PhD Subject

Efficient numerical schemes for Hamilton-Jacobi-Bellman PDEs

Schémas numériques efficaces pour les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman

Teams: ANEDP (LMO) and Commands (INRIA and CMAP).

Supervision: J.-M. Mirebeau and J.F. Bonnans

Thèmes : Numerical analysis of parabolic PDEs and related Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation for stochastic control problems.

Résumé

L'objectif de cette thèse est la conception de schémas numériques efficaces pour les équations aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), et plus généralement pour les opérateurs dégénérés elliptiques du second ordre. Ceux-ci recouvrent une une grande diversité d'applications, telles que le contrôle stochastique, les jeux dynamiques via l'équation d'Isaacs, mais aussi le transport optimal via l'équation de Monge-Ampère.

Les opérateurs en différentiels en jeu prennent la forme générale [CIL92]

$$\Lambda u(x) = F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x))$$

où F est supposée croissante en sa seconde variable, et décroissante en sa dernière variable, au sens de l'ordre naturel sur les matrices symétriques. Ces propriétés de monotonie ont des analogues discrets, qu'il convient de respecter lors de la conception des schémas numériques, pour extraire notamment les solutions de viscosité. Des recherches dans cette direction ont été menées dès les années 90' [KT92, Obe06], mais le coût important et la mauvaise précision des résultats numériques obtenus en ont fortement limité les retombées concrètes. La faute revient aux schémas de discrétisation utilisées, généralement à deux échelles, et dont les vitesses de convergence sont sous-linéaires [NNZ17].

Dans cette thèse, nous nous attacherons à concevoir des schémas numériques compacts, économes, et consistants à un degré élevé, pour la discrétisation monotone des opérateurs différentiels d'ordre deux. Pour cela, nous ferons appel à des outils issus de la géométrie algorithmique comme les réductions de Voronoi [Sch09]. Des résultats préliminaires en ce sens ont été obtenus par les encadrants dans certains cas particuliers, comme le cas linéaire [BOZ04], celui de l'équation de Monge-Ampère bi-dimensionelle [BCM16], ou des opérateurs d'ordre un [Mir18]. Une stratégie générale se dessine pour l'extension à plusieurs autres opérateurs, pour lesquels la spécialisation, l'étude de convergence, l'implémentation numérique, et la mise en oeuvre dans des applications, sont autant de tâches que nous proposons d'adresser au cours de la thèse. Les

codes numériques issus de ce travail ont vocation à être implémentés dans le logiciel open-source BocopHJB, facilitant leur valorisation et leur réutilisation.

Abstract

The objective of this thesis is the design of efficient numerical schemes for Hamilton-Jacobi partial differential equations, and more generally for second-order degenerate elliptic operators. These cover a wide variety of applications, such as stochastic control, dynamic games via the Isaacs equation, but also optimal transport via the Monge-Ampère equation.

The differential operators in play take the general form [CIL92]

$$\Lambda u(x) = F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x))$$

where F is assumed to be non-decreasing in its second variable, and non-increasing in its last variable, in the sense of the natural order on the symmetric matrices. These monotonic properties have discrete analogues, which must be satisfied by the numerical schemes designed, so as to extract viscosity solutions of the original problems in particular. Research in this direction has been carried out since the 1990s, but the high cost and the lack of accuracy of the numerical results obtained have greatly limited the concrete results. The fault lies with the discretization schemes used, usually involving two discretization scales, and whose convergence rates are typically sub-linear [NNZ17].

In this thesis, we will focus on designing compact, economical, and second order accurate, numerical schemes for monotonic discretization of second-order differential operators. For that purpose we will rely on tools derived from algorithmic geometry such as the reductions of Voronoi [Sch09]. Preliminary results in this direction have been obtained by the supervisors in certain special cases, such as the linear operators [BOZ04], the two-dimensional Monge-Ampère equation [BCM16], or operators of order one [Mir18]. A general strategy is emerging for the extension to several other operators, for whom specialization, convergence study, numerical implementation, and the development of applications, are all tasks that we propose to address to course of the thesis. The numerical codes resulting from this work are expected to be implemented in the open-source software BocopHJB, facilitating their distribution and reuse.

1 Contexte

La thèse proposée a pour objectif la conception de schémas de discrétisation efficaces pour les opérateurs différentiels monotones d'ordre deux. Nous rappelons ici leur expression générale, les spécialisations qui motivent notre étude, et l'état de l'art concernant leur discrétisation.

Les opérateurs aux dérivées partielles étudiés, hors leur description axiomatique évoquée dans l'introduction, peuvent s'exprimer sous l'une des formes suivantes, par degré croissant de généralité. Dans le cas linéaire:

$$Lu(x) = c + \lambda u(x) + \langle \omega, \nabla u(x) \rangle - \mathrm{Tr}(D\nabla^2 u(x)), \tag{1}$$

où $c, \lambda \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}^d$, $D \in S_d$ (matrices symétriques), avec de manière cruciale $\lambda \geq 0$ et $D \succeq 0$. En prenant les extrema de telles familles, on obtient les opérateurs dit de Pucci, puis d'Isaacs

$$\inf_{\alpha \in A} L_\alpha u, \qquad\qquad \sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \in B} L_{\alpha\beta} u. \tag{2}$$

Modèles étudiés. A titre d'exemple, fondamental, une équation rétrograde dite de Feynman-Kac et de la forme $\partial_t u = Lu$, est satisfaite (sous des hypothèses adéquates) par la "fonction valeur" suivante

$$v(x,t) := \mathbb{E}\left[\int_t^T f(X_s,s)\mathrm{d}s + g(X(T)) \mid X(t) = x\right]$$

où $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de coût données, et T un temps final donné. On a noté X la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X(t) = b(X(t),t) + \sigma(X(t),t)\mathrm{d}W(t), \tag{3}$$

pour tout $t \geq 0$, où $b : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une dérive, et $\sigma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to M_d(\mathbb{R})$ une volatilité.

Lorsqu'une variable contrôle $\alpha \in A$ permet de modifier localement les paramètres régissant l'évolution de X, on aboutit à une équation de la forme $\partial_t u = \inf_{\alpha\in A} L_\alpha u$. Deux modèles acceptant une telle formulation nous intéressent particulièrement, et seront investigués dans le cadre de la thèse: il sont liés à la gestion de stocks, et de portfolios financiers, respectivement. Suivant les cas la dérive seule de la variable aléatoire, ou sa volatilité également, dépendent du contrôle $\alpha \in A$. Ceci a des implications concrètes en termes d'implémentation numérique qui seront discutées plus loin.

Suivant les développements et les contraintes temporelles, d'autres types d'opérateurs pourront être étudiés, comme des variantes de l'opérateur de Monge-Ampère liées à l'optique géométrique, qui se reformulent également sous la forme $\inf_{\alpha\in A} L_\alpha u$. L'extension des travaux aux opérateurs d'Isaacs, ou aux opérateurs adjoints tels ceux de Fokker-Plank, est également un axe de développement naturel un fois les premiers jalons posés.

Schémas de discrétisation. La conception et l'étude de schémas de discrétisation efficaces pour les opérateurs de la forme (1) et (2) sera un axe de développement majeur de la thèse, car ceux-ci sont aujourd'hui trop restrictifs, coûteux, ou imprécis. Le cas élémentaire d'un opérateur linéaire ayant un tenseur de diffusion *diagonal* peut cependant être considéré comme résolu heureusement: un développement de Taylor suivant un petit paramètre $h > 0$ donne

$$Lu(x) = c + \lambda u(x) + \sum_{1\leq i\leq d} |\omega_i| \frac{u(x) - u(x - h\varepsilon_i e_i)}{h} + \sum_{1\leq i\leq d} \mu_i \frac{2u(x) - u(x - e_i h) - u(x + e_i h)}{h^2} + \mathcal{O}(h), \tag{4}$$

où l'on a noté $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ la base canonique, $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq d}$ les signes des composantes de ω, et $(\mu_i)_{1\leq i\leq d}$ les coefficients diagonaux de D. Si la grille cartésienne $X = h\mathbb{Z}^2$ est utilisée pour la discrétisation, et si $x \in X$, alors c'est aussi le cas des points $x \pm e_i h$. L'approximation précédente définit alors un schéma dit dégénéré elliptique [Obe06], c'est à dire de la forme

$$F(x, U(x), (U(x) - U(y))_{y\in X}),$$

où F est croissante en sa seconde et troisième variable (composante par composante). Par ailleurs l'utilisation de différences finies centrées pour terme de premier ordre, en remplacement des différences amont dans (4), permet de gagner un ordre de convergence, tout en préservant le caractère dégénéré elliptique, sous réserve d'une relation de compatibilité liant D, ω et h.

Le cas général d'un tenseur de diffusion non-diagonal, rencontré dans de nombreuses applications concrètes et notamment celles qui nous intéressent, ne peut pas être traité par l'approche précédente. En effet la discrétisation du terme diffusif pose un problème, pour lequel une "solution" typique est la suivante: la base canonique est replacée par les vecteurs propres normalisés $(v_i)_{1\leq i\leq d}$ du tenseur D. Comme $x + hv_i$ n'est a priori pas un point de discrétisation, une seconde échelle $\delta \ll h$ est introduite, et la fonction inconnue discrète U est échantillonnée sur la grille plus fine $\mathcal{X} := \delta\mathbb{Z}^d$. Comme $x + hv_i \notin \mathcal{X}$ en général, la valeur $U(x + hv_i)$ est approchée des procédés d'interpolation, suivant le principe des schémas semi-lagrangiens [NNZ17].

Le coût, dû à l'introduction d'une seconde échelle fine δ, et le manque de précision, dû aux procédés d'interpolation introduits, pénalisent fortement l'approche classique décrite ci-dessus, ce qui limite ses applications pratiques. Des difficultés supplémentaires compliquent de surcroît le traitement des opérateurs non-linéaires (2). Une approche alternative, proposée par les encadrants, sera donc développée dans le cadre de la thèse.

2 Perspectives

Nous proposons de fonder les schémas de discrétisation conçus dans le cadre de la thèse sur des outils de géométrie algorithmique. Les gains d'efficacité attendus sont importants, et ouvriront sur de nouvelles applications.

Le cas linéaire. Pour pallier aux défauts des discrétisations à deux échelles, les auteurs proposent de s'appuyer sur des méthodes issues de la théorie des réseaux additifs [Sch09], qui permettant notamment de décomposer un tenseur défini positif D sous la forme

$$D = \sum_{1 \leq i \leq I} \mu_i e_i e_i^T, \tag{5}$$

où I est un entier, $\mu_i \geq 0$, et $e_i \in \mathbb{Z}^d$. Le caractère entier des offsets $(e_i)_{1 \leq i \leq I}$ permet d'utiliser directement la grille cartésienne de discrétisation $h\mathbb{Z}^d$, et d'éviter ainsi le recours à une double échelle de discrétisation. Les points suivants seront explorés au cours de la thèse:

1. Décomposition simultanée d'un tenseur positif D et d'un vecteur ω. Ceci dans le but d'obtenir un schéma consistant à l'ordre deux, mains restant monotone, par l'utilisation de différences finies centrées pour le terme d'ordre un de (1).

2. Utilisation de la réduction de Voronoi [Sch09] pour construire des décompositions tensorielles du type (5) en dimension $d \in \{4, 5\}$. Ceci étendrait les travaux des encadrants, fondés sur des outils spécifiques aux plus petites dimensions tels que l'arbre de Stern-Brocot [BOZ04] ($d = 2$) ou l'algorithme de Selling [FM14] ($d = 3$).

3. La prise en compte des conditions au bord du domaine.

Modèles non-linéaires. Les opérateurs non-linéaires de Pucci (2, gauche) s'expriment en termes d'une famille d'opérateurs linéaires, indexée par un paramètre $\alpha \in A$ (deux paramètres pour les opérateurs d'Isaacs (2, droite)). Une méthode élémentaire et classique pour leur discrétisation consiste à échantillonner ces espaces de paramètres, et à se reposer sur le cas linéaire évoqué ci-dessus. Les encadrants souhaitent cependant éviter cette approche, car elle est en pratique très coûteuse (comme l'espace A est généralement multi-dimensionnel, son échantillonnage requiert des milliers de points), et imprécise (car une erreur de consistance est introduite).

A la place nous souhaitons étudier une optimisation “formelle” au niveau du schéma de discrétisation, sans échantillonnage, vis à vis du paramètre $\alpha \in A$ (et éventuellement $\beta \in B$ pour les opérateurs d'Isaacs). Elle rendue possible par la dépendance simple des coefficients de l'opérateur L_α vis à vis du paramètre d'optimisation α, observée dans les cas pratiques (dépendance linéaire, quadratique, ou en tout cas algébrique), et par le fait que les coefficients

$\mu_i = \mu_i(D)$ apparaissant dans (5) dépendent linéairement de D, tandis que les offsets $e_i = e_i(D)$ sont constants par morceaux. Un travail de cette nature a été réalisé par un des encadrants dans le cas particulier de l'opérateur de Monge-Ampère bi-dimensionnel [BCM16]. Les points suivants seront explorés dans la thèse.

4. Discrétisation d'opérateurs associés à la gestion de stocks, et de portefeuilles financiers, déjà évoqués, avec possibles décisions d'arrêt (options américaines), du type de ceux étudiés dans [BL82].

5. Application aux problèmes de jeux à champ moyen, qui font intervenir à la fois les opérateurs de Pucci à travers l'équation HJB, et l'équation de Fokker-Planck (domaine dans lequel l'approche standard est par semi lagrangien, cf [CS14]).

6. Analyse d'erreur des schémas, beaucoup plus difficile dans le cas non linéaire, et qui nécessite a priori une régularité de la décomposition sur la grille, voir [Kry05].

7. Discrétisation de variantes de l'opérateur de Monge-Ampère. Ceci pour des applications à l'optique, dans le cadre de l'ANR MAGA[1]. Nous souhaitons également mettre en oeuvre la formulation [CWL18] de ces problèmes, particulièrement stable et peu sujette aux difficultés d'initialisation.

Diffusion des méthodes. Les auteurs sont attachés aux principe de la diffusion open-source de leurs codes informatiques, qui dans notre expérience permet de nouer de nombreuses collaborations académiques, et d'accélérer les transferts industriels. L'étudiant développera d'abord des prototypes internes spécialisés pour les modèles étudiés. Dans un second temps, une implémentation des techniques identifiés comme les plus génériques et efficaces sera diffusée en libre accès.

6. Intégration dans le logiciel BocopHJB des méthodes développées pertinentes.

3 Plan de travail

L'exposition des perspectives, dans la section précédente, définit un plan de travail pour le début de thèse. Le point 1 a déjà été entamé lors du stage de M2, et devrait être achevé dans la première année de thèse, tandis que les feuilles de route précises établies pour les points 2, 3, 4 laissent espérer une réalisation à moyen terme. Certains aspects de modélisation restent en revanche à décider pour le point 5 (applications de Monge-Ampère des problèmes issus de l'optique). Nous souhaitons par ailleurs prendre suffisamment de recul avant d'aborder le point 6 (diffusion des méthodes sous forme open-source).

Ce plan n'est bien entendu que provisoire, et pourra évoluer en fonction des opportunités ou des difficultés rencontrées.

References

[BCM16] Jean-David Benamou, Francis Collino, and Jean-Marie Mirebeau. Monotone and Consistent discretization of the Monge-Ampère operator. *Mathematics of computation*, 85(302):2743–2775, 2016.

[1] Le projet MAGA met en avant des techniques différentes fondées sur les diagrammes de Laguerre, mais celles-ci ne s'appliquent qu'à un nombre restreint de modèles, ce qui motive l'étude des méthodes plus générales présentées ici.

[BL82] A. Bensoussan and J.-L. Lions. *Applications of variational inequalities in stochastic control*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982. Translated from the French.

[BOZ04] J. Frédéric Bonnans, Élisabeth Ottenwaelter, and Housnaa Zidani. A fast algorithm for the two dimensional HJB equation of stochastic control. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 38(4):723–735, 2004.

[CIL92] Michael G. Crandall, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American mathematical society*, 27(1):1–67, 1992.

[CS14] E. Carlini and F. J. Silva. A fully discrete semi-Lagrangian scheme for a first order mean field game problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 52(1):45–67, 2014.

[CWL18] Yangang Chen, Justin WL Wan, and Jessey Lin. Monotone Mixed Finite Difference Scheme for Monge–Ampère Equation. *Journal of Scientific Computing*, pages 1–29, 2018.

[FM14] Jérôme Fehrenbach and Jean-Marie Mirebeau. Sparse non-negative stencils for anisotropic diffusion. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 49(1):123–147, 2014.

[Kry05] N.V. Krylov. The rate of convergence of finite-difference approximations for Bellman equations with Lipschitz coefficients. *Appl. Math. Optim.*, 52(3):365–399, 2005.

[KT92] Hung-Ju Kuo and Neil S. Trudinger. Discrete methods for fully nonlinear elliptic equations. *SIAM journal on numerical analysis*, 29(1):123–135, 1992.

[Mir18] Jean-Marie Mirebeau. Anisotropic fast-marching on cartesian grids using Voronoi's first reduction of quadratic forms. page 39, 2018.

[NNZ17] Ricardo H. Nochetto, Dimitrios Ntogkas, and Wujun Zhang. Two-Scale Method for the Monge-Ampère Equation: Convergence to the Viscosity Solution. *arXiv preprint arXiv:1706.06193*, 2017.

[Obe06] Adam M. Oberman. Convergent difference schemes for degenerate elliptic and parabolic equations: Hamilton–Jacobi equations and free boundary problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(2):879–895, 2006.

[Sch09] Achill Schurmann. *Computational Geometry of Positive Definite Quadratic Forms: Polyhedral Reduction Theories, Algorithms, and Applications*, volume 48 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, 2009.