# Modèle neutre avec variations environnementales


Université Clermont Ferrand

*Personne Arnaud*
*sous la direction de Guillin Arnaud et Jabot Franck*


31 mai 2017

# Modèles Neutres

Ces modèles décrivent l'évolution d'une communauté (cohabitation de plusieurs espèces) au cours du temps.

- Aucune espèce n'est favorisée
- Au sein d'une même espèce aucun des individus n'est favorisé
- La taille de la population ne change pas au cours du temps (population saturée)

La composition de la communauté est uniquement déterminée par la dispersion stochastique des individus.

# Abondance et indice de Simpson

Comment comparer des abondances entre elles ?

Indice de Simpