



Sur la sélection d'une forme d'histoire de vie  
observée chez la drosophile

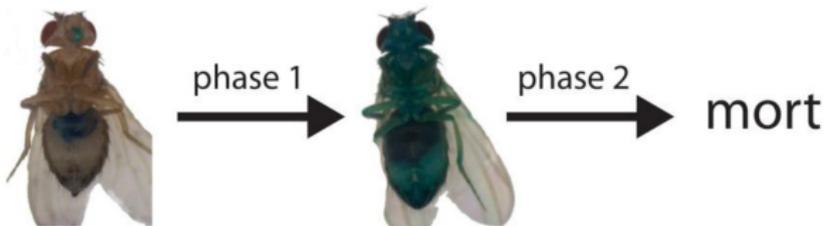
Tristan Roget (CMAP)

avec Sylvie Méléard et Michael Rera

Aussois, le 7 juin 2016

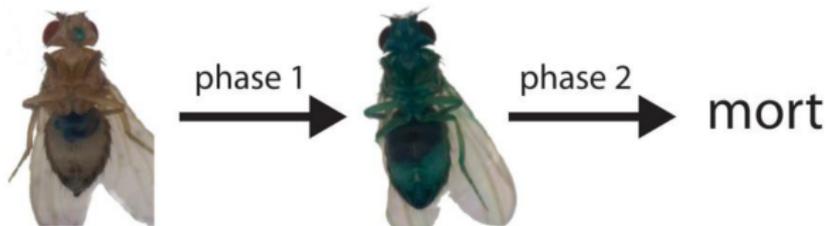
## La drosophile Smurf

- Identifié dans Michael Rera et al. [RCW12] chez l'espèce mélanogaster.



# La drosophile Smurf

- Identifié dans Michael Rera et al. [RCW12] chez l'espèce mélanogaster.



## Phase 1

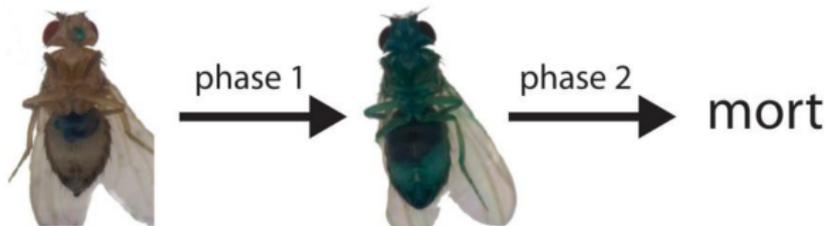
- Reproduction normale
- Mortalité nulle

## Phase 2

- Reproduction faible
- Mortalité élevée
- Espérance de vie réduite chez les descendants

# La drosophile Smurf

- Identifié dans Michael Rera et al. [RCW12] chez l'espèce mélanogaster.



## Phase 1

- Reproduction normale
- Mortalité nulle

## Phase 2

- Reproduction faible
- Mortalité élevée
- Espérance de vie réduite chez les descendants

## Question :

Apparition et maintien d'une telle forme d'histoire de vie.

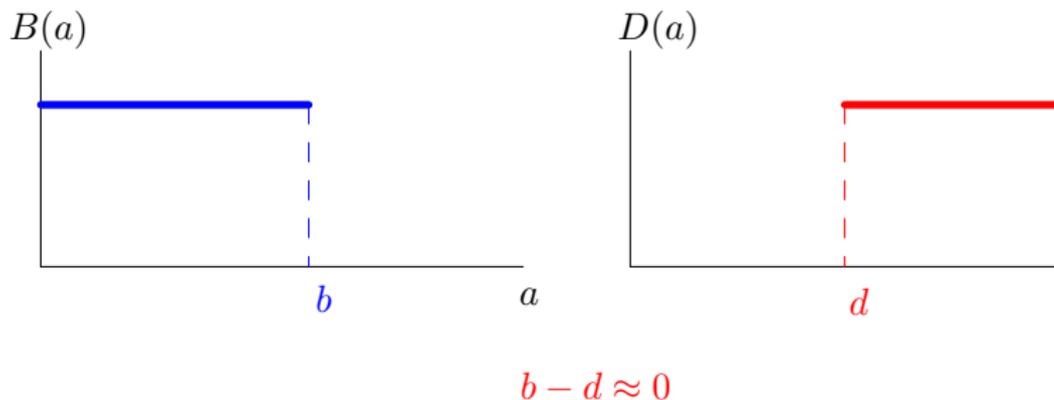
## Histoire de vie

On appelle **histoire de vie** d'un individu un couple de fonctions  $(B(a), D(a))_{a \in \mathbb{R}_+}$  où  $a$  désigne l'âge de l'individu,  $B(a)$  le taux de reproduction de l'individu à l'âge  $a$  et  $D(a)$  le taux de mortalité intrinsèque de l'individu à l'âge  $a$ .

# Histoire de vie

On appelle **histoire de vie** d'un individu un couple de fonctions  $(B(a), D(a))_{a \in \mathbb{R}_+}$  où  $a$  désigne l'âge de l'individu,  $B(a)$  le taux de reproduction de l'individu à l'âge  $a$  et  $D(a)$  le taux de mortalité intrinsèque de l'individu à l'âge  $a$ .

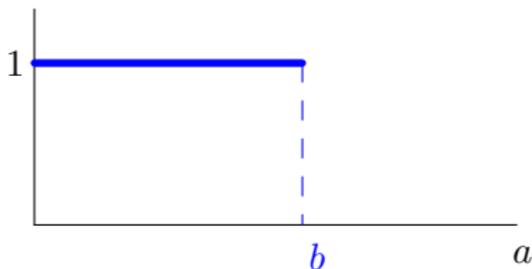
## Modèle pour la drosophile



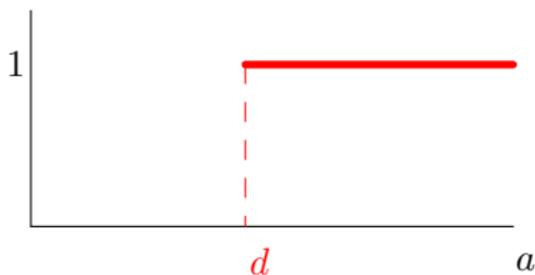
## Identification d'un trait d'histoire de vie

Population asexuée, haploïde. Chaque individu caractérisé par le trait  $(b, d) \in \mathbb{R}_+^2$

- se reproduit à taux  $B((b, d), \cdot) = 1_{[0, b]}$  :

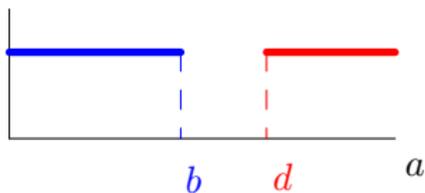


- meurt à taux  $D((b, d), \cdot) = 1_{]d, +\infty[}$  :



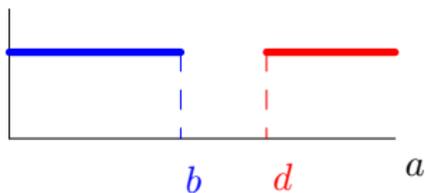
## Trois types de configurations remarquables

- La configuration "ménopause" :

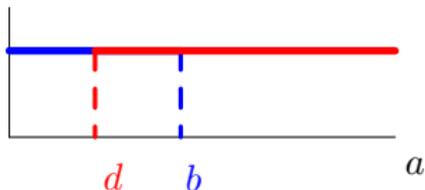


## Trois types de configurations remarquables

- La configuration "ménopause" :

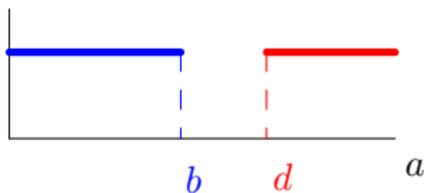


- La configuration "trop jeune pour mourir" :

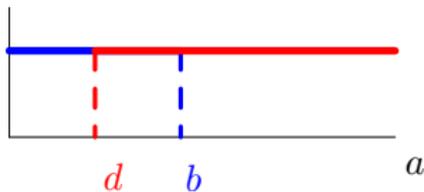


## Trois types de configurations remarquables

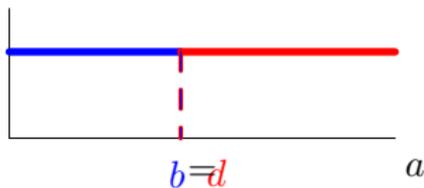
- La configuration "ménopause" :



- La configuration "trop jeune pour mourir" :



- La configuration "optimale"



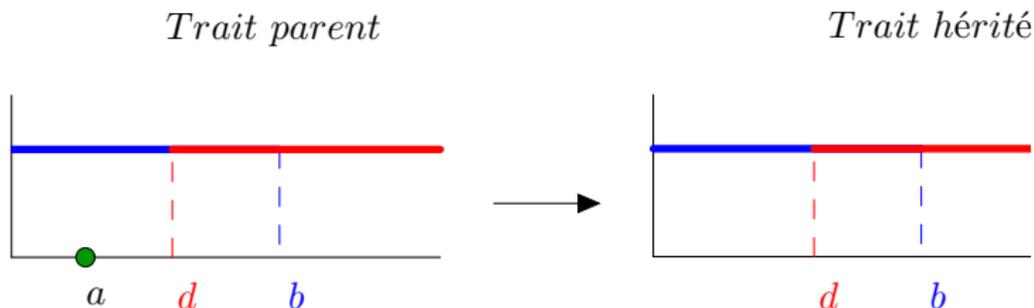
## Evolution des traits (1) : héritage

Lorsqu'un individu de trait  $(b, d)$  et d'âge  $a$  se reproduit :

## Evolution des traits (1) : héritage

Lorsqu'un individu de trait  $(b, d)$  et d'âge  $a$  se reproduit :

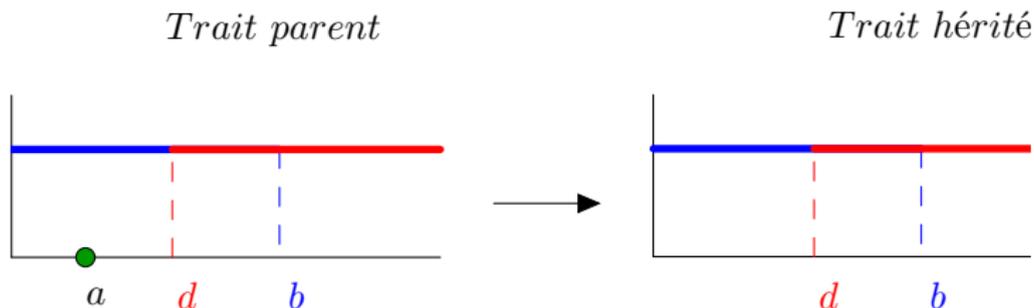
- Si  $a \leq d$  : son descendant hérite du trait  $(b, d)$ ,



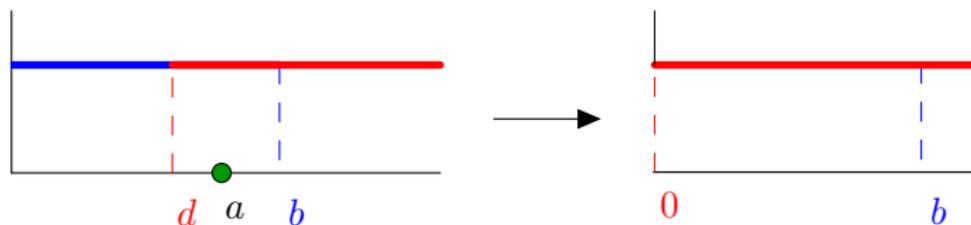
## Evolution des traits (1) : héritage

Lorsqu'un individu de trait  $(b, d)$  et d'âge  $a$  se reproduit :

- Si  $a \leq d$  : son descendant hérite du trait  $(b, d)$ ,



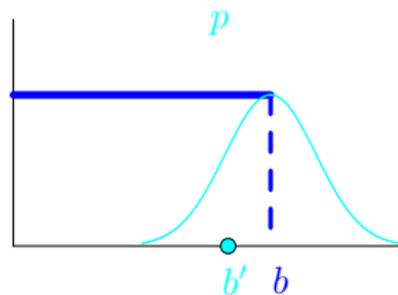
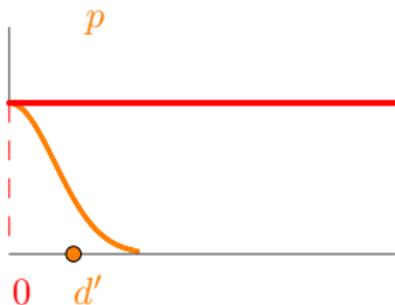
- Si  $d < a (< b)$ , son descendant hérite du trait  $(b, 0)$ ,



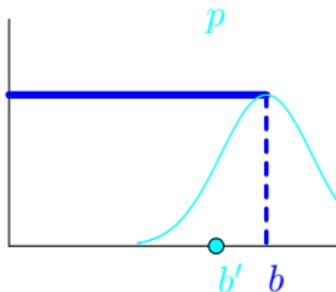
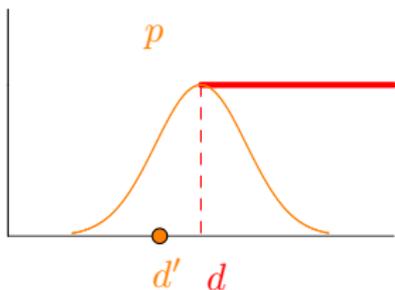
## Evolution des traits (2) : les mutations

Les mutations modifient le trait hérité du parent ( $b, d$ ).

- Si trait hérité =  $(b, 0)$  :



- Si trait hérité =  $(b, d)$  :



## Description mathématique/Simulations

Modèle **stochastique individu-centré pour les populations structurées en traits et en âge**, Chi Viet Tran [Tra06] : A  $t \geq 0$ , la population est décrite par

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} \delta_{((b_i(t), d_i(t)), a_i(t))}$$

et évolue selon un **processus de naissance et mort logistique généralisé** où chaque individu  $((b, d), a)$

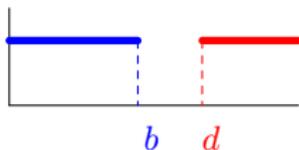
- se **reproduit** à taux  $B((b, d), a) = 1_{[0, b]}(a)$  et donne un descendant d'âge 0 et de trait déterminé par "**héritage + mutations**".
- **meurt** à taux  $D((b, d), a) + cN = 1_{]d, +\infty[}(a) + cN$  où  $N$  désigne la taille de la population.

## Fitness/Sens d'évolution des traits

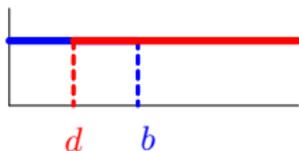
- **Fitness d'un individu de trait  $(b, d)$**  : nombre moyen de descendants de trait  $(b, d)$  d'un individu de trait  $(b, d)$  (en l'absence de mutation),

$$R(b, d) = \int_0^{b \wedge d} B((b, d), a) \exp\left(-\int_0^a D((b, d), \alpha) d\alpha\right) da = b \wedge d$$

- Si  $b < d$  (configuration "ménopause") :  $R(b, d) = b$

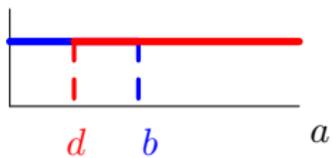


- Si  $b > d$  (configuration "trop jeune pour mourir") :  $R(b, d) = d$ .



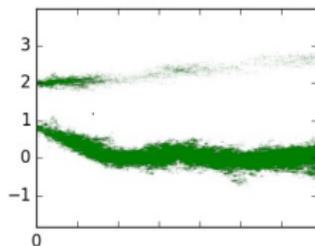
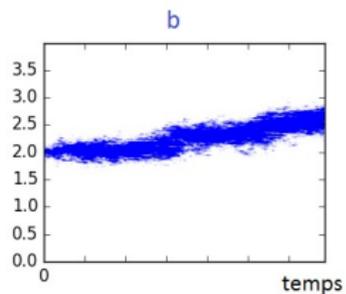
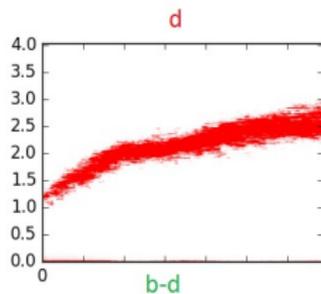
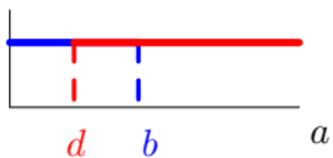
# Simulations

Population initiale monomorphe :



# Simulations

Population initiale monomorphe :

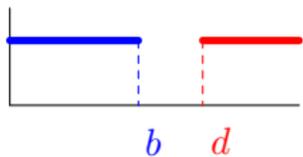


$p = 0.05$      $\text{var} = 0.05$   
 $c = 0.0005$

$b_{\text{ini}} = 2$      $d_{\text{ini}} = 1.2$

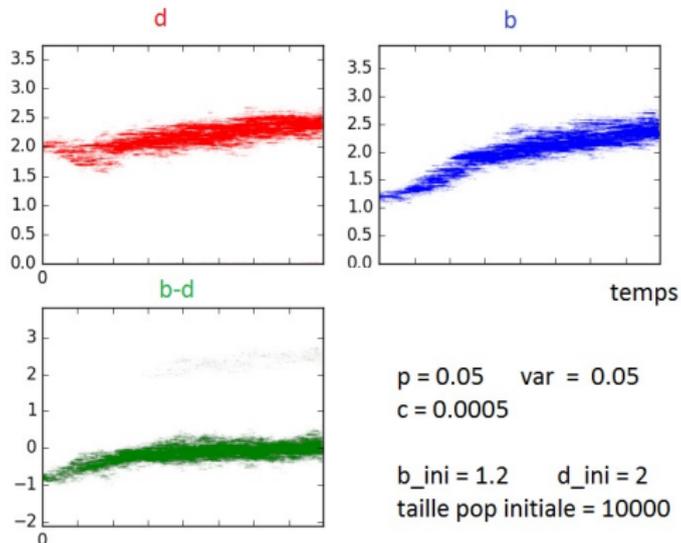
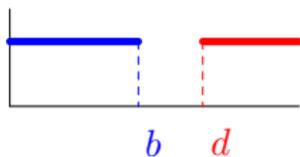
# Simulations

Population initiale monomorphe :



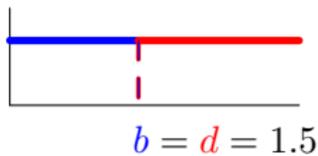
# Simulations

Population initiale monomorphe :



# Simulations

Population initiale monomorphe :

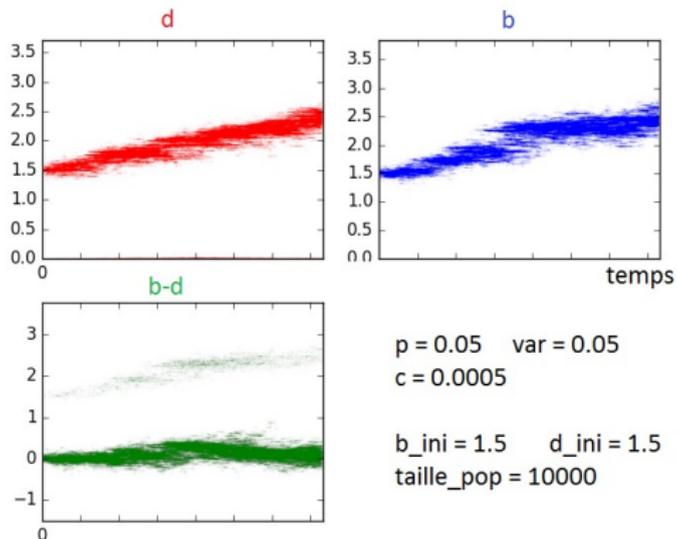


# Simulations

Population initiale monomorphe :



$$b = d = 1.5$$



# Compétition entre deux populations monomorphes

# Compétition entre deux populations monomorphes

## Hypothèses

- *Absence de mutation*
- *Mécanisme d'héritage*
- *Deux grandes populations monomorphes :*
  - *trait  $(b_1, d_1)$  :  $n_1(t, a)$  et  $s_1(t, a)$  densité de nombre respectives des individus de traits  $(b_1, d_1)$  et  $(b_1, 0)$ .*
  - *trait  $(b_2, d_2)$  :  $n_2(t, a)$  et  $s_2(t, a)$  densité de nombre respectives des individus de traits  $(b_2, d_2)$  et  $(b_2, 0)$ .*

# Compétition entre deux populations monomorphes

## Hypothèses

- Absence de mutation
- Mécanisme d'héritage
- Deux grandes populations monomorphes :
  - trait  $(b_1, d_1)$  :  $n_1(t, a)$  et  $s_1(t, a)$  densité de nombre respectives des individus de traits  $(b_1, d_1)$  et  $(b_1, 0)$ .
  - trait  $(b_2, d_2)$  :  $n_2(t, a)$  et  $s_2(t, a)$  densité de nombre respectives des individus de traits  $(b_2, d_2)$  et  $(b_2, 0)$ .

La dynamique  $((n_1, s_1), (n_2, s_2))$  est donnée pour  $i \in \{1, 2\}$  par

$$\begin{cases} \partial_t n_i(t, a) + \partial_a n_i(t, a) = - (1]_{d_i, +\infty[ (a) + c\mathcal{N}(t)) n_i(t, a) \\ \partial_t s_i(t, a) + \partial_a s_i(t, a) = - (1 + c\mathcal{N}(t)) s_i(t, a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_i(t, 0) = \int_0^{b_i \wedge d_i} n_i(t, \alpha) d\alpha \\ s_i(t, 0) = \int_0^{b_i} s_i(t, \alpha) d\alpha + \int_{b_i \wedge d_i}^{b_i} n_i(t, \alpha) d\alpha \end{cases}$$

**Existence et unicité des solutions :** (G.F. Webb [Web])

# Compétition entre deux populations monomorphes

## Conjecture (1)

*Si  $b_1 \wedge d_1 < b_2 \wedge d_2$ , les solutions*

$$((n_1(t, a), s_1(t, a)), (n_2(t, a), s_2(t, a)))_{t \geq 0}$$

*convergent vers l'unique solution stationnaire non triviale  $((0, 0), (\bar{n}_2, \bar{s}_2))$ .*

## Dynamique monomorphe (1)

- $(b, d) \in \mathbb{R}_+^2$  fixé -  $n$  population de trait  $(b, d)$  -  $s$  population de trait  $(b, 0)$

$$\begin{cases} \partial_t n(t, a) + \partial_a n(t, a) = - (1]_{d, +\infty[}(a) + c(N(t) + S(t))) n(t, a) \\ \partial_t s(t, a) + \partial_a s(t, a) = - (1 + c(N(t) + S(t))) s(t, a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n(t, 0) = \int_0^{b \wedge d} n(t, \alpha) d\alpha \\ s(t, 0) = \int_0^b s(t, \alpha) d\alpha + \int_{b \wedge d}^b n(t, \alpha) d\alpha \end{cases}$$

avec  $N(t) + S(t) = \int_0^{+\infty} n(t, \alpha) d\alpha + \int_0^{+\infty} s(t, \alpha) d\alpha$  et  $c > 0$ .

# Dynamique monomorphe (2) : comportement en temps long

## Solutions stationnaires

Si  $b \wedge d > 1$ , il existe une unique solution stationnaire non-triviale  $(\bar{n}, \bar{s})$  qui vérifie pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\bar{s}(a) = \frac{\alpha_{ns}}{\lambda_n - \alpha_s} \bar{n}(a),$$

$$\alpha_{ns} \geq 0, \lambda_n > 0, \alpha_s < 0.$$

# Dynamique monomorphe (2) : comportement en temps long

## Solutions stationnaires

Si  $b \wedge d > 1$ , il existe une unique solution stationnaire non-triviale  $(\bar{n}, \bar{s})$  qui vérifie pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\bar{s}(a) = \frac{\alpha_{ns}}{\lambda_n - \alpha_s} \bar{n}(a),$$

$\alpha_{ns} \geq 0$ ,  $\lambda_n > 0$ ,  $\alpha_s < 0$ .

## Conjecture (2)

Si  $b \wedge d > 1$ ,  $(n(t, \cdot), s(t, \cdot))$  converge dans  $L^1$  vers  $(\bar{n}, \bar{s})$  lorsque  $t \rightarrow \infty$

# Dynamique monomorphe (2) : comportement en temps long

## Solutions stationnaires

Si  $b \wedge d > 1$ , il existe une unique solution stationnaire non-triviale  $(\bar{n}, \bar{s})$  qui vérifie pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\bar{s}(a) = \frac{\alpha_{ns}}{\lambda_n - \alpha_s} \bar{n}(a),$$

$\alpha_{ns} \geq 0$ ,  $\lambda_n > 0$ ,  $\alpha_s < 0$ .

## Conjecture (2)

Si  $b \wedge d > 1$ ,  $(n(t, \cdot), s(t, \cdot))$  converge dans  $L^1$  vers  $(\bar{n}, \bar{s})$  lorsque  $t \rightarrow \infty$

## Idée de démonstration

## Dynamique monomorphe (2) : comportement en temps long

On remarque que

$$\left( \frac{n(t, \cdot)}{N(t)}, \frac{s(t, \cdot)}{S(t)} \right) = \left( \frac{e^{-\lambda_n t} v_n(t, \cdot)}{e^{-\lambda_n t} \int v_n(t, \cdot)}, \frac{e^{-\lambda_s t} v_s(t, \cdot)}{e^{-\lambda_s t} \int v_s(t, \cdot)} \right)$$

où  $(v_n(t, \cdot), v_s(t, \cdot))_{t \geq 0}$  solution d'une edp linéaire de type  
Mckendrick-Von Foerster (Inspiré de H. Leman, S. Méléard, S.  
Mirahimmi (2015) [LMM])

## Dynamique monomorphe (2) : comportement en temps long

On remarque que

$$\left( \frac{n(t, \cdot)}{N(t)}, \frac{s(t, \cdot)}{S(t)} \right) = \left( \frac{e^{-\lambda_n t} v_n(t, \cdot)}{e^{-\lambda_n t} \int v_n(t, \cdot)}, \frac{e^{-\lambda_s t} v_s(t, \cdot)}{e^{-\lambda_s t} \int v_s(t, \cdot)} \right)$$

où  $(v_n(t, \cdot), v_s(t, \cdot))_{t \geq 0}$  solution d'une edp linéaire de type Mckendrick-Von Foerster (Inspiré de H. Leman, S. Méléard, S. Mirahimmi (2015) [LMM])

- Etape 1 : Etude de la limite de  $e^{-\lambda_n t} (v_n(t, \cdot), v_s(t, \cdot))$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

## Dynamique monomorphe (2) : comportement en temps long

On remarque que

$$\left( \frac{n(t, \cdot)}{N(t)}, \frac{s(t, \cdot)}{S(t)} \right) = \left( \frac{e^{-\lambda_n t} v_n(t, \cdot)}{e^{-\lambda_n t} \int v_n(t, \cdot)}, \frac{e^{-\lambda_n t} v_s(t, \cdot)}{e^{-\lambda_n t} \int v_s(t, \cdot)} \right)$$

où  $(v_n(t, \cdot), v_s(t, \cdot))_{t \geq 0}$  solution d'une edp linéaire de type Mckendrick-Von Foerster (Inspiré de H. Leman, S. Méléard, S. Mirahimmi (2015) [LMM])

- Etape 1 : Etude de la limite de  $e^{-\lambda_n t}(v_n(t, \cdot), v_s(t, \cdot))$  quand  $t \rightarrow \infty$ .
- Etape 2 : Etude de la limite des masses  $(N(t), S(t))$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt}(t) = N(t) [\lambda_n + \mathcal{D}_n(t) - c(N(t) + S(t))] \\ \frac{dS}{dt}(t) = S(t) [\alpha_s + \mathcal{D}_s(t) - c(N(t) + S(t))] + (\alpha_{ns} + \mathcal{D}_{ns}(t))N(t) \end{cases}$$

avec  $\mathcal{D}_n(t), \mathcal{D}_s(t), \mathcal{D}_{ns}(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $c, \lambda_n, \alpha_{ns} > 0$  et  $\alpha_s < 0$ .

# Perspectives

- Démontrer les conjectures (1) et (2) sur le comportement en temps long des solutions des edp.
- Justification mathématique des comportements observés sur les simulations.
- Vers un modèle plus réaliste? (Diploïdie, reproduction sexuée)

Merci pour votre attention !



Hélène Leman, Sylvie Méléard, and Sepideh Mirahimmi.  
Influence of a spatial structure on the long time behavior of a  
competitive lotka-volterra type system,.  
*Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 20 (2015),469–493. .



M. Rera, R.I. Clark, and D.W. Walker.  
Intestinal barrier dysfunction links metabolic and inflammatory  
markers of aging to death in drosophila.  
*Proc Natl Acad Sci U S A*, 2012.



Chi Viet Tran.  
Modèles particuliers stochastiques pour des problèmes  
d'évolution adaptative et pour l'approximation de solutions  
statistiques.  
*Mathematics. Université de Nanterre - Paris X*, 2006.



Glenn F. Webb.  
Theory of nonlinear age-dependent population dynamics.  
*volume 89 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied  
mathematics. Marcel Dekker, inc., New York - Basel, 1985.*