Documents autorisés : polycopiés du cours de cette année.
Conseils de rédaction : vérifier soigneusement les arguments ; *ne pas négliger des réponses partielles.*

Problème 1 : **Transfert spatial planaire**

On considère le modèle suivant de fusée à poussée et masse constantes (cf Bryson et Ho, p. 59) :

$$\dot{x}(t) = v(t); \quad \dot{y}(t) = w(t); \quad \dot{v}(t) = a(t)\cos\theta(t); \quad \dot{w}(t) = a(t)\sin\theta(t). \tag{1}$$

Ici (x, y) représentent la position, (v, w) la vitesse, a et θ, resp., le module et l'angle de direction de la poussée. De plus $a(t)$ est donnée (cas des réacteurs à poudre), continue, à valeurs strictement positives. On suppose l'état initial y^0 fixé et on modélise les contraintes sur l'état final comme

$$\Phi^E(y(T)) = 0; \quad \Phi^I(y(T)) \leq 0, \tag{2}$$

avec $\Phi = (\Phi^E, \Phi^I)$ à image dans $\mathbb{R}^{n_\Phi}$, les inégalités étant prises pour chaque composante. Le problème est

$$\operatorname{Min} \varphi(y(T)); \quad \text{sous les contraintes (1)-(2).} \tag{3}$$

1/ Formuler le hamiltonien du problème (noter p_x, p_y, p_v, p_w, les composantes de l'état adjoint).

2/ Donner l'expression de la dérivée de l'état adjoint (on ignore pour l'instant les conditions finales et initiales sur l'état adjoint).

3/ En déduire une expression de l'état adjoint à tout instant, en fonction de sa valeur finale.

4/ Donner une expression de la commande θ minimisant le hamiltonien, en fonction de l'état adjoint. On pourra utiliser le fait que, si η et λ sont dans $\mathbb{R}^2$, avec $\lambda \neq 0$, la fonction $\eta \mapsto \eta \cdot \lambda$ atteint sur la sphère unité son minimum en l'unique point $-\lambda/|\lambda|$ (où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne).

5/ (i) Montrer que,si le coût et la contrainte finale sont indépendants de x et v, et si $p_y(T) \neq 0$, alors $\theta(t) = \pm\pi/2$ p.p.
(ii) Détailler le cas du problème de maximisation de $y(T)$ avec état final libre.

6/ Dans le cas général, si $p_v(t)$ n'est pas identiquement nulle, montrer que $\tan\theta = p_w/p_v$, et que $\tan\theta$ est un quotient de fonctions affines du temps.

7/ On suppose le coût et la contrainte finale indépendants de x. Montrer que $\tan\theta$ est une fonction affine du temps (loi de la tangente linéaire), soit pour un certain $c \in \mathbb{R}$:

$$\tan\theta = \tan\theta(0) - ct, \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \tag{4}$$

8/ On ajoute la contrainte sur l'état (altitude positive) :

$$y(t) \geq 0, \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \tag{5}$$

Quel est l'ordre de cette contrainte ?

9/ Reformuler la dynamique adjointe (prenant en compte la contrainte sur l'état) ; peut-on encore l'intégrer ? On pourra noter par $M(t)$ une primitive de $\mu(t)$ (le multiplicateur associé à la contrainte sur l'état) nulle en T.

10/ Analyser ce qui se passe (dynamique adjointe, densité de la mesure) sur un arc frontière (intervalle de temps ouvert (τ', τ'') sur lequel la contrainte est active).

11/ Analyser les conditions de jonction en τ', supposant $\tau' \in]0, T[$ et la commande continue. On supposera à titre d'exemple x croissant.

CORRIGÉ

Problème 1 : **Transfert spatial planaire**

1/ Le hamiltonien est

$$H = p_x v + p_y w + a(t)(p_v \cos\theta + p_w \sin\theta). \tag{6}$$

2/ On égale $-\dot{p}$ à la dérivée partielle du hamiltonien par rapport à l'état, soit

$$-\dot{p}_x(t) = -\dot{p}_y(t) = 0; \quad -\dot{p}_v(t) = p_x(t); \quad -\dot{p}_w = p_y. \tag{7}$$

3/ Il vient donc

$$\begin{cases} p_x(t) & = p_x(T); \;\; p_y(t) = p_y(T); \\ p_v(t) & = p_v(T) + (T-t)p_x(T); \\ p_w(t) & = p_w(T) + (T-t)p_y(T). \end{cases} \tag{8}$$

