J F BONNANS & E CASAS

Contrôle de systèmes elliptiques semilinéaires comportant des contraintes sur l'état

RESUME

Nous étudions le problème du contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations semilinéaires de type elliptique, lorsque l'état est soumis à des contraintes intégrales ou ponctuelles. Les conditions d'optimalité sont obtenues sous une forme non qualifiée. Des résultats de qualification sont donnés. En particulier, un lemme sur la stricte positivité des solutions lorsque le second membre est positif permet d'appliquer un critère général de qualification dans certains cas. L'emploi d'espaces adaptés permet d'étudier le cas des contraintes ponctuelles sur le gradient.

ABSTRACT

We study the control problem of systems governed by semi-linear elliptic equations, when the state is subject to integral or punctual constraints. The optimality conditions are obtained in a non-qualified form. Some qualification results are given. Specifically, a lemma on the strict positivity of solutions when the right-hand side of the equation is positive allows us to use a general criterion for qualification in some cases. The use of adapted spaces allows us to study the case of punctual constraints on the gradient.

I. Introduction

Des problèmes de contrôle de systèmes linéaires de type elliptique soumis à des contraintes sur l'état sont étudiés dans J.L. Lions [10], en l'absence de contraintes sur le contrôle. J. Mossino [11] étudie par une méthode de dualité le cas de contraintes ponctuelles sur le gradient de l'état, sans obtenir de conditions d'optimalité dans le cas où le contrôle est soumis à des contraintes. Le cas des contraintes ponctuelles sur l'état, en présence de contraintes sur le contrôle, est étudié par E. Casas [6], qui obtient l'existence du multiplicateur dans un espace de mesures et de l'état adjoint dans un espace du type $W^{1,s}(\Omega)$. Des résultats détaillés de régularité du contrôle optimal et de l'état associé sont analysés dans E. Casas [7]. Il est établi dans E. Casas [8] qu'une discrétisation par éléments finis de ce problème permet de calculer une approximation du contrôle optimal, et aussi du multiplicateur associé à la contrainte sur l'état.

Dans le cas de systèmes non linéaires, des résultats généraux sont obtenus dans J.F. Bonnans, E. Casas [3], et appliqués à des systèmes de type elliptique, parabolique ou hyperbolique. Nous reprenons ici des résultats généraux de [3] et les complétons dans le cas du contrôle distribué d'un système elliptique, en particulier par de nouveaux résultats de qualification. Par ailleurs, notons que le cas du système parabolique non linéaire est détaillé dans J.F. Bonnans, E. Casas [4], [5], où sont donnés des résultats de régularité du contrôle optimal.

Le papier est organisé comme suit. La partie II donne un résultat abstrait d'existence de multiplicateurs, sous une forme non qualifiée. Des critères de qualification sont donnés. La partie III donne des résultats d'existence d'un contrôle optimal pour un problème de contrôle d'un système elliptique. On envisage ensuite différents cas particuliers : le cas des contraintes intégrales est étudié en IV, celui des contraintes ponctuelles en V. Dans ces deux cas, la qualification du problème est obtenue en faisant certaines hypothèses sur les contraintes auxquelles est soumis le contrôle. Le cas des contraintes ponctuelles sur le gradient de l'état est étudié en VI par une méthode d'espaces adaptés.

II. Un résultat abstrait d'existence de multiplicateur

Donnons-nous

- X, W des espaces de Banach,
- K_1 un convexe fermé non vide de X,
- K_2 un convexe fermé d'intérieur non vide de W,
- f une application de X dans $\underline{R}$,
- g une application de X dans W,
- h une application de X dans $\underline{R}^n$, $n \in \underline{N}$ donné.

Nous rappelons qu'une application $g : X \to W$ est strictement dérivable en x si

$$\lim_{\substack{y \to x \\ t \to 0}} \frac{g(y+tz) - g(y)}{t} = Dg(x)z,$$

où $Dg(x) \in L(X,W)$, la convergence étant uniforme en y sur tout compact.

<u>REMARQUE 2.1</u>. Si g est continûment Gâteaux-différentiable en x, g est strictement dérivable en x (F.H. Clarke [9], p. 32). ▪

Considérons le problème

$$\operatorname{Min} f(x), \quad x \in K_1, \quad g(x) \in K_2, \quad h(x) \equiv 0. \tag{2.1}$$

Nous notons ∂ le sous-différentiel au sens de l'analyse convexe et ∂_c le gradient généralisé de F.H. Clarke [9].

