

Approche classique des équations aux dérivées partielles du premier ordre

J. Frédéric Bonnans*

June 9, 2011

La section qui suit (fragment d'un chapitre en préparation) rappelle la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre par la méthode des caractéristiques, et fait le lien entre formulations lagrangienne et hamiltonienne.

1 Equations aux dérivées partielles du premier ordre

1.1 Equations différentielles

Dans cette section on utilisera les notations abrégées f_x pour la dérivée partielle de f par rapport à la variable x , et on notera par $\frac{d}{dt}$ ou “.” la dérivée totale par rapport au temps. Ainsi

$$\dot{f}(x_t, t) = f_x(x_t, t)\dot{x}_t + f_t(x_t, t).$$

1.1.1 Groupe associé à un champ de vecteur

On appelle *champ de vecteur* une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, localement lipschitzienne. Le point $x \in \mathbb{R}^n$ est dit *point régulier* du champ si $f(x) \neq 0$, et *point singulier* sinon. Au champ de vecteur f on associe l'équation différentielle avec condition de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = f(x); \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

avec $t \in \mathbb{R}$, dont on cherche une solution continûment différentiable. L'équation précédente est alors équivalente à sa forme intégrale

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(x_\sigma) d\sigma. \tag{1.2}$$

Soit $\tau > 0$. Notons $X_\tau := C([- \tau, \tau], \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues de $[- \tau, \tau]$ vers \mathbb{R}^n . Muni de la norme du max, c'est un espace de Banach. Pour $\tau > 0$ proche de 0, il n'est pas difficile de montrer que l'opérateur $G : X_\tau \rightarrow X_\tau$, tel que $G(x)(t) := x_0 + \int_0^t f(x_t) dt$, défini sur un voisinage convenable de la fonction constante de valeur x_0 , est strictement contractant, et (en appliquant le théorème de point fixe contractant de Banach-Picard)

*INRIA-Saclay et CMAP, Ecole Polytechnique, 91128, Palaiseau, France. Email : Fred-eric.Bonnans@inria.fr.

qu'il a un point fixe unique, ce qui assure l'existence et l'unicité de la solution de (1.1) pour t proche de 0. Cette solution a un prolongement sur un intervalle maximal ouvert, borné ou non.

Notons S_t le *groupe à un paramètre* qui à x_0 associe x_t , la valeur de la solution de l'équation différentielle à l'instant t (si elle existe). Pour t proche de 0, S_t est bien définie au voisinage de x_0 . Alors S_0 est l'identité, et S_t est (localement en x et t) un difféomorphisme. On a $S_t \circ S_\tau(x) = S_{t+\tau}(x)$, si t , x et τ sont tels que $S_\tau(x)$ et $S_{t+\tau}$ sont bien définis.

Si \bar{x} est point régulier du champ, supposons par exemple que $f_n(\bar{x}) \neq 0$. Alors localement $f_n(x) \neq 0$ et on peut considérer x_n comme une mesure du temps. Plus précisément posons $x_n = \tau$. Le long de la trajectoire, on a

$$\frac{dx_i}{d\tau}(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} \times \frac{dt}{d\tau} = f_i(x_t)/f_n(x_t), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (1.3)$$

Ainsi à f on peut associer l'application $\tilde{f} : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ définie par

$$\tilde{f}_i(\tilde{x}, t) := f_n(\tilde{x}, t)^{-1} f_i(\tilde{x}, t), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (1.4)$$

où $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $t \in \mathbb{R}$. Notons $\tilde{S}_{t_0, t}$ l'application qui à la condition initiale $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ au temps t_0 , fait correspondre la solution \tilde{x}_t de l'équation différentielle *non autonome* (c'est à dire dont le second membre dépend explicitement du temps)

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{f}(\tilde{x}, t); \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0. \quad (1.5)$$

On a $\tilde{S}_{t_0, t_2}(x) = \tilde{S}_{t_0, t_1} \circ \tilde{S}_{t_1, t_2}(x)$, si $\tilde{S}_{t_1, t_2}(x)$ et $\tilde{S}_{t_0, t_2}(x)$ sont bien définis.

Inversement, soit à résoudre l'équation différentielle (1.5), où $\tilde{x}_t \in \mathbb{R}^{n-1}$. On peut poser $x := (\tilde{x}, t)$ et $f(\tilde{x}, t) := (\tilde{f}(\tilde{x}, t), 1)$, ce qui ramène, si \tilde{f} est lipschitzienne, au cas autonome.

Exemple 1.1 (Champ hamiltonien) Soit $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction appelée hamiltonien. Notant (x, p) les éléments de \mathbb{R}^{2n} avec $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$, on associe à H le champ hamiltonien $(H_p, -H_x)$. L'équation différentielle associée est

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{p} = -H_x. \quad (1.6)$$

La valeur du hamiltonien est invariante le long de toute trajectoire : en effet

$$\frac{d}{dt} H(x_t, p_t) = H_x \dot{x}_t + H_p \dot{p}_t = 0.$$

1.1.2 Invariants, hamiltoniens, caractéristiques

Plus généralement, on s'intéresse à la propriété suivante : Une fonction $\psi(x)$ est-elle invariante le long de toute trajectoire associée au champ f ? On veut donc

$$\psi(x_t) = \psi(x_0), \quad \forall t.$$

La relation est satisfaite ssi $\frac{d}{dt}\psi(x_t) = 0$ le long de toute trajectoire, c'est-à-dire ssi ψ satisfait l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) = 0. \quad (1.7)$$

Si localement $f_n(x) \neq 0$, identifiant x_n au temps, on obtient l'expression équivalente

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(\tilde{x}, t) + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{f}_i(\tilde{x}, t) \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x}, t) = 0,$$

où $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $t \in \mathbb{R}$, et où \tilde{f} est définie par (1.4).

Un invariant est donné par sa valeur "initiale", pour x_n fixé, à l'instant 0. Autrement dit, c'est le résultat du *transport* par l'application $\tilde{S}_{0,t}$ d'une fonction quelconque de (x_1, \dots, x_{n-1}) , qui est localement (en espace et temps) inversible en espace. Ainsi un invariant φ est de la forme $\varphi(\tilde{S}_{0,t}(\tilde{x}, t)^{-1})$, où $\tilde{S}_{0,t}(\tilde{x}, t)^{-1}$ représente l'état de la trajectoire pour $t = 0$.

Exemple 1.2 Crochet de Poisson. La fonction $\psi(x, p)$ sera invariante sous l'action du champ hamiltonien ssi son crochet de Poisson avec H , défini par

$$[H, \psi] := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \right) \quad (1.8)$$

est nul.

Montrons maintenant qu'on peut associer à l'équation (1.7) une *interprétation hamiltonienne*, en la réécrivant comme

$$H(x, p) = 0; \quad p = \psi_x(x), \quad (1.9)$$

avec $p \in \mathbb{R}^n$ et $H(x, p) = \sum_i f_i(x) p_i$, appelé hamiltonien associé à (1.7). Le long des trajectoires intégrales de $\dot{x} = f(x)$, appelées encore *courbes caractéristiques*, on a $\dot{x} = f(x) = H_p(x_t, p_t)$, et aussi

$$\dot{p}_{i,t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi(x_t)}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial^2 \psi(x_t)}{\partial x_i \partial x_j} f_j(x_t).$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial^2 \psi(x_t)}{\partial x_i \partial x_j} f_j(x_t) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial \psi(x_t)}{\partial x_j} f_j(x_t) \right) \\ &\quad - \sum_j \frac{\partial \psi(x_t)}{\partial x_j} \frac{\partial f_j(x_t)}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

donc compte tenu de (1.7),

$$\dot{p}_{i,t} = - \sum_j \frac{\partial \psi(x_t)}{\partial x_j} \frac{\partial f_j(x_t)}{\partial x_i} = - \sum_j p_j \frac{\partial f_j(x_t)}{\partial x_i} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}(x_t, p_t),$$

de sorte que les courbes caractéristiques ne sont autres que les projections sur l'espace des x des trajectoires *bicaractéristiques* associées au système hamiltonien

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{p} = -H_x. \quad (1.10)$$

1.1.3 Equations quasi linéaires du premier ordre

Plus généralement, dans le cas de l'équation quasi linéaire

$$\sum_{i=1}^n f_i(x, y) \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) = f_{n+1}(x, y), \quad (1.11)$$

où l'inconnue est la fonction $y = y(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on peut toujours chercher y comme racine d'une équation (scalaire) du type $\psi(x, y) = 0$, si on s'assure que $\psi_y \neq 0$. En effet cette relation, d'après le théorème des fonctions implicites, équivaut à $y = \lambda(x)$, avec

$$\psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)\lambda'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda'(x) = -\psi_y(x, y)^{-1}\psi_x(x, y). \quad (1.12)$$

Reportant l'expression de $\lambda'(x) = y_x$ dans (1.11), on obtient l'équation

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x, y) + f_{n+1}(x, y)\psi_y(x, y) = 0, \quad (1.13)$$

qui est du même type que (1.7) (après réécriture de y comme x_{n+1}). On résout donc (1.11) en calculant les fonctions ψ invariantes le long des trajectoires intégrales associées à f (dans \mathbb{R}^{n+1} !), puis en résolvant en y l'équation $\psi(x, y) = 0$.

1.1.4 Equations non linéaires du premier ordre

Les méthodes précédentes s'étendent à l'étude de l'équation aux dérivées partielles non linéaire du premier ordre

$$H(x, v(x), v_x(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.14)$$

où l'inconnue est la fonction $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Nous allons résoudre cette équation par la méthode des caractéristiques, en la réécrivant comme

$$H(x, v(x), p) = 0; \quad p = v_x(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad p \in \mathbb{R}^n.$$

Si $H_p \neq 0$, par exemple $\frac{\partial H}{\partial p_n} \neq 0$, on peut, en invoquant le théorème des fonctions implicites, tirer p_n de l'équation, ou de manière équivalente se ramener au cas où $\frac{\partial H}{\partial p_n}$ vaut identiquement 1. Identifiant x_n au temps on peut alors réécrire (1.14) sous la forme

$$v_t + \tilde{H}(\tilde{x}, t, v, v_{\tilde{x}}) = 0,$$

avec $\tilde{x} := (x_1, \dots, x_{n-1})$. Pour alléger les notations réécrivons cette équation, dite de Hamilton-Jacobi, sous la forme

$$v_t + H(x, t, v, v_x) = 0, \quad (1.15)$$

avec encore $x \in \mathbb{R}^n$, $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, et $v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. A une solution $v(x, t)$ notant $p = v_x$, associons les courbes caractéristiques solution de

$$\dot{x} = H_p = H_p(x, t, v, v_x).$$

Le long de ces courbes, nous avons, omettant les arguments des fonctions :

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial t} + \sum_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial H}{\partial p_j}.$$

Mais dérivant (1.15) par rapport à x_i , nous obtenons

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_i} + H_v \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Combinant les deux équations, il vient

$$\dot{p} = -H_x - H_v v_x = -H_x - H_v p.$$

Par ailleurs, le long de cette courbe caractéristique, on a

$$\dot{v} = v_t + \sum_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \dot{x}_i = p \cdot H_p - H,$$

où “ \cdot ” désigne ici le produit scalaire dans \mathbb{R}^n . En conclusion, le triplet (x, p, v) est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x} = H_p, \\ \dot{v} = p \cdot H_p - H, \\ \dot{p} = -H_x - H_v p. \end{cases} \quad (1.16)$$

Les trajectoires associées sont appelées courbes (tri) caractéristiques associées à l'équation de Hamilton-Jacobi. Si on se donne au temps $t = 0$ la valeur de $w(x) = v(x, t = 0)$, alors l'intégration des caractéristiques à partir des points $(x, p(x) = w_x(x), w(x))$ permet de reconstituer (localement) la solution de (1.14).

Dans le cas où le hamiltonien H est indépendant de v , les variables (x, p) sont solution du *système hamiltonien*

$$(\dot{x}, \dot{p}) = (H_p, -H_x). \quad (1.17)$$

Remarque 1.3 Pour que la solution des courbes caractéristiques permette d'obtenir la fonction $v(x, t)$, pour un instant $\tau > 0$ donné, il faut que l'application $S_{0,t}^x$ qui, à une condition initiale donnée, associe $x(t)$, soit injective pour tout $t \leq \tau$. En général ceci n'est satisfait que pour $t > 0$ assez petit.

1.1.5 Formulation lagrangienne

Présentons maintenant une reformulation lagrangienne des équations hamiltoniennes (1.16). Soit $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $H = H(x, t, v, p)$. Supposons H_{pp} (matrice des dérivées seconde du hamiltonien par rapport à p) *invertible*. Le théorème des fonctions implicites permet d'inverser localement la relation

$$y = H_p(x, t, v, p) \quad (1.18)$$

en $p = \varphi(x, t, v, y)$, pour une certaine fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Le *lagrangien* associé au hamiltonien est défini comme

$$L(x, t, v, y) := p \cdot H_p - H, \quad (1.19)$$

avec $p = \varphi(x, t, v, y)$, c'est à dire

$$\begin{aligned} L(x, t, v, y) &= \varphi(x, t, v, y) \cdot H_p(x, t, v, \varphi(x, t, v, y)) - H(x, t, v, \varphi(x, t, v, y)), \\ &= \varphi(x, t, v, y) \cdot y - H(x, t, v, \varphi(x, t, v, y)). \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y_i} &= \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} y_j + \varphi_i - \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} = \varphi_i = p_i, \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} y_j - \frac{\partial H}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial L}{\partial v} &= \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} y_j - \frac{\partial H}{\partial v} - \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} = -\frac{\partial H}{\partial v}, \end{aligned} \right. \quad (1.20)$$

soit

$$L_y = p; \quad L_x = -H_x; \quad L_v = -H_v. \quad (1.21)$$

Les relations $y = H_p$ et $L_y = p$ signifie que (à (x, t, v) fixé), les applications $p \rightarrow H_p$ et $y \rightarrow L_y$ sont inverses l'une de l'autre; le lagrangien est la transformée de Legendre (voir la section 1.1.6) par rapport à p du hamiltonien.

Le long des courbes caractéristiques, on a avec (1.16)

$$\dot{x} = H_p = y; \quad L_x = -H_x = \dot{p} + H_v p = \frac{d}{dt} L_y - L_v p,$$

d'où l'équation d'Euler-Lagrange généralisée :

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(x, t, v, \dot{x}) - L_x(x, t, v, \dot{x}) - L_v(x, t, v, \dot{x}) v_x = 0. \quad (1.22)$$

Si H ne dépend pas de v , on en déduit (le long des caractéristiques) l'équation classique d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(x, \dot{x}) - L_x(x, \dot{x}) = 0. \quad (1.23)$$

Remarque 1.4 D'après (1.16), le lagrangien est égal à la dérivée de la fonction v le long des courbes caractéristiques, de sorte que, si la condition initiale $v(x, 0)$ est donnée, on a le long de ces courbes

$$v(x, \tau) = v(x, 0) + \int_0^\tau L(x_t, v(x_t, t), \dot{x}_t) dt.$$

On appelle *action* la fonctionnelle $x \mapsto A(x) := \int_0^\tau L(x_t, v(x_t, t), \dot{x}_t) dt$, définie sur l'espace des fonctions de classe C^1 . Reprenant la méthode des variations de Lagrange, on observe que si x et y sont de classe C^1 , avec y_t nulle pour t proche de 0 et τ , et $\sigma \in \mathbb{R}$, alors après une intégration par parties et omettant les arguments de L :

$$A(x + \sigma y) = A(x) - \sigma \int_0^T \left(\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} - L_x - L_v v_x \right) y_t dt + o(\sigma). \quad (1.24)$$

L'équation d'Euler-Lagrange généralisée s'interprète donc comme la stationnarité de l'action (par rapport aux variations de la trajectoire, nulles près des extrémités).

Remarque 1.5 A l'inverse, on peut retrouver les équations de Hamilton à partir de l'équation d'Euler-Lagrange, par des calculs essentiellement similaires à ceux qui précèdent. Puisque $\dot{x} = H_p$, et $p = L_y$, on a

$$H(x, t, v, p) = \dot{x} \cdot L_y - L(x, t, v, y),$$

avec $y = H_p(x, t, v, p)$. Si le hamiltonien (et donc le lagrangien) est indépendant de t et v , son invariance le long des courbes caractéristiques (conséquence de (1.17)) se traduit par l'intégrale première $\dot{x} \cdot L_y - L(x, y)$ (seconde condition de Erdmann).

Exemple 1.6 Soit $x \in \mathbb{R}^3$ la variable de position d'un point matériel de masse m , soumise à des forces dérivant d'une énergie potentielle $E(x)$. Notons $p \in \mathbb{R}^3$ la quantité de mouvement, et définissons le hamiltonien

$$H(x, p) := E(x) + \frac{1}{2}\|p\|^2/m.$$

On reconnaît l'énergie mécanique totale, somme des énergies potentielle et cinétique. Alors $y = H_p = p/m$, et donc, après simplification, il s'avère que le lagrangien

$$L(x, y) = \frac{1}{2}m\|y\|^2 - E(x)$$

est la différence des énergies cinétique et potentielle. Enfin dans l'équation d'Euler-Lagrange

$$0 = \frac{d}{dt}L_y(x, \dot{x}) - L_x(x, \dot{x}) = m\ddot{x} + E'(x),$$

nous reconnaissons le principe fondamental de la dynamique de Newton.

1.1.6 Transformations de contact

Dans cette section f désigne une application de classe C^2 de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R} , dont on notera la dérivée f' . Son graphe est une *hypersurface* qu'on notera ici

$$\sigma^f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; y = f(x)\}. \quad (1.25)$$

En un point (x, y) de σ , l'*hyperplan tangent* a pour équation

$$dy = f'(x)dx = D_1f(x)dx_1 + \cdots + D_n f(x)dx_n \quad (1.26)$$

où on a noté $D_i f(x)$ la i ème dérivé partielle de f , et dx , dy les coordonnées des différentielles des points de l'hyperplan.

Une *transformation ponctuelle* est une application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans lui-même, qui à (x, y) associe

$$X = \phi(x, y); \quad Y = \psi(x, y). \quad (1.27)$$

On se limitera aux applications de classe C^2 . Supposons que, dans les nouvelles coordonnées (X, Y) , l'image de σ^f soit l'hypersurface Σ^F associée à une fonction $Y = F(X)$. Il vient

$$dX = \phi_x(x, y)dx + \phi_y(x, y)dy; \quad dY = \psi_x(x, y)dx + \psi_y(x, y)dy. \quad (1.28)$$

Utilisant (1.26), nous obtenons, pour un petit déplacement (dx, dy) ,

$$dX = (\phi_x(x, y) + \phi_y(x, y)f'(x)) dx; \quad dY = (\psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)f'(x)) dx. \quad (1.29)$$

Si la matrice carrée $(\phi_x(x, y) + \phi_y(x, y)f'(x))$ est inversible, on déduit

$$dY = (\psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)f'(x)) (\phi_x(x, y) + \phi_y(x, y)f'(x))^{-1} dX, \quad (1.30)$$

qui fournit l'équation de l'hyperplan tangent dans les nouvelles coordonnées.

On dira que $(x, y, p) \in \sigma_1$, où $\sigma_1 := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, est un *élément de contact* à σ^f en x si $y = f(x)$ et $p = f'(x)$. Notons

$$\sigma_1^f = \{(x, y, p) \in \sigma_1; \quad y = f(x); \quad p = f'(x)\} \quad (1.31)$$

l'ensemble des éléments de contact de σ^f . On note de même Σ_1 l'ensemble des éléments de contact dans l'espace des $(X, Y, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et, supposant toujours que l'image de σ^f est l'hypersurface associée à une fonction $Y = F(X)$, notons Σ_1^F l'ensemble des éléments de contact de l'hypersurface Σ^F . D'après (1.30), un élément de Σ_1^F est de la forme (X, Y, P) , avec $Y = F(X)$ et

$$P = (\psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)p) (\phi_x(x, y) + \phi_y(x, y)p)^{-1}. \quad (1.32)$$

On peut donc associer à (ϕ, ψ) la *transformation de contact* qui à un point de σ_1 associe un point de Σ_1 (omettant les arguments des fonctions) :

$$(x, y, p) \rightarrow (\phi, \psi, (\psi_x + \psi_y p) (\phi_x + \phi_y p)^{-1}). \quad (1.33)$$

Considérons maintenant un "changement de coordonnées généralisé" dans lequel intervient l'expression du plan tangent :

$$X = \phi(x, y, p); \quad Y = \psi(x, y, p). \quad (1.34)$$

On suppose encore que l'image de σ^f est l'hypersurface Σ^F associée à une fonction $Y = F(x)$, et on note toujours Σ_1^F l'ensemble des éléments de contact de l'hypersurface Σ^F . Pour abrégé les calculs on n'écrira pas dans la suite les arguments des fonctions. Calculons l'hyperplan tangent en un point de Σ^F . Différentiant (1.34), il vient

$$dX = \phi_x dx + \phi_y dy + \phi_p dp; \quad dY = \psi_x dx + \psi_y dy + \psi_p dp. \quad (1.35)$$