4/ Comme $a(t)$ est à valeurs strictement positives, $\theta(t)$ doit p.p. en temps minimiser $h(\theta) := p_v \cos\theta + p_w \sin\theta$. Si $(p_v, p_w) = 0$ la valeur de θ est indéterminée, sinon le minimum est obtenu quand $(\cos\theta, \sin\theta)$ est le vecteur unitaire de direction opposée à (p_v, p_w), soit

$$(\cos\theta, \sin\theta) = -(p_v, p_w)/\sqrt{p_v^2 + p_w^2}. \tag{9}$$

5/ (i) On a alors $p_x(T) = p_v(T) = 0$, donc $p_v(t) = 0$ et $p_w(t) \neq 0$ p.p. On conclut avec la question précédente que $\theta = \pi/2$ si $p_w < 0$, et $\theta = \pi/2$ si $p_w > 0$. Or $p_w(t) \neq 0$ p.p. puisque sa dérivée $-p_y(T)$ est non nulle.
(ii) On a alors pour coût final $-y(T)$, donc $p_y(T) = -1$, $p_w(T) = 0$, et $p_w(t) = t - T < 0$ d'où $\theta(t) = \pi/2$ comme on pouvait s'y attendre.

6/ Conséquence immédiate du résultat précédent (si dénominateur non nul) :

$$\tan\theta = \frac{p_w}{p_v} = \frac{p_w(T) + (T-t)p_y(T)}{p_v(T) + (T-t)p_x(T)} \tag{10}$$

7/ On a alors $p_x(T) = 0$, donc avec le résultat précédent :

$$\tan\theta = \frac{p_w}{p_v} = \frac{p_w(T) + (T-t)p_y(T)}{p_v(T)} \tag{11}$$

d'où le résultat avec $c := p_y(T)/p_v(T)$.

Remarque Dans le cas où $a(t)$ est constante, on renvoie à l'analyse des extrémales du livre de Bryson et Ho, Applied Optimal Control, ch. 2, section 2.4.

8/ La contrainte sur l'état, $g(y) = -y$ est du second ordre puisque $g^{(1)}(y) = -w$ et $g^{(2)}(y) = -a(t)\sin\theta(t)$, donc $D_\theta g^{(2)}(y) = -a(t)\cos\theta(t)$ n'est pas identiquement nulle.

9/ La contrainte sur l'état ne dépend pas de x, v et w ; on a donc toujours

$$-\dot{p}_x(t) = 0; \quad -\dot{p}_v(t) = p_x(t); \quad -\dot{p}_w(t) = p_y(t). \tag{12}$$

En revanche on a $-\mathrm{d}p_y(t) = -\mathrm{d}\mu$ et on peut donc intégrer :

$$\begin{aligned} p_x(t) & = p_x(T); \\ p_v(t) & = p_v(T) + (T-t)p_x(T); \\ p_y(t) & = p_y(T) + \mu(t); \\ p_w(t) & = p_w(T) + (T-t)p_y(T) - M(t). \end{aligned} \tag{13}$$

10/ Sur (τ', τ'') on a $0 = \ddot{y}(t) = a(t) \sin \theta(t)$ donc $\theta(t) \in \{0, \pi\}$. D'après le PMP, on a

$$0 = p_w(t) = \dot{p}_w(t) = -p_y(t) \quad \text{p.p. sur } (\tau', \tau''), \tag{14}$$

et donc $\mu(t) = -p_y(T)$ est constant sur cet arc : μ a une densité nulle. Comme $p_x(t) = p_x(T)$, si cette quantité n'est pas nulle, θ est constant (égal à 0 ou π).

11/ D'après un théorème du cours, en tout $\tau \in]0, T[$, notant $\nu := [\mu(\tau)]$, comme la commande est continue, on a

$$\bar{H}_{uu}(\tau)[\dot{\bar{u}}(\tau)] = -\nu \nabla_u \bar{g}^{(2)}(\tau). \tag{15}$$

Ici $u = \theta$, $g^{(1)} = -w$ et $g^{(2)} = -a(t) \sin \theta$; comme x est croissant, $\theta = 0$; on a donc $g^{(2)}_\theta = -a(t)$. Par ailleurs, comme $\theta = 0$:

$$H_{uu} = -a(t)(p_v \cos \theta + p_w \sin \theta) = -a(t) p_v. \tag{16}$$

Il vient donc $p_v[\dot{\theta}] = -\nu$. D'après la contrainte sur l'état, $[\dot{\theta}] \geq 0$ et donc $p_v < 0$ si $\nu > 0$. Comme x est croissant on s'attendait bien à avoir $p_v \leq 0$ d'après le PMP et les signes sont donc cohérents.

1/