Modèles stochastiques de croissance de population multitype

Etienne Adam

CMAP, Ecole Polytechnique.

8 Avril 2015
Ecole de printemps, chaire MMB

Plan de la présentation

Population multitype

Un type peut correspondre à :

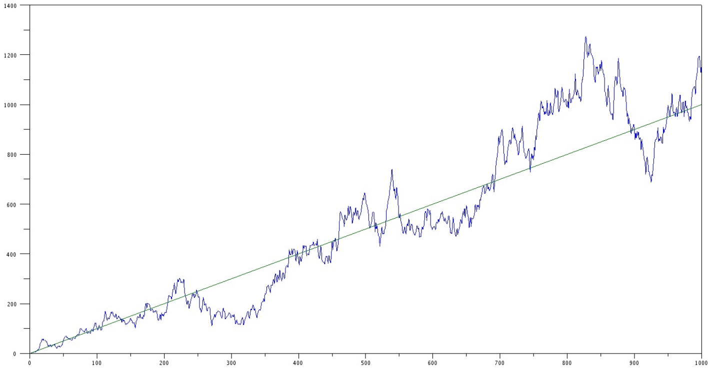
- Un habitat
- Un génotype ou un phénotype
- Un couple habitat-génotype
- ...

Objectif

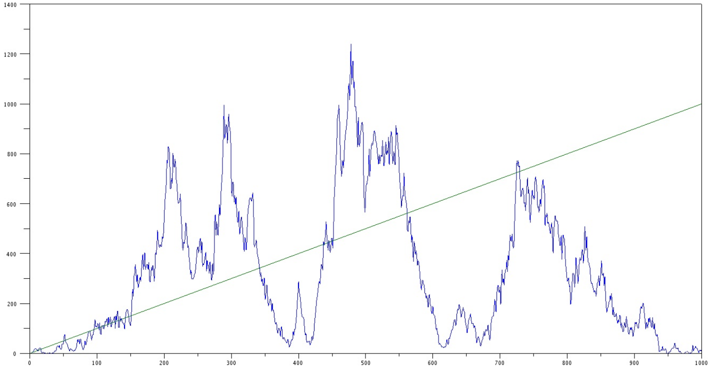
Donner un critère de persistence et de croissance de la population.

Le drift contre les fluctuations

Phénomène observé par Zubkov(72), Kersting(86),...



Le drift contre les fluctuations



Hypothèses

$$X_{n+1} = X_n M + g(X_n) + \xi_n$$

Cas critique

M matrice à coefficients positifs, irréductible et apériodique.
La plus grande valeur propre de M vaut 1 et on pose v et u les vecteurs propres à gauche et à droite associés tels que
$vu = u^\intercal u = 1$.

$g(x) = o(\|x\|)$
$\mathbb{E}(\xi_n \big| X_1, \ldots, X_n) = 0$
La taille des fluctuations dépend du présent :

$$\mathbb{E}((\xi_n u)^2 \big| X_1, \ldots, X_n) = \sigma^2(X_n)$$

Critère de croissance infinie

Sous des hypothèses techniques sur les fonctions g et σ^2 on a

Théorème

Si

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{2rg\left(rv\right)u}{\sigma^2\left(rv\right)} < 1, \tag{1}$$

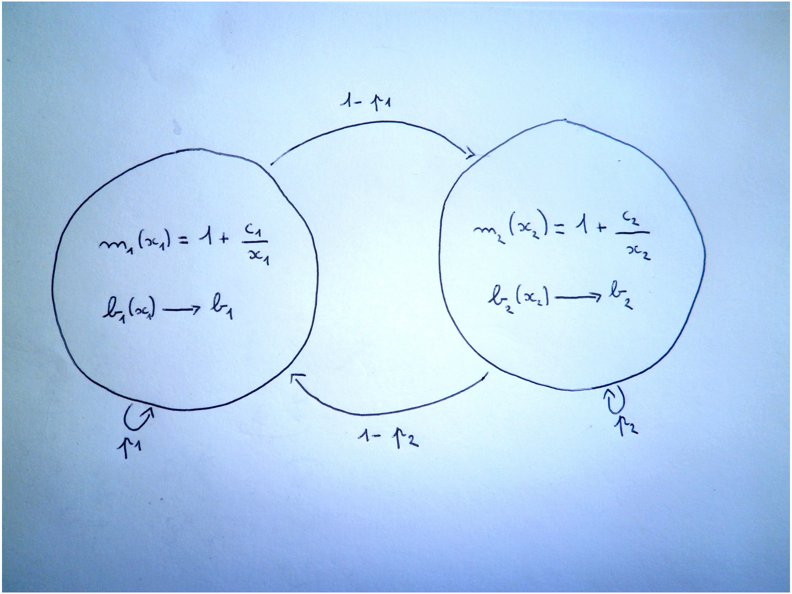
alors X_n est fini presque sûrement.

Si

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{2rg\left(rv\right)u}{\sigma^2\left(rv\right)} > 1, \tag{2}$$

alors $\mathbb{P}(X_n \to \infty) > 0$.

Exemple d'une métapopulation



Exemple d'une métapopulation

$$X_{n+1} = X_n M + \begin{bmatrix} p_1 c_1 + (1-p_2)c_2 & (1-p_1)c_1 + p_2 c_2 \end{bmatrix} + \xi_n,$$

où $M = \begin{pmatrix} p_1 & 1-p_1 \\ 1-p_2 & p_2 \end{pmatrix}$.

Critère d'extinction

Si

$$2(c_1 + c_2) < \frac{1-p_2}{2-p_1-p_2} b_1 + \frac{1-p_1}{2-p_1-p_2} b_2$$

alors la population s'éteint presque sûrement.

Si

$$2(c_1 + c_2) > \frac{1-p_2}{2-p_1-p_2} b_1 + \frac{1-p_1}{2-p_1-p_2} b_2$$

alors la population survit avec probabilité non nulle.

Fonction de Lyapounov

Le but est de trouver une fonction L croissante, qui tend vers l'infini, telle que

$$\mathbb{E}(L(X_{n+1}u)\big|X_1,\ldots,X_n) \leq L(X_n u), \text{ si } X_n u > s.$$

Ensuite on suppose que $X_n u \to +\infty$ avec probabilité non nulle. Ainsi, il existe un entier T tel que

$$\mathbb{P}(\inf_{n \geq T} X_n u > s, X_n u \to +\infty) > 0.$$

On pose $\tau = \inf(n \geq T : X_n u \leq s)$ et

$$V_n = \begin{cases} L\left(X_{n+T}u\right) \text{ si } n+T \leq \tau \\ L\left(X_\tau u\right) \text{ sinon.} \end{cases}$$

V_n est une surmatingale positive, donc converge presque sûrement. Contradiction.

Recherche de la fonction de Lyapounov

On va prendre $L = \ln$.
En effet, pour $\varepsilon > 0$, $x > 0$ et $h > -x$, on a l'inégalité :

$$\ln(x+h) \leq \ln x + \frac{h}{x} - \frac{h^2 \mathbb{1}_{\{h \leq \varepsilon x\}}}{2(1+\varepsilon)x^2}.$$

On applique l'inégalité pour

$$x = X_n u \text{ et } h = X_{n+1}u - X_n u.$$

Problème technique : pour contrôler les termes qui ne sont pas le long de v, il faut considérer $\mathbb{E}(L(X_{n+ku} \middle| X_1, \ldots, X_n)$.

Perspectives

- Quel est le comportement en l'infini? $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{??}$Gamma
- Estimation du temps d'extinction.
- Extension pour le cas avec une infinité de types.

Merci pour votre attention