Temps d'extinction d'un CSBP avec compétition et en environnement aléatoire.

HÉLÈNE LEMAN, JUAN CARLOS PARDO, JOSÉ LUIS PÉREZ

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT)
Guanajuato, Mexique

Qu'est-ce qu'un CSBP ?

Soit ψ telle que

$$\psi(z) = -bz + \gamma^2 z^2 + \int_0^{+\infty} (e^{-zu} - 1 + zu\mathbb{1}_{\{u\leq 1\}})\mu(du),$$

avec $b, \gamma \in \mathbb{R}$, $\int_0^{\infty}(u \wedge u^2)\mu(du) < +\infty$.

Définition

Un processus de Markov $(Y_t)_{t\geq 0}$ est appelé **CSBP** de **mécanisme de branchement** ψ si pour tout $t \geq 0$, :

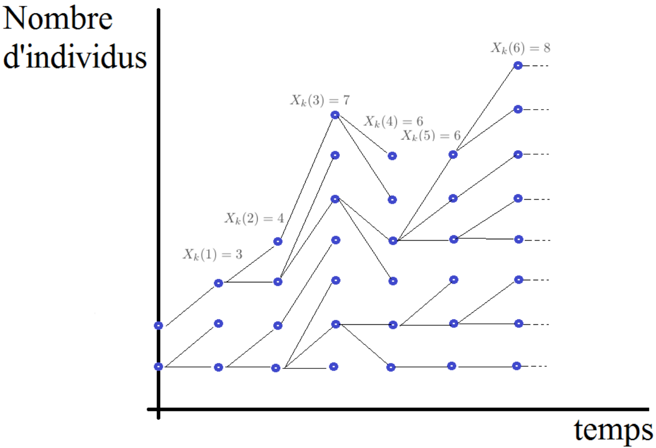
$$\mathbb{E}_x\left[e^{-\lambda Y_t}\right] = e^{-x v_t(\lambda)}, \quad \forall \lambda, x \geq 0,$$

où v est l'unique solution de

$$v_t(\lambda) = \lambda - \int_0^t \psi(v_s(\lambda))\mathrm{d}s, \quad \lambda, t \geq 0.$$

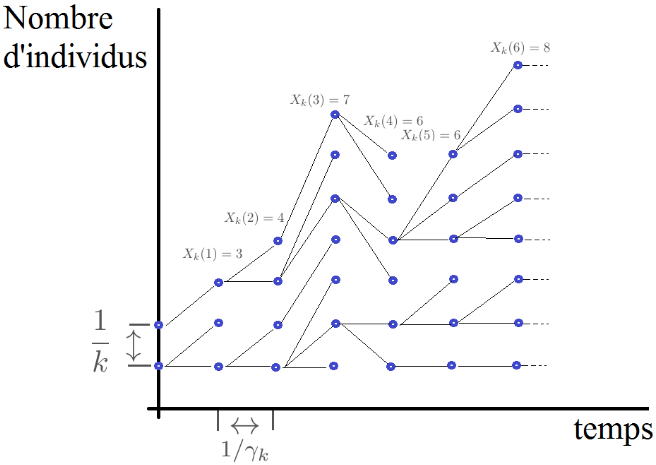
Modèle microscopique : Galton Watson

- Pour tout k, définissons $X_k(n)$ est le **nombre d'individus** à la n$^{\text{ième}}$ génération d'un GW dont la fonction génératrice, caractérisant la reproduction, est g_k,



Modèle microscopique : Galton Watson

- Pour tout k, définissons $X_k(n)$ est le **nombre d'individus** à la n$^{\text{ième}}$ génération d'un GW dont la fonction génératrice, caractérisant la reproduction, est g_k,
- soit une suite réelle γ_k telle que $\gamma_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.



Modèle microscopique : Galton Watson

- Pour tout k, définissons $X_k(n)$ est le **nombre d'individus** à la $\text{n}^{\text{ième}}$ génération d'un GW dont la fonction génératrice, caractérisant la reproduction, est g_k,
- soit une suite réelle γ_k telle que $\gamma_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On s'intéresse à :

$$\boxed{\frac{X_k(\lfloor \gamma_k t \rfloor)}{k}}$$

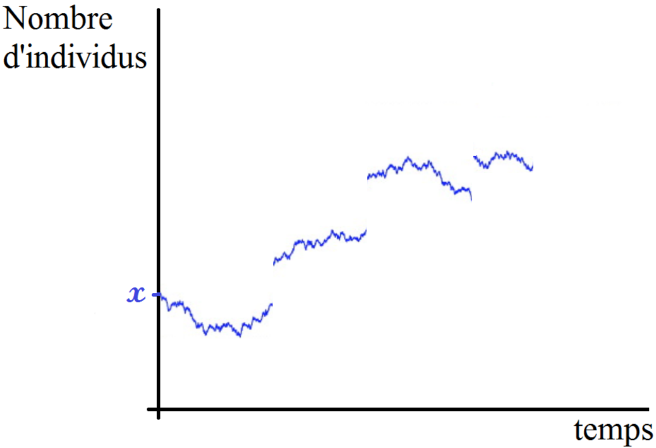
Théorème (Aliev, Shchurenkov (1982) et Li (2006))
Sous certaines hypothèses, et si $(X_k(0)/k) \Rightarrow x(0)$ en loi, il existe un CSBP $(Y_t, t \geq 0)$, de condition initiale $x(0)$, tel que

$$\left(\frac{X_k(\lfloor \gamma_k t \rfloor)}{k}, t \geq 0 \right) \Rightarrow (Y_t, t \geq 0)$$

en loi dans $\mathbb{D}([0, \infty), \mathbb{R}^+)$

$\hookrightarrow$ Feller (1951), Jirina (1958), Lamperti (1967a).

Qu'est-ce qu'un CSBP ?



$\hookrightarrow$ **Propriété de branchement** (Individus indépendants)

$$\tilde{Y}_t^{x} + Y_t^{x'} \overset{\text{(loi)}}{=} Y_t^{x+x'}$$

Solution d'EDS

Soit

$$Y_t = Y_0 + b\int_0^t Y_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sqrt{2\gamma^2 Y_s}\mathrm{d}B_s^{(b)}$$

$$+ \int_0^t \int_{[1,\infty)} \int_0^{Y_{s-}} zN^{(b)}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u) + \int_0^t \int_{(0,1)} \int_0^{Y_{s-}} z\widetilde{N}^{(b)}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u),$$

avec

- $B^{(b)}$ un **mouvement brownien** standard,
- $N^{(b)}$ un **processus ponctuel de Poisson** d'intensité $\mathrm{d}s \otimes \mathrm{d}u \otimes \mu(\mathrm{d}z)$
- $\tilde{N}^{(b)}$ est la mesure compensée de $N^{(b)}$.

Théorème (Fu, Li 2010)

Il existe une unique solution forte de l'EDS précédente, qui est un **CSBP** de mécanisme de branchement

$$\psi(z) = -bz + \gamma^2 z^2 + \int_0^{+\infty} (e^{-zu} - 1 + zu\mathbb{1}_{\{u\leq 1\}})\mu(du).$$

Modèle CBLRE avec compétition

Un tel processus a été introduit par Palau et Pardo (2016) comme la solution de l'EDS

$$
\begin{aligned}
Z_t = Z_0 &+ b\int_0^t Z_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sqrt{2\gamma^2 Z_s}\,\mathrm{d}B_s^{(b)} \\
&+ \int_0^t \int_{[1,\infty)} \int_0^{Z_{s-}} zN^{(b)}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u) + \int_0^t \int_{(0,1)} \int_0^{Z_{s-}} z\widetilde{N}^{(b)}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u),
\end{aligned}
$$

où

- $B^{(b)}$ et $N^{(b)}$ représente le **mécanisme de branchement**,

Modèle CBLRE avec compétition

Un tel processus a été introduit par Palau et Pardo (2016) comme la solution de l'EDS

$$Z_t = Z_0 + b\int_0^t Z_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sqrt{2\gamma^2 Z_s}\mathrm{d}B_s^{(b)} - \int_0^t g(Z_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \int_{[1,\infty)} \int_0^{Z_{s-}} zN^{(b)}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u) + \int_0^t \int_{(0,1)} \int_0^{Z_{s-}} z\widetilde{N}^{(b)}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u),$$

où

- $B^{(b)}$ et $N^{(b)}$ représente le **mécanisme de branchement**,
- g représente la **compétition**, g est croissante et $g(0) = 0$,

↪ Compétition : Logistic Feller diffusion, Lambert (2005)...

⇒ **Plus de propriété de branchement**

Modèle CBLRE avec compétition

Un tel processus a été introduit par Palau et Pardo (2016) comme la solution de l'EDS

$$Z_t = Z_0 + b\int_0^t Z_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sqrt{2\gamma^2 Z_s}\mathrm{d}B_s^{(b)} - \int_0^t g(Z_s)\mathrm{d}s + \int_0^t Z_{s-}\mathrm{d}S_s^{(e)}$$
$$+ \int_0^t \int_{[1,\infty)} \int_0^{Z_{s-}} zN^{(b)}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u) + \int_0^t \int_{(0,1)} \int_0^{Z_{s-}} z\widetilde{N}^{(b)}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u),$$

où

- $B^{(b)}$ et $N^{(b)}$ représente le **mécanisme de branchement**,
- g représente la **compétition**, g est croissante et $g(0) = 0$,
- $S^{(e)}$ représente l'**environnement extérieur**.

$\hookrightarrow$ Compétition : Logistic Feller diffusion, Lambert (2005)...
$\hookrightarrow$ Environnement : Smith-Wilkinson (1969), Bansaye et al (2013)...

$\Rightarrow$ **Plus de propriété de branchement**

Modèle CBLRE avec compétition

▷ $S^{(e)}$ est un processus de Lévy indépendant de $B^{(b)}$ et $N^{(b)}$ qui s'écrit comme suit

$$S_t^{(e)} = at + \sigma B_t^{(e)} + \int_0^t \int_{(-1,1)^c} (e^z - 1) N^{(e)}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) + \int_0^t \int_{(-1,1)} (e^z - 1) \tilde{N}^{(e)}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z),$$

avec

- $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$,
- $B^{(e)} = (B_t^{(e)}, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien standard
- et $N^{(e)}$ est un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ d'intensité $\mathrm{d}s \otimes \pi(\mathrm{d}z)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge z^2) \pi(\mathrm{d}z) < \infty \quad \text{et} \quad \int_{(-1,+\infty)} |z| \pi(\mathrm{d}z) < +\infty.$$

Modèle CBLRE avec compétition

▷ $S^{(e)}$ est un processus de Lévy indépendant de $B^{(b)}$ et $N^{(b)}$ qui s'écrit comme suit

$$S_t^{(e)} = at + \sigma B_t^{(e)} + \int_0^t \int_{(-1,1)^c} (e^z - 1) N^{(e)}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) + \int_0^t \int_{(-1,1)} (e^z - 1) \tilde{N}^{(e)}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z),$$

avec

- $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$,
- $B^{(e)} = (B_t^{(e)}, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien standard
- et $N^{(e)}$ est un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ d'intensité $\mathrm{d}s \otimes \pi(\mathrm{d}z)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge z^2) \pi(\mathrm{d}z) < \infty \quad \text{et} \quad \int_{(-1,+\infty)} |z| \pi(\mathrm{d}z) < +\infty.$$

• **But** : Etude du **temps d'extinction** du CBLRE avec compétition

Temps d'extinction

▷ On suppose que ψ satisfait la **condition de Grey**, i.e.

$$\int^{\infty} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\psi(\lambda)} < \infty,$$

Important : La condition de Grey est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un CSBP en environnement aléatoire s'éteigne en temps fini avec une probabilité positive (He et al. (2016)).

Temps d'extinction

- On suppose que ψ satisfait la **condition de Grey**, i.e.

$$\int^{\infty} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\psi(\lambda)} < \infty, \quad \text{et} \quad \int_{(0,\infty)} (1 \wedge z^2)\mu(\mathrm{d}z) < \infty.$$

- **(H1)** Il existe $\theta \geq 0$ tel que pour tous $z, y \geq 0$,

$$g(z) - g(z+y) \leq (\theta - b)y.$$

- **(H2)** Il existe $a_0 > 0$ pour lequel $g(y) > 0$ dès que $y \geq a_0$ et

$$\int_{a_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} < +\infty.$$

Théorème

Soit $T_0^Z = \inf\{t \geq 0, Z_t = 0\}$, sous les hypothèses précédentes

$$\sup_{x \geq 0} \mathbb{E}_x\left[T_0^Z\right] < +\infty.$$

$\hookrightarrow$ Le (2014), Le et Pardoux (2015) (sans environnement)

Cas logistique et environnement brownien

On s'intéresse maintenant au cas particulier suivant :

- d'une **Compétition logistique**, i.e.

$$\boxed{g(z) = cz^2}, \quad \text{avec} \quad c \geq 0,$$

- et d'un **environnement brownien**, i.e.

$$\boxed{S_t^{(e)} = \sigma B_t^{(e)}},$$

avec $\sigma \geq 0$ et $B^{(e)}$ un mouvement brownien standard.

Changement de temps

Soit Z un CSBP avec compétition **logistique** dans un environnement aléatoire **brownien** avec $Z_0 = x$. Posons $\forall t > 0$,

$$C_t = \int_0^{t \wedge T_0^Z} Z_s \mathrm{d}s, \qquad \text{et} \qquad \eta_t = \inf\{u \geq 0, C_u \geq t\},$$

l'inverse continu à droite de C.

Théorème

- Le processus $$R_t = \begin{cases} Z_{\eta_t}, & \text{si } 0 \leq t < C_\infty \\ 0, & \text{si } C_\infty < \infty \text{ et } t \geq C_\infty, \end{cases}$$

est l'unique solution forte de l'EDS

$$\mathrm{d}R_t = \mathbb{1}_{\{R_{r-}>0 : r \leq t\}} \mathrm{d}X_t - \mathbb{1}_{\{R_{r-}>0 : r \leq t\}} c R_t \mathrm{d}t + \mathbb{1}_{\{R_{r-}>0 : r \leq t\}} \sigma \sqrt{R_t} \mathrm{d}W_t,$$

avec W un mouvement brownien standard, et X un processus de Lévy.

Changement de temps

Soit Z un CSBP avec compétition **logistique** dans un environnement aléatoire **brownien** avec $Z_0 = x$. Posons $\forall t > 0$,

$$C_t = \int_0^{t \wedge T_0^Z} Z_s \mathrm{d}s, \qquad \text{et} \qquad \eta_t = \inf\{u \geq 0, C_u \geq t\},$$

l'inverse continu à droite de C.

Théorème

- Le processus $R_t = \begin{cases} Z_{\eta_t}, & \text{si } 0 \leq t < C_\infty \\ 0, & \text{si } C_\infty < \infty \text{ et } t \geq C_\infty, \end{cases}$

est l'unique solution forte de l'EDS

$$\mathrm{d}R_t = \mathbb{1}_{\{R_{r-}>0 : r \leq t\}} \mathrm{d}X_t - \mathbb{1}_{\{R_{r-}>0 : r \leq t\}} c R_t \mathrm{d}t + \mathbb{1}_{\{R_{r-}>0 : r \leq t\}} \sigma \sqrt{R_t} \mathrm{d}W_t,$$

avec W un mouvement brownien standard, et X un processus de Lévy.

$\hookrightarrow$ **Avantage** : Si X est un subordinateur, alors R est un CSBP avec immigration (bien connu : Li (1996),...).
$\hookrightarrow$ **Déduction** : extinction de Z en temps fini ?, existence d'une mesure invariante ?...

Temps d'atteinte d'un niveau

But : donner une formule explicite de la transformée de Laplace de

$$T_a^Z := \inf\{t \geq 0, Z_t \leq a\},$$

Supposons de plus que $c > 0, \sigma > 0$ et que

$$\int_0 \frac{\psi(z)}{cz} \mathrm{d}z < +\infty.$$

Théorème

Si la condition de Grey est vérifiée ($\int^\infty \psi^{-1}(z)\mathrm{d}z < +\infty$), alors il existe une fonction $(z,u) \mapsto h(z,u)$ positive, telle que

$$f(\lambda, x) := 1 + \lambda \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xz}}{cz + \frac{\sigma^2}{2} z^2} \int_0^z h(z,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}z$$

est bien définie pour tout $x, \lambda \geq 0$ et pour tout $x \geq a \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-\lambda T_a^Z}\right] = \frac{f(\lambda, a)}{f(\lambda, x)}.$$

Temps d'atteinte d'un niveau

But : donner une formule explicite de la transformée de Laplace de

$$T_a^Z := \inf\{t \geq 0, Z_t \leq a\},$$

Supposons de plus que $c > 0, \sigma > 0$ et que $\int_0 \frac{\psi(z)}{cz} \mathrm{d}z < +\infty$.

Théorème

Si la condition de Grey est vérifiée ($\int^\infty \psi^{-1}(z)\mathrm{d}z < +\infty$), alors il existe une fonction $(z, u) \mapsto h(z, u)$ positive, telle que

$$f(\lambda, x) := 1 + \lambda \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xz}}{cz + \frac{\sigma^2}{2} z^2} \int_0^z h(z, u) \mathrm{d}u \mathrm{d}z$$

est bien définie pour tout $x, \lambda \geq 0$ et pour tout $x \geq a \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-\lambda T_a^Z} \right] = \frac{f(\lambda, a)}{f(\lambda, x)}.$$

$\hookrightarrow$ Lambert (2005) (temps d'extinction sans environnement), Duhalde et al (2014) (sans environnement, sans compétition)...