Corrections et commentaires sur le livre
“Optimisation continue”, Dunod, 2006, par F. Bonnans

Version du 7 novembre 2012

Avant-propos

Toutes remarques sur ce livre sont bienvenues.
Les envoyer à Frederic.Bonnans@inria.fr

1 Corrections et ajouts

1.1 Corrections ponctuelles

1. **Proposition 3.69 (page 98)**, suite à un retour de Francisco Silva (Limoges) :
   (a) Après la première formule centrée de la démonstration, remplacer les 5 lignes suivantes parce qui suit :
   Ajoutant l'égalité
   $$\mathrm{val}(DL_d) = D_u L(\bar{x}, \lambda, \bar{u})d, \tag{1}$$
   on obtient en raison de la qualification directionnelle :
   $$\varepsilon \sum_{i\in I(\bar{x},\bar{u})} \lambda_i \leq - \sum_{i\in I(\bar{x},\bar{u})} \lambda_i D_x g_i(\bar{x}, \bar{u})(\bar{h}, d) = D_x f(\bar{x}, \bar{u})(\bar{h}, d) - \mathrm{val}(DL_d), \tag{2}$$
   ce qui montre que $S(DL_d)$ est borné.
   (b) Dans la première ligne de la démonstration du point (ii) :
   Remplacer ”pour $\varepsilon > 0$, posons $h_\varepsilon := h+\varepsilon\bar{h}$” par ”pour $\varepsilon \in (0, 1)$, posons $h_\varepsilon := (1-\varepsilon)h+\varepsilon\bar{h}$”.
2. **Section 4.3.4** : première ligne, remplacer “en” par “entre”.
3. **Lemme 4.66** : préciser que la fonction sup est définie par $\sup y = \sup\{y_\omega;\ \omega \in \Omega\}$.
4. **Section 4.4.3** : troisième ligne, supprimer l'accolade fermante. Deux lignes plus bas : supposer aussi g continue.
5. **Prop 4.71** : (i) dans (4.90) et (4.91) on peut changer $\overline{\mathrm{conv}}$ en conv; (ii) entre les seconde et troisième lignes de (4.92), insérer la ligne suivante :
   $$\geq \min_i\{-f(x_i)\} + \max_i\{-\langle\lambda, \mathcal{G}(x_i) - k_i\rangle\}$$
   où les k_i sont tels que $\frac{1}{2}\varepsilon B \subset \overline{\mathrm{conv}}\left(\{\mathcal{G}(x_i) - k_i, i = 1, \ldots, r\}\right)$. L'inégalité est conséquence des conditions de signe, qui impliquent $\langle\lambda, k_i\rangle \leq 0$ pour tout i.
6. **Section 5.1.1** : ligne 4, remplacer ”dans $\mathbb{R}^n$” par ”euclidien”.
7. **Prop 5.2** : ligne 3, supprimer la répétition ”de A”.
8. **Section 5.1.2** : ligne 4, supprimer la répétition de” $i = 0$ à n”.
9. **Section 5.1.2** : bas de la page 145, dans la matrice centrée, produit scalaire entre c et x.
10. **Prop 5.75** : Dans la démonstration, remplacer (4 fois) Df par $D_u f$.

2 Extensions

2.1 Section 4.3.3 du livre

On peut ajouter l'application suivante des résultats généraux au cas du sous différentiel partiel :

Dans le cas d'une fonction de deux variables $f(x,y)$, on notera $\partial_x f(x,y)$ le sous-différentiel par rapport à la première variable; autrement dit, $\partial_x f(\bar{x},\bar{y})$ est le sous-différentiel en $\bar{x}$ de la fonction $x \mapsto f(x,\bar{y})$.

