Modélisation déterministe par morceaux des communautés proies-prédateurs

Manon Costa

CMAP

École de la Chaire MMB - Aussois
8 avril 2015

Modèle démographique

$$\begin{array}{rclcccc} N_t & = & \text{nombre de proies} & \sim & \text{arbres} & & \text{lent} \\ H_t & = & \text{densité de prédateurs} & \sim & \text{insectes} & & \text{rapides} \end{array}$$

- Évolution des prédateurs :

$$\frac{d}{dt} H_t = H_t \big(rBN_t - D - CH_t \big).$$

- Évolution des proies : processus de naissance et mort

$$\begin{array}{rll} n \to n+1 & \text{à taux} & n \cdot b \\ n-1 & \text{à taux} & n \cdot (d + cn + BH_t) \mathbf{1}_{n \geq 2} \end{array}$$

Partant d'une condition initiale (n, h)

- Avant le premier saut au temps T_1,

$$N_t = n, \quad \text{et} \quad H_t = \phi_n(t, h)$$

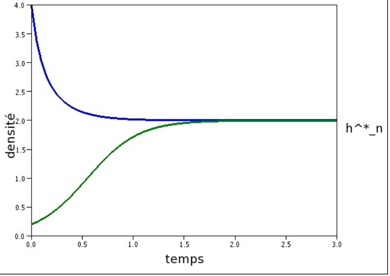
où ϕ_n est le flot associé avec

$$\frac{d}{dt}\phi_n(t,h) = \phi_n(t,h)\big(rBn - D - C\phi_n(t,h)\big).$$

- Il existe un unique équilibre

$$h_n^* = \max(0, \frac{rBn - D}{C})$$

tel que $\phi_n(t, h) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} h_n^*$.



Partant d'une condition initiale (n, h)

- Premier temps de saut :

$$\mathbb{P}(T_1 \geq t) = \exp\Big(-\int_0^t n\big(b + d + cn + B\phi_n(s,h)\big)\,ds\Big)$$

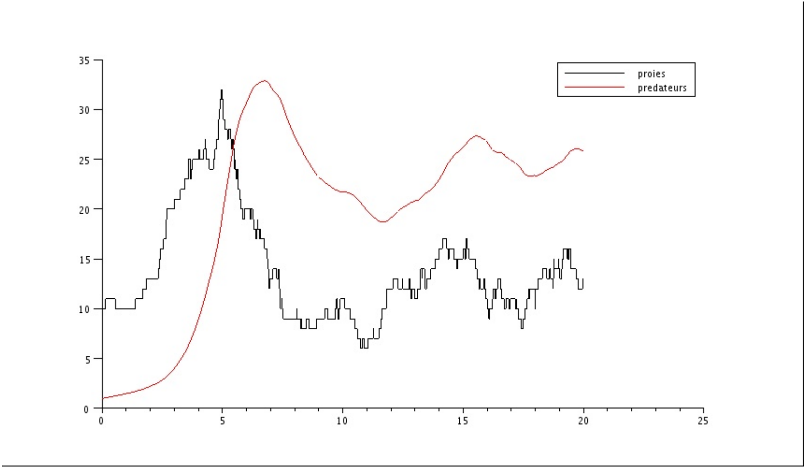
- A l'instant T_1,

$$H_{T_1} = \phi_n(T_1, h)$$

  et

  - $N_{T_1} = n + 1$ avec probabilité $\frac{bn}{n\big(b+d+cn+B\phi_n(T_1,h)\big)}$,
  - $N_{T_1} = n - 1$ avec probabilité $\frac{n(d+cn+B\phi_n(T_1,h))}{n\big(b+d+cn+B\phi_n(T_1,h)\big)}$.

Exemple de trajectoire



Paramètres : $b = 0.4$, $d = 0$, $c = 0.0005$, $B = 0.02$, $R = 2$, $D = 0$ et $C = 0.02$.

D'où provient ce modèle ?

- $K \to \infty$ paramètre d'échelle .
- On définit un processus de Markov (N_t^K, H_t^K) dont les transitions sont données par

$$\begin{array}{rlll} (n,h) \to & (n+1,h) & \text{à taux} & n \cdot b \\ & (n-1,h) & \text{à taux} & n \cdot (d + cn + B^K h) \mathbf{1}_{n \geq 2} \\ & (n,h+1) & \text{à taux} & h \cdot r^K B^K n \\ & (n,h-1) & \text{à taux} & h \cdot (D^K + C^K h) \end{array}$$

avec

$$B^K = \frac{B}{K}, \quad r^K = Kr, \quad D^K = D, \quad C^K = \frac{C}{K}$$

D'où provient ce modèle ?