<u>THEOREME 2.1</u>. Soit $\bar{x}$ une solution de (2.1). Nous supposons f et h lipschitziens et g strictement dérivable au voisinage de $\bar{x}$. Alors il existe $\alpha \geqslant 0$, $\lambda \in W'$ et $\mu \in \underline{R}^n$ tels que

$$\alpha + \|\lambda\|_{W'} + \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| > 0, \tag{2.2}$$

$$\langle \lambda, w - g(\bar{x}) \rangle_{W'W} \leqslant 0, \quad \forall w \in K_2, \tag{2.3}$$

$$\alpha \partial_c f(\bar{x}) + [Dg(\bar{x})]^* \lambda + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, \partial_c \, h_i(\bar{x}) + \partial I_{K_1}(\bar{x}) \ni 0 \text{ dans } X'. \; ▪ \tag{2.4}$$

<u>REMARQUE 2.2</u>. Naturellement, en l'absence de contraintes d'égalité, les résultats précédents restent valables en retirant les termes correspondant à ces contraintes.

Avant de démontrer le théorème, donnons un lemme dont on trouvera la démonstration dans J.F. Bonnans, E. Casas [3].

<u>LEMME 2.1</u>. Soit K un convexe fermé de W tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$. Soit l'application $\rho : W \to \underline{R}$ définie par

$$\rho(w) = \inf \{\mu \geqslant 0;\ w \in \mu K\}.$$

Alors

$$\rho(tw) = t\,\rho(w),\ \forall t \geqslant 0,\ w \in W, \tag{2.5}$$

$$\rho(w) \leqslant 1 \Leftrightarrow w \in K, \tag{2.6}$$

$$\rho(w) < 1 \Leftrightarrow w \in \mathring{K},\ \rho(w) = 1 \Leftrightarrow w \in \partial K. \tag{2.7}$$

De plus ρ est sous-linéaire, convexe, lipschitzienne et

$$w \in \partial K \Rightarrow \partial\rho(w) \not\ni 0 \text{ et } \partial\rho(W) \subset \partial I_K(w). \tag{2.8}$$

Démonstration du théorème 2.1. Soit w_0 dans $\mathring{K}_2$. On applique le lemme 2.1 avec $K = K_2 - w_0$. En raison de (2.6), il vient

$$\rho(w - w_0) \leqslant 1 \Leftrightarrow w \in K_2.$$

Un problème équivalent à (2.1) est donc

$$\text{Min } f(x),\ x \in K_1,\ \rho(g(x) - w_0) - 1 \leqslant 0,\ h(x) \equiv 0. \tag{2.9}$$

Puisque f, ρ et h sont lipschitziennes au voisinage de $\bar{x}$, on déduit d'un résultat de F.H. Clarke (cf. [9]) que si $\bar{x}$ est solution de (2.1), donc de (2.9), il existe $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\mu \in \underline{R}^n$ tels que

$$\alpha + \beta + \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| > 0,\ \beta = 0 \text{ si } \rho(g(\bar{x}) - w_0) < 1,$$

et

$$\alpha\partial_c f(\bar{x}) + \beta\partial_c(\rho(g(\bar{x}) - w_0)) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, \partial_c\, h_i(\bar{x}) + \partial I_{K_1}(\bar{x}) \ni 0 \text{ dans } X'.$$

Or g(x) est strictement différentiable au voisinage de $\bar{x}$, et ρ est convexe et continue, donc régulière au sens de [9]; d'où (cf. [9], p. 45)

$$\partial_c(\rho(g(\bar{x}) - w_0)) = [D\, g(\bar{x})]^* \partial_c \rho(g(\bar{x}) - w_0).$$

De plus, ρ étant convexe et lipschitzienne, $\partial_c \rho$ coïncide avec le sous différentiel de ρ ([9], p. 36); donc il existe $\lambda \in \partial\rho(g(\bar{x}) - w_0)$ vérifiant (2.4), avec $\lambda = 0$ si $g(\bar{x}) \in \mathring{K}_2$. Si $g(\bar{x}) \in \partial K$, $\lambda \in \partial\rho(g(\bar{x}) - w_0)$ est d'après (2.8) un élément non nul de ∂I_K en $g(\bar{x}) - w_0$, donc de ∂I_{K_2} en $g(\bar{x})$; d'où (2.3) et, avec (2.10), (2.2). La conclusion du théorème s'ensuit. ■

Il est utile d'obtenir des conditions sous lesquelles le problème est normal, au sens où la conclusion du théorème 2.1 est obtenue avec $\alpha = 1$. Nous allons donner deux indications dans ce sens; l'une est du type de la condition de Slater; l'autre est obtenue en considérant un problème obtenu par une perturbation de K_2, et utilise les résultats de F.H. Clarke [9]. Les résultats nécessitent en particulier des hypothèses supplémentaires sur h.

THEOREME 2.2.

(i) Si h est strictement dérivable, si $\{\nabla h_i(\bar{x})\}$ est linéairement indépendant et s'il existe $x_0 \in \mathring{K}_1$ (K_1 si aucune contrainte d'égalité n'est présente) tel que

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ \ g(\bar{x}) + Dg(\bar{x})(x_0 - \bar{x}) \in \mathring{K}_2, \\ &\text{(ii)}\ \ \langle \nabla h_i(\bar{x}),\ x_0 - \bar{x} \rangle = 0,\ i = 1 \text{ à } n, \end{aligned} \tag{2.11}$$

la conclusion du théorème 3.1 est obtenue avec $\alpha = 1$.

(ii) Supposons qu'aucune contrainte d'égalité n'est présente. Soit w_0 dans $\mathring{K}_2$. Considérons pour $\gamma \in \underline{R}^+$ le convexe perturbé

$$K_{2\gamma} = w_0 + \gamma(K_2 - w_0),$$

et soit la famille de problèmes

$$\text{Min } f(x);\ x \in K_1,\ g(x) \in K_{2\gamma}, \tag{2.12}$$

qui se réduit à (2.1) lorsque $\gamma = 1$. Soit a, b tels que $0 \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et que le problème (2.12) possède au moins une solution si $\gamma \in [a, b[$. Alors, pour presque tout $\gamma \in [a, b[$, le problème (2.12) est normal. ■

<u>Démonstration</u>

(i) Si α est nul, nous déduisons de (2.4) et (2.11ii) que, en particulier :

$$<\lambda, Dg(\bar{x}) \ (x_0 - \bar{x})>_{W'W} \geqslant 0. \tag{2.13}$$

D'autre part, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|w\|_W < \varepsilon \Rightarrow g(\bar{x}) + Dg(\bar{x}) \ (x_0 - \bar{x}) + w \in \mathring{K}_2 \ ,$$

donc avec (2.3)

$$<\lambda, Dg(\bar{x})(x_0 - \bar{x}) + w>_{W'W} \leqslant 0, \ \forall w \in W, \ \|w\|_W \leqslant \varepsilon,$$

Si $\|\lambda\|_{W'} \neq 0$ (ce sera le cas d'après (2.2) si aucune contrainte d'égalité n'est présente) il s'ensuit que

$$<\lambda, Dg(\bar{x})(x_0 - \bar{x})>_{W'W} < 0,$$

en contradiction avec (2.13). Si $\|\lambda\|_{W'} = 0$, on déduit de (2.2) que μ n'est pas nul et de (2.4) que pour un certain $q \in \partial I_{K_1}(\bar{x})$:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \ \nabla h_i(\bar{x}) + q = 0.$$

Donc q est non nul et $<q, x_0 - \bar{x}> < 0$ puisque $x_0 \in \mathring{K}_1$, ce qui est impossible d'après la relation ci-dessus.

(ii) Le problème (2.12) équivaut à

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}\ f(x), \\ &x \in K_1, \ \rho(g(\bar{x}) - w_0) \leqslant \gamma. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Soit x_γ une solution de (2.14) et soit $\phi : [a,b[\to \underline{R}$ définie par

$$\phi(\gamma) = f(x_\gamma).$$

La fonction ϕ est décroissante en finie en tout point. On déduit alors de F.H. Clarke [14], la normalité de (2.14) pour presque tout γ. En reprenant la démonstration du théorème 4.1, on vérifie que la normalité de (2.12) équivaut à celle de (2.14), d'où le théorème. ∎