Comme $p = f'(x)$, on a $dp = D^2 f(x) dx$, et on sait que $dy = p dx$. On notera $q = D^2 f(x)$. Substituant dans (1.35), il vient, pour un petit déplacement dx ,

$$dX = (\phi_x + \phi_y p + \phi_p q) dx; \quad dY = (\psi_x + \psi_y p + \psi_p q) dx. \quad (1.36)$$

Si $(\phi_x + \phi_y p + \phi_p q)$ est inversible, comme on le supposera dans la suite, on en déduit l'expression du plan tangent dans l'espace (X, Y) , qui est de la forme $dY = P dX$, avec

$$P = (\psi_x + \psi_y p + \psi_p q) (\phi_x + \phi_y p + \phi_p q)^{-1}. \quad (1.37)$$

En général, cette expression dépend donc de la dérivée seconde q , qui est élément de l'ensemble \mathcal{S}^n des matrices symétriques d'ordre n . Appelons *élément de contact du second ordre* un élément de

$$\sigma_2 := \{(x, y, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n\}, \quad (1.38)$$

et notons l'ensemble des élément de contact du second ordre associés à f par

$$\sigma_2^f = \{(x, y, p, q) \in \sigma_2; \ y = f(x); \ p = f'(x); \ q = f''(x)\}. \quad (1.39)$$

On définit de même Σ_2 et Σ_2^f . On dira que (ϕ, ψ) est une *transformation de contact* si, quelle que soit la surface, l'expression du plan tangent est indépendante de la dérivée seconde q . Autrement dit, (ϕ, ψ) est une *transformation de contact* si et seulement si la quantité P donnée dans (1.37) est, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, indépendante de q . C'est bien entendu le cas si (ϕ, ψ) est indépendant de p , ce qui revient à dire que la transformation est ponctuelle.

L'exemple le plus remarquable de transformation de contact non ponctuelle est celui de la *transformation de Legendre*

$$X = p; \quad Y = p \cdot x - y \quad (1.40)$$

où par “ \cdot ” on note le produit scalaire dans \mathbb{R}^n . Explicitant les expressions de (1.36), il vient après simplification

$$dX = dp; \quad dY = x \cdot dp, \quad (1.41)$$

et donc $P = x^\top$ est bien indépendant de q . On voit que la transformation de Legendre est involutive (égale à son inverse) :

$$x = P; \quad y = P \cdot X - Y. \quad (1.42)$$

La transformation de Legendre est un cas particulier de transformation satisfaisant les relations

$$\phi_x + \phi_y p = 0; \quad \psi_x + \psi_y p = 0. \quad (1.43)$$

Dans ce cas, la condition d'inversibilité pour que (1.37) soit défini est que ϕ_p et q soient inversibles. Dans ce cas, on a encore une transformation de contact, puisque, d'après (1.37)

$$P = \psi_p(\phi_p)^{-1}. \quad (1.44)$$

1.2 Bilan et notes

1.2.1 Bilan

Nous avons exposé la *méthode des caractéristiques* pour résoudre une équation aux dérivées partielles non linéaire du premier ordre. On retrouve comme cas particulier les *systèmes hamiltoniens*, et nous avons exposé la *formulation lagrangienne* associée, d'où découle l'*équation d'Euler-Lagrange*. Le passage entre formulations hamiltonienne et lagrangienne est basé sur la transformation de Legendre. Celle-ci est un cas particulier des *transformations de contact* présentées en fin de chapitre.

1.2.2 Notes

Les résultats de ce chapitre sont classiques. On trouvera une présentation des méthodes de caractéristiques ainsi qu'une introduction aux équations aux dérivées partielles du second ordre dans F. John [2]. Le manque de régularité des solutions des équations aux dérivées partielles conduit à des notions de solutions généralisées, au sens des distributions, voir Schwartz [3], ou de viscosité, voir Barles [1].

References

- [1] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, volume 17 of *Mathématiques et Applications*. Springer, Paris, 1994.
- [2] F. John. *Partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [3] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, Paris, 1965.