- $K \to \infty$ paramètre d'échelle .

- On définit un processus de Markov (N_t^K, H_t^K) dont les transitions sont données par

$$
\begin{aligned}
(n,h) \to (n+1,h) \quad & \text{à taux} \quad n \cdot b \\
(n-1,h) \quad & \text{à taux} \quad n \cdot (d + cn + B\tfrac{h}{K})\mathbf{1}_{n\geq 2} \\
(n,h+1) \quad & \text{à taux} \quad h \cdot rBn \\
(n,h-1) \quad & \text{à taux} \quad h \cdot (D + C\tfrac{h}{K})
\end{aligned}
$$

avec

$$
B^K = \frac{B}{K}, \quad r^K = Kr, \quad D^K = D, \quad C^K = \frac{C}{K}
$$

D'où provient ce modèle ?

- $K \to \infty$ paramètre d'échelle .
- On définit un processus de Markov (N_t^K, H_t^K) dont les transitions sont données par

$$
\begin{aligned}
(n,h) \to (n+1,h) \quad & \text{à taux} \quad n \cdot b \\
(n-1,h) \quad & \text{à taux} \quad n \cdot (d + cn + B\tfrac{h}{K})\mathbf{1}_{n\geq 2} \\
(n,h+1) \quad & \text{à taux} \quad h \cdot rBn \\
(n,h-1) \quad & \text{à taux} \quad h \cdot (D + C\tfrac{h}{K})
\end{aligned}
$$

Théorème

Alors $(N_t^K, \frac{H_t^K}{K})$ converge en loi vers le processus (N_t, H_t).

Existence d'une mesure invariante et ergodicité

- On cherche à montrer qu'il existe une mesure invariante π.
  Une telle distribution vérifie
  $$\int f(z)\pi(dz) = \mathbb{E}_\pi\big(f(N_t, H_t)\big), \quad \forall t \geq 0$$

Existence d'une mesure invariante et ergodicité

- On cherche à montrer qu'il existe une mesure invariante π.
  Une telle distribution vérifie
  $$\int f(z)\pi(dz) = \mathbb{E}_{\pi}\big(f(N_t, H_t)\big), \quad \forall t \geq 0$$

- En utilisant des arguments liés à la théorie de Foster-Lyapunov, on peut montrer

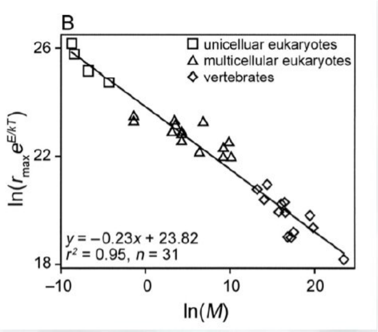
Théorème

Il existe une unique mesure de probabilité invariante π de ce processus (N_t, H_t).
De plus,
$$\sup_{f \leq 1} \left| \mathbb{E}_{(n,h)}\big(f(N_t, H_t)\big) - \int f\pi \right| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
exponentiellement vite.

voir Meyn-Tweedie (1993).

Masse d'un insecte $\ll$ masse d'un arbre

Théorie métabolique : Les caractéristiques métaboliques (taux de naissance, durée de vie, ...) d'un individu sont liées à sa masse.



[a]

a. Brown et al. Ecology 2004

Changement d'échelle de la dynamique du prédateur

Nous simplifions ici en prenant $\varepsilon \to 0$,

$$\frac{d}{dt}H_t^\varepsilon = \frac{H_t^\varepsilon}{\varepsilon}(rBN_t^\varepsilon - D - CH_t^\varepsilon)$$

On garde la même évolution du processus N^ε :

$$\begin{aligned} n \to\ & n+1 \quad \text{à taux} \quad n \cdot b \\ & n-1 \quad \text{à taux} \quad n \cdot (d + cn + BH_t^\varepsilon) \end{aligned}$$

Changement d'échelle de la dynamique du prédateur

Nous simplifions ici en prenant $\varepsilon \to 0$,

$$\frac{d}{dt}H_t^\varepsilon = \frac{H_t^\varepsilon}{\varepsilon}(rBN_t^\varepsilon - D - CH_t^\varepsilon)$$

On garde la même évolution du processus N^ε :

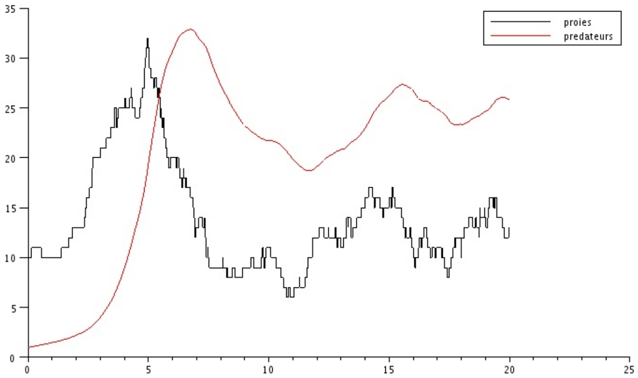
$$\begin{aligned} n \to n+1 & \quad \text{à taux} \quad n \cdot b \\ n-1 & \quad \text{à taux} \quad n \cdot (d + cn + BH_t^\varepsilon) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Ceci revient à accélérer le temps chez les prédateurs

$$\phi_n^\varepsilon(h,t) = \phi_n(h, \frac{t}{\varepsilon})$$

Que se passe-t-il lorsque $\varepsilon \to 0$

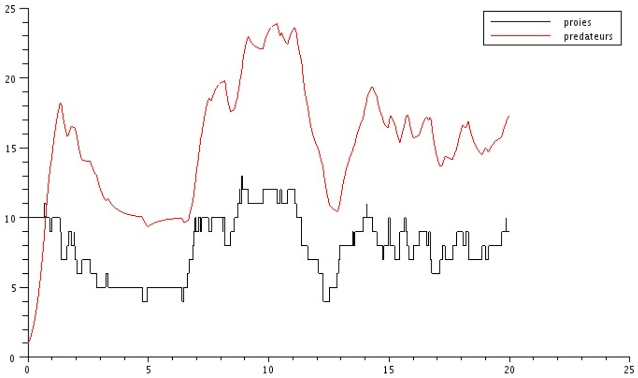
$\varepsilon = 1$



Paramètres : $b = 0.4$, $d = 0$, $c = 0.0005$, $B = 0.02$, $R = 2$, $D = 0$ et $C = 0.02$.

Que se passe-t-il lorsque $\varepsilon \to 0$

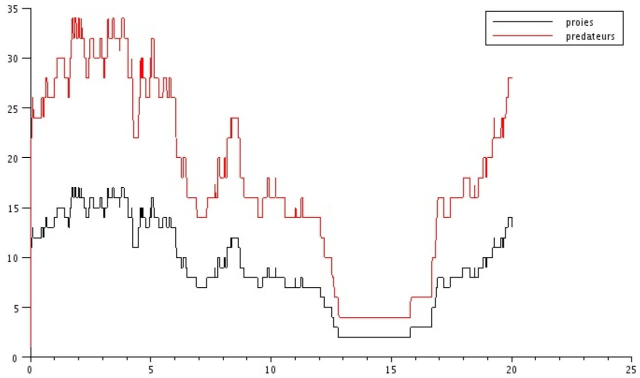
$\varepsilon = 0.1$



Paramètres : $b = 0.4$, $d = 0$, $c = 0.0005$, $B = 0.02$, $R = 2$, $D = 0$ et $C = 0.02$.

Que se passe-t-il lorsque $\varepsilon \to 0$

$\varepsilon = 0.001$



Paramètres : $b = 0.4$, $d = 0$, $c = 0.0005$, $B = 0.02$, $R = 2$, $D = 0$ et $C = 0.02$.

Convergence lorsque $\varepsilon \to 0$.

Si l'on considère le processus des proies N^ε

Théorème

- *La suite N^ε converge en loi vers $\overline{N}$ dans $\mathbb{D}([0,T],\mathbb{N})$.*
- *Le processus $(\overline{N}_t, t \in [0,T])$ est un processus de naissance et mort, dont l'évolution est donnée par*

$$\begin{aligned} n \to\ & n+1 \quad \text{à taux} \quad n \cdot b \\ & n-1 \quad \text{à taux} \quad n \cdot (d + cn + Bh_n^*) \end{aligned}$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, les proies voient toujours le prédateur à l'équilibre.