III. Controle d'un système non linéaire de type elliptique comportant des contraintes ponctuelles sur l'état

Soit Ω un ouvert connexe de $\underline{R}^n$, $n \leqslant 3$, de frontière Γ régulière. Soit $f : R \to \underline{R}$ de classe C^1, monotone croissante. Considérons le système

$$\begin{aligned} & -\Delta y + f(y) = u \text{ dans } \Omega, \\ & y = 0 \text{ sur } \Gamma . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Le résultat suivant est bien connu :

PROPOSITION 3.1. Pour tout $u \in L^2(\Omega)$, l'équation (3.1) admet une solution unique y_u dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. ∎

Notons l'inclusion $H^2(\Omega) \overset{n\leqslant 3}{\subset} C(\bar{\Omega})$. L'état y_u est donc une fonction continue de x. Soit $N \geqslant 0$ et y_d dans $L^2(\Omega)$. Posons

$$J(u) = \frac{N}{2} \int_\Omega (u(x))^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega (y_u(x) - y_d(x))^2 \, dx. \tag{3.2}$$

Soit K (resp. K_Y) un ensemble convexe fermé de $L^2(\Omega)$ (resp. $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$). Considérons le problème

$$\min J(u);\ u \in K,\ y_u \in K_Y. \tag{3.3}$$

On obtient par le procédé habituel de passage à la limite dans une suite minimisante le

THEOREME 3.1. Si'il existe $u_0 \in K$ tel que $y_{u_0} \in K_Y$, et si

$N > 0$ ou K est un borné de $L^2(\Omega)$,

alors le problème (3.3) admet (au moins) un contrôle optimal. ■

En vue d'exprimer les conditions nécessaires d'optimalité, donnons deux resultats concernant la dépendance de l'état par rapport au contrôle.

PROPOSITION 3.2. L'application $u \to y_u$ est de classe C^1 de $L^2(\Omega)$ vers $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et sa dérivée z dans la direction v est solution de

$$\begin{aligned} & -\Delta z + f'(y_u)z = v \text{ dans } \Omega, \\ & z = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Cette proposition se démontre en utilisant le théorème des fonctions implicites.

PROPOSITION 3.3. Soit u, v dans $L^2(\Omega)$ tels que $u \geqslant v$ et $u \neq v$. Alors $y_u > y_v(x)$, $\forall x \in \Omega$. ■

Démonstration

Posons

$$a(x) = \begin{cases} (f(y_u(x)) - f(y_v(x)))/(y_u(x) - y_v(x)) & \text{si } y_u(x) \neq y_v(x), \\ f'(y_u(x)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La continuité de y_u, y_v et de f' impliquent celle de $a(x)$. De plus, $a(x)$ est positive et $w = y_u - y_v$ vérifie

$$\begin{aligned} & -\Delta w + a(x)w = u - v \text{ dans } \Omega, \\ & w = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{aligned}$$

La positivité stricte de w (qui donne la conclusion) est une conséquence du lemme suivant. ■

LEMME 3.1. Soit $a(x)$ (resp. $u_0(x)$) un élément positif de $L^\infty(\Omega)$. On suppose u_0 non identiquement nul. Alors l'équation

$$\begin{aligned} -\Delta w + a(x)w &= u_0 \text{ dans } \Omega, \\ w &= 0 \text{ sur } \Gamma, \end{aligned} \tag{3.6}$$

admet une solution w, continue, strictement positive sur Ω.

Démonstration

On sait que (3.6) admet une solution w continue, positive, non identiquement nulle. Soit $x_0 \in \Omega$ tel que $w(x_0) > 0$ et supposons l'existence de $x_1 \in \Omega$ tel que $w(x_1) = 0$. Soit $\Omega_1 \subset \Omega$ un ouvert connexe de frontière Γ_1 régulière telle que $x_0 \in \Gamma_1$ et $x_1 \in \Omega_1$. Soit w_1 la solution dans $H^2(\Omega_1)$ de

$$\begin{aligned} -\Delta w_1 + a(x)\, w_1 &= 0 \text{ dans } \Omega_1, \\ w_1 &= w \text{ sur } \Gamma_1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

D'après un corollaire de l'inégalité de Harnack (G. Stampacchia [12]) w_1 est identiquement nul ou strictement positif sur Ω_1. Mais il ne peut être nul d'après la condition aux limites de (3.7). La contradiction est obtenue en utilisant le principe du maximum qui implique que $w_1 \leq w$ sur Ω_1 et en particulier $w_1(x_1) \leq w(x_1) = 0$. ∎

Etudions maintenant les conditions d'optimalité en considérant quelques cas particuliers de contraintes sur l'état.

IV. Le cas des contraintes intégrales sur l'état

Nous supposons ici que, pour $\delta > 0$ donné :

$$K_Y = \{y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega |y(x)|\, dx \leq \delta\}.$$

Pour éviter d'utiliser l'espace dual de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, posons

$$B_\delta = \{z \in L^1(\Omega)\ ;\ \|z\|_{L^1(\Omega)} \leq \delta\} .$$

CENTRE DE DOCUMENTATION INRIA

Le problème de contrôle peut alors s'écrire

$$\text{Min } J(u) \ ; \ u \in K, \ y_u \in B_\delta. \tag{4.1}$$

Les hypothèses du théorème 2.2 sont vérifiées avec $X = L^2(\Omega)$, $W = L^2(\Omega)$, $K_1 = K$, $K_2 = B_\delta$. On en déduit le

THEOREME 4.1. Pour toute solution $\bar{u}$ du problème (4.1), il existe $\bar{\mu}$ dans $L^\infty(\Omega)$, $\bar{p}$ et $\bar{q}$ dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $\alpha \geq 0$ tels que (nous notons $\bar{y} = y_{\bar{u}}$) :

$$\alpha + \|\bar{p}\| > 0, \quad \int_\Omega \bar{\mu}(z - \bar{y})dx \leq 0, \ \forall z \in B_\delta,$$

$$-\Delta\bar{p} + f'(\bar{y})p = \bar{\mu} \text{ dans } \Omega, \qquad -\Delta\bar{q} + f'(\bar{y})\bar{q} = \bar{y} - y_d \text{ dans } \Omega,$$
$$\bar{p} = 0 \text{ sur } \Gamma, \qquad \bar{q} = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

et

$$\int_\Omega [\bar{p} + \alpha(N\bar{u} + \bar{q})](v - \bar{u}) \, dx \geq 0, \ \forall v \in K. \quad ■$$

Démonstration

On sait que l'équation en $\bar{q}$ est bien posée et qu'elle fournit l'expression du gradient du critère. On applique alors le théorème 2.1 avec $g(u) = y_u$, en notant que la non nullité de $\bar{\mu}$ équivaut à celle de $\bar{p} = [\partial g/\partial u(\bar{u})]^* \bar{\mu}$. Enfin on interprète $\bar{p}$ comme la solution d'un problème aux limites. ■

REMARQUE 4.1.
(i) Soit s l'application de $\underline{R} \to 2^{\underline{R}}$ définie par

$$s(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0, \\ [-1,+1] & \text{si } t = 0, \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

On sait qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\bar{\mu}(x) \in \lambda s(y(x))$, p.p. $x \in \Omega$.

(ii) D'après les résultats de [2], $\bar{p}$ est dans $W^{2,s}(\Omega)$ pour tout $s \geq 1$. ■

Intéressons nous maintenant à la question de la qualification du problème

$(\alpha = 1)$.

THEOREME 4.2.

(i) Supposons l'hypothèse (3.4) vérifiée ainsi que l'existence d'un contrôle admissible pour $\delta = \delta_0$. Alors le problème (4.1) admet une solution pour tout $\delta \geqslant \delta_0$ et il est qualifié $(\alpha = 1)$ pour presque tout $\delta \geqslant \delta_0$.

(ii) Supposons f (donc l'équation d'état) linéaire. Alors si $0 \in K$, le problème est qualifié.

(iii) Si $K = L^2(\Omega)$ (pas de contraintes sur le contrôle) le problème est qualifié. ∎

Démonstration

(i) On applique le point (ii) du théorème 2.2.

(ii) On applique le point (i) du théorème 2.2.

(iii) Si $\alpha = 0$, on déduit de (4.2) que $\bar{p} = 0$, en contradiction avec la conclusion du théorème. ∎

Naturellement, la qualification du problème est difficile à vérifier si on a à la fois une équation d'état non linéaire et des contraintes sur le contrôle. Voici un résultat partiel dans ce sens.