Proposition 2.1 *Soient f convexe s.c.i. propre de $X \times Y$ vers $\bar{I\!R}$, de valeur finie en $(\bar{x},\bar{y})$. Si la condition de stabilité suivante est satisfaite :*

$$\textit{Il existe } \varepsilon > 0; \textit{ pour tout } y \in B_Y(\bar{y},\varepsilon), \textit{ il existe } x_y \in X; \ (x_y, y) \in \operatorname{dom}(f), \tag{3}$$

alors $\partial_x f(\bar{x},\bar{y})$ est la restriction aux variables x du sous-différentiel de f en $(\bar{x},\bar{y})$:

$$\partial_x f(\bar{x},\bar{y}) = \{q \in X^*;\ \textit{il existe } w \in Y^*;\ (q,w) \in \partial f(\bar{x},\bar{y})\}. \tag{4}$$

Démonstration. On applique la proposition 4.55 à la composition

$$x \mapsto Ax = (x,0) \mapsto f((x,0)+(0,\bar{y})), \tag{5}$$

en notant que l'injection A a pour transposée la restriction $A^\top(x^*,y^*) = x^*$. On en déduit que la condition de stabilité s'écrit

$$\text{Il existe } \varepsilon > 0; \quad \varepsilon B_{X\times Y} \subset \operatorname{dom}(f) - X \times \{\bar{y}\}, \tag{6}$$

dont on vérifie aisément l'équivalence avec (3). ∎

2.2 Section 4.3.4 du livre

Cette section indique comment passer de la fonction de perturbation φ au lagrangien de dualité $\mathcal{L}$. Mais le problème inverse se pose en pratique. On peut donc ajouter la remarque suivante.

Remarque 2.2 Soit $a(x,\lambda)$ une fonction convexe-concave $X_0 \times \Lambda \to I\!R$, avec X_0 partie convexe fermée d'un espace de Banach X, et Λ partie convexe du dual d'un espace de Banach Y. On cherche sous quelles conditions l'égalité

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \inf_{x \in X_0} a(x,\lambda) = \inf_{x\in X_0} \sup_{\lambda\in\Lambda} a(x,\lambda) \tag{7}$$

est satisfaite. On suppose $a(x,\lambda)$ convexe s.c.i. par rapport à x. Notons

$$b(x,\lambda) := \begin{cases} -a(x,\lambda), & \text{si } x \in X_0, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \tag{8}$$

et définissons $\varphi(x,y) : X \times Y \to I\!R \cup \{+\infty\}$ par

$$\varphi(x,y) := b^*_\lambda(x,y) = \begin{cases} \sup_{\lambda\in\Lambda}[\langle \lambda, y\rangle + a(x,\lambda)] & \text{si } x \in X_0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{9}$$

Cette fonction est convexe s.c.i. car supremum de fonctions convexes s.c.i. en (x, y). Le lagrangien de dualité associé est

$$\mathcal{L}(x, \lambda, y) := \langle \lambda, y \rangle - \varphi_y^*(x, \lambda) = \langle \lambda, y \rangle - b_\lambda^{**}(x, \lambda). \tag{10}$$

Notons $a_\lambda^{**}(x, \lambda) := -b_\lambda^{**}(x, \lambda)$. Si, pour tout y proche de zéro, il existe x tel que $\varphi(x, y) < +\infty$, l'absence de saut de dualité implique le théorème minmax (cas particulier de la relation fondamentale entre les deux dualités lorsque $y = 0$) :

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \inf_{x \in X_0} a_\lambda^{**}(x, \lambda) = \inf_{x \in X_0} \sup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda^{**}(x, \lambda) \tag{11}$$

Si de plus on a

$$b_\lambda^{**}(x, \lambda) = \begin{cases} b(x, \lambda) & \text{si } \ \lambda \in \Lambda, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \tag{12}$$

alors (7) est satisfait.

En particulier, si Y est réflexif, (7) est satisfait si (i) X_0 et Λ sont convexes et fermés, (ii) $a(x, \lambda)$ est convexe s.c.i. par rapport à x pour tout $\lambda \in \Lambda$, et concave s.c.s. rapport à λ, pour tout $x \in X_0$, et (iii) $\inf_{x \in X_0} \varphi(x, y) < +\infty$ quand y est voisin de 0.