[Kurtz (1992). Averaging for martingale problems and stochatic approximation.]

Qu'en est-il des mesures invariantes ?

- On s'intéresse à la suite π^ε des mesures invariantes du processus $(N^\varepsilon, H^\varepsilon)$.

Qu'en est-il des mesures invariantes ?

- On s'intéresse à la suite π^ε des mesures invariantes du processus $(N^\varepsilon, H^\varepsilon)$.

- Le processus $(\overline{N}, h^*_{\overline{N}})$ a une mesure invariante $\overline{\pi} = \sum \mu_n \delta_{(n,h^*_n)}$ avec
$$\forall n \geq 2, \quad \mu_n = \frac{b_1 \cdots b_{n-1}}{d_2 \cdots d_n} \mu_1.$$

Qu'en est-il des mesures invariantes ?

- On s'intéresse à la suite π^ε des mesures invariantes du processus $(N^\varepsilon, H^\varepsilon)$.

- Le processus $(\overline{N}, h^*_{\overline{N}})$ a une mesure invariante $\overline{\pi} = \sum \mu_n \delta_{(n, h^*_n)}$ avec
$$\forall n \geq 2, \quad \mu_n = \frac{b_1 \cdots b_{n-1}}{d_2 \cdots d_n} \mu_1.$$

Théorème

La suite de mesures de probabilité π^ε converge lorsque $\varepsilon \to 0$ vers l'unique mesure invariante $\overline{\pi}$ du processus $(\overline{N}, h^*_{\overline{N}})$.

Simulations

$\varepsilon = 1$ $\quad$ $\varepsilon = 0.1$ $\quad$ $\varepsilon = 0.00001$

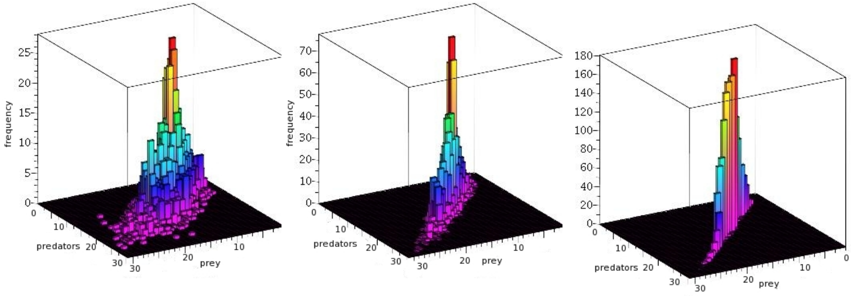


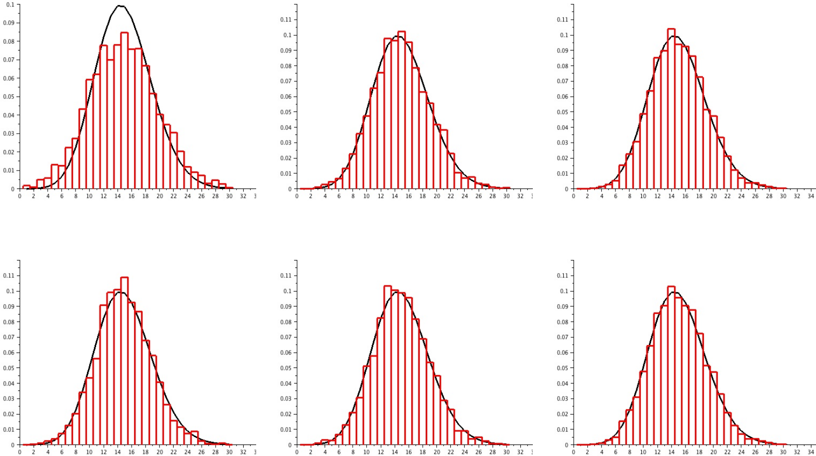
Figure : Approximation de la mesure invariante π^{ε} pour différentes valeurs de ε. Ces histogrammes sont construits à partir de 3000 itérations du processus Z^{ε} jusqu'au temps 1000. Paramètres : $b = 0.4$, $d = 0$, $c = 0.005$, $B = 0.02$, $r = 2$, $D = 0$ et $C = 0.04$.

Simulations

$\varepsilon = 1$ | $\varepsilon = 0.1$ | $\varepsilon = 0.00001$

proies

prédateurs



Merci de votre attention !