THEOREME 4.3. On suppose que $f(0) = 0$ et

$$K = \{u \in L^2(\Omega) ;\ 0 \leqslant u(x) \leqslant \beta,\ \text{p.p. } x \in \Omega\} ,$$

avec $0 < \beta \leqslant +\infty$. Alors le problème (4.1) est qualifié. ∎

Démonstration

Si $\bar{u} = 0$, le résultat est trivial; sinon, d'après la proposition 3.3, on a $\bar{y}(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$. On en déduit que $\bar{\mu}$ est une constante positive (cf. remarque 2.1.i), strictement positive si $\alpha = 0$. Dans ce cas, d'après le lemme 3.1, $\bar{p}$ est strictement positif sur Ω. De (4.2) on déduit alors que $\bar{u} = 0$ d'où une contradiction. ∎

REMARQUE 4.2. Si le problème est qualifié ($\alpha = 1$) et si $N > 0$ on déduit de (4.2) que $\bar{u} = P_K(-\frac{1}{N}(\bar{p} + \bar{q}))$. Ceci, joint à des hypothèses sur K, permet d'obtenir des résultats de régularité du contrôle optimal. Ainsi, dans l'exemple précédent, $\bar{u}$ est dans $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ et y est dans $H^3(\Omega)$. Pour d'autres exemples, voir E. Casas [7]. ■

V. Le cas des contraintes ponctuelles sur l'état

Envisageons maintenant le cas où, pour $\delta > 0$ donné

$$K_Y = \{Y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) ;\ |y(x)| \leq \delta,\ \forall x \in \Omega\}.$$

Soit $C_0(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$, nulles sur Γ, muni de la norme du maximum. Posons

$$B_\delta = \{z \in C_0(\bar{\Omega}),\ |z(x)| \leq \delta,\ \forall x \in \Omega\},$$

et écrivons le problème de contrôle comme

$$\operatorname{Min} J(u);\ u \in K,\ y_u \in B_\delta. \tag{5.1}$$

Notons $M(\Omega)$ l'espace des mesures de Borel réelles et régulières sur Ω. C'est le dual de $C_0(\bar{\Omega})$. L'application du théorème 2.1 avec $X = L^2(\Omega)$, $W = C_0(\bar{\Omega})$, $K_1 = K$, $K_2 = B_\delta$ donne le

THEOREME 5.1. A toute solution $\bar{u}$ du problème (5.1) sont associés $\bar{\mu}$ dans $M(\Omega)$, $\bar{p}$ dans $W_0^{1,s}(\Omega)$ pour tout $s \in [1, n/(n-1)[$, $\bar{q}$ dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, et $\alpha \geq 0$ tels que

$$\alpha + \|\bar{p}\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} > 1 ; \tag{5.2}$$

$$\int_\Omega (z - \bar{y})\,d\bar{\mu} \leq 0,\ \forall z \in B_\delta, \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} -\Delta\bar{p} + f'(\bar{y})\bar{p} &= \bar{\mu} \text{ sur } \Omega, \\ \bar{p} &= 0 \text{ sur } \Gamma, \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} -\Delta\bar{q} + f'(\bar{y})\bar{q} &= \bar{y} - y_d \text{ sur } \Omega, \\ \bar{q} &= 0 \text{ sur } \Gamma, \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\int_\Omega [\bar{p} + \alpha(N\bar{u} + \bar{q})]\,(v-\bar{u})\,dx \geq 0, \quad \forall v \in K. \quad ■ \tag{5.6}$$

Démonstration

Elle est identique à celle du théorème 4.1. On sait que $\bar{p} \in L^2(\Omega)$ et $-\Delta\bar{p} \in M(\Omega)$; la régularité de $\bar{p}$ se déduit alors de E. Casas [7] ou G. Stampacchia [12]. ■

REMARQUE 5.1. La décomposition de Jordan de μ en $\mu^+ - \mu^-$ vérifie : μ^+ (resp. μ^-) a pour support $\{x \in \Omega,\ y(x) = 1 \text{ (resp. } -1)\}$ (voir à ce sujet E. Casas [7]).

Etudions maintenant la question des conditions de qualification. L'analogue du théorème 4.2 s'obtient sans difficulté. Nous reprenons le cas où K est donné par (4.2).

