\Omega)|\Omega|^{\frac{1}{2}}}$  réalisé par le disque, ou  $A$  a la propriété :  $1 \in A, 2k \in A \Rightarrow 2k - 1 \in A$ .

# Résultats numériques

- Girouard, Polterovich - contrainte périmètre  $\rightarrow \sigma_2(\Omega)$  est maximale pour 2 disques ;
- contrainte volume : on peut trouver des formes meilleures que deux disques



$$\sigma_2(\Omega^*) = 2.8813 > \sqrt{2\pi} = \sigma_2(\circ\circ)$$

# Conclusions et perspectives

- résultat d'existence en cas général ?
- calculs en 3D ?
- comment traiter les domaines qui ont des cusps ?

Merci !