THEOREME 5.2. Nous supposons que $f(0) = 0$ et que K est donné par (4.2), avec $0 < \beta \leq +\infty$. Alors le problème (5.1) est qualifié. ■

Démonstration

Si $\bar{u} = 0$, le résultat est vrai. Sinon, soit z la solution du problème

$$\begin{aligned} -\Delta z + f'(\bar{y})z &= \bar{u} \text{ sur } \Omega, \\ z &= 0 \text{ sur } \Gamma. \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.1, $z(x) > 0$ pour tout x de Ω. Comme $\bar{y}$ est positif, on en déduit que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $|\bar{y}(x) - \varepsilon z(x)| < 1$ pour tout x de Ω, d'où :

$$\exists\, \gamma < 1;\ |\bar{y}(x) - \varepsilon z(x)| \leq \gamma, \quad \forall x \in \Omega.$$

On peut alors appliquer le point (i) du théorème 2.2, avec $v = (1-\varepsilon)\bar{u}$, qui donne le résultat. ■

REMARQUE 5.2. Dans l'exemple précédent, de la qualification du problème et de (5.6) on déduit que si $N > 0$, $\bar{u}$ est dans $W_0^{1,s}(\Omega)$ pour $s < n/(n-1)$, donc $\bar{y}$ est dans $W^{3,s}(\Omega)$ d'après [2]. ■

VI. Le cas des contraintes ponctuelles sur le gradient

Nous supposons ici que, $\| \ \|$ étant une norme donnée de $\underline{R}^n$:

$$K_Y = \{y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\}; \quad \|\nabla y(x)\| \leq \delta, \text{ p.p. } x \in \Omega\}. \tag{6.1}$$

Considérons donc

$$B_\delta = \{z \in L^\infty(\Omega)^n, \ \|z(x)\| \leq \delta, \text{ p.p. } x \in \Omega\} ,$$

et écrivons le problème de contrôle sous la forme

$$\min J(u); \ u \in K, \ \nabla y_u \in B_\delta .$$

La difficulté vient ici de ce que l'application $u \to \nabla y_u$ n'est pas continue de $L^2(\Omega)$ vers $L^\infty(\Omega)^n$. Il est donc nécessaire de choisir un cadre fonctionnel spécialement adapté au problème.

Pour tout u de $L^2(\Omega)$, appelons z_u la solution de

$$-\Delta z = u \text{ dans } \Omega,$$
$$z = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Pour que l'application $u \to \nabla y_u$ soit de classe C^1, à image dans $L^\infty(\Omega)^n$, on introduit les espaces adaptés

$$Y = \{y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \ \nabla y \in L^\infty(\Omega)^n\},$$

$$U = \{u \in L^2(\Omega) \ ; \ z_u \in Y\}.$$

Munis de la norme du graphe, Y et U sont des espaces de Banach.

REMARQUE 6.1. Pour $p > n$, $L^p(\Omega) \subset U$; donc U est dense dans $L^2(\Omega)$. ∎

Les espaces U et Y sont bien adaptés à notre problème, en effet :

LEMME 6.1. On a

$$\{u \in U\} \Leftrightarrow \{\nabla y_u \in L^\infty(\Omega)^n\},$$

et l'application $u \to y_u$ est de classe C^1 de U vers $L^\infty(\Omega)^n$. ∎

Démonstration

Soit $w = z_u - y_u$. Il vient

$$-\Delta w = f(y_u) \text{ dans } \Omega,$$
$$w = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Puisque $f(y_u)$ est continue, w est donc dans $W^{2,s}(\Omega)$ pour tout $s \in [1,+\infty[$, d'où $\nabla w \in W^{1,s}(\Omega)^n \underset{\subset}{\overset{s>n}{}} C(\bar{\Omega})^n$. La régularité de l'application $u \to y_u$ s'obtient en appliquant le théorème des fonctions implicites à

$$F : Y \times U \to U,$$
$$(y,u) \to -\Delta y + f(y) - u.$$

On vérifie que F est de classe C^1. Il faut ensuite établir l'existence d'une solution unique dans Y, de l'équation

$$-\Delta z + f'(\bar{y}) z = v \text{ dans } \Omega,$$
$$z = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

L'appartenance de Δz à U implique celle de z à Y. ∎

Appliquons maintenant le théorème 2.1 au problème

$$\min J(u) \ ; \ u \in K \cap U, \ \nabla y_u \in B_\delta. \tag{6.3}$$

Nous en déduisons le

THEOREME 6.1. Si l'hypothèse (6.1) est vérifiée, à toute solution $\bar{u}$ de (6.3) sont associées $\mu \in [L^\infty(\Omega)^n]'$, $\bar{p} \in U'$, $\bar{q} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, et $\alpha \geq 0$ tels que

$$\alpha + \|\bar{p}\|_{U'} > 0; \tag{6.4}$$

$$<\bar{\mu}, z - \nabla\bar{y}> \leq 0, \ \forall z \in B_\delta, \tag{6.5}$$

$$<\bar{p}, \ -\Delta z + f'(\bar{y})z>_{U'U} = <\bar{\mu}, \nabla z>, \ \forall z \in Y, \tag{6.6}$$

$$\left.\begin{aligned} & -\Delta\bar{q} + f'(\bar{y})\bar{q} = \bar{y} - y_d \text{ dans } \Omega, \\ & \bar{q} = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{aligned}\right. \tag{6.7}$$

et

$$<\bar{p}, \ v - \bar{u}> + \alpha \int_\Omega (N\bar{u} + \bar{q})(v - \bar{u})dx \geq 0, \ \forall v \in K \cap U. \quad \blacksquare$$

Démonstration

Le seul point délicat est de montrer que $\bar{p} \neq 0$ si $\bar{\mu} \neq 0$. Il suffit de prendre $z = \bar{y}$ dans (6.6) : en effet, de (6.5) on déduit que $<\bar{\mu}, \nabla\bar{y}> > 0$.

REMARQUE 6.2.

(i) L'équation (6.6) définit $\bar{p}$ de façon unique (car l'équation d'état linéarisée est une isomorphisme de U dans Y).

(ii) Si $K \subset L^s(\Omega)$, $s > n$, il vaut mieux choisir $L^s(\Omega)$ comme espace des contrôles : ceci permet d'obtenir $\bar{p}$ dans $L^{s'}(\Omega)$ avec $1/s + 1/s' = 1$, et $\bar{\mu}$ dans $M(\bar{\Omega})^n$. Ceci vaut en particulier si on impose que $|u(x)| \leq M$, p.p. $x \in \Omega$.

(iii) On vérifie comme précédemment que le problème est qualifié si $K = L^2(\Omega)$ ou si f est linéaire et K contient $\{0\}$. Si le problème est non linéaire et comporte des contraintes sur le contrôle et l'état, la question de la qualification est ouverte. Notons toutefois qu'on peut appliquer le point (ii) du théorème (2.2) pour obtenir des résultats de qualification pour presque tout δ. $\blacksquare$

References

[1] R.A. Adams, Sobolev spaces. Academic Press, New York (1975).

[2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for the solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. Comm. on Pure and Appl. Math. 12, p. 632-727 (1959).

[3] J.F. Bonnans, E. Casas, Contrôle de systèmes non linéaires comportant des contraintes distribuées sur l'état, Rapport INRIA no 300 (1984).

[4] J.F. Bonnans, E. Casas, On the choice of the function spaces for some state-constrained control problems, Numer. Funct. Anal. Optim. 7, p. 333 - 348 (1984-1985).

[5] J.F. Bonnans, E. Casas, Quelques méthodes pour des problèmes de contrôle avec des contraintes sur l'état. Ann. Scient. Univ. Al. I. Cuza XXXII, p. 57-62 (1986).

[6] E. Casas, Quelques problèmes de contrôle avec contraintes sur l'état. C.R. Acad. Sc. Paris, 296, p. 509-512 (1983)

[7] E. Casas, Control of an elliptic problem with pointwise state constraints. SIAM J. Cont. Optim. 24, p.1309-1318 (1986).

[8] E. Casas, Un problema de control de sistemas gobernados por ecuaciones en derivadas parciales. V.C.E.D.Y.A., Tenerife (1982).

[9] F.H. Clarke, Optimization and nonsmooth analysis. Wiley, New York (1983).

[10] J.L. Lions, Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Paris, Dunod (1968).

[11] J. Mossino, An application of duality to distributed optimal control problems with constraints on the control and the state. J. of Math. an Appl. 50, pp. 223-242 (1975).

[12] G. Stampacchia, Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. Ann. Inst. Fourier 15, p. 189-258 (1965).

Joseph F. Bonnans
INRIA
Domaine de Voluceau
B.P. 105
Rocquencourt
78153 Le Chesnay Cedex
France

Eudardo Casas
Departamento de Ecuaciones Funcionales
Facultad de Ciencias
Universidad de Santander
39005 Santander
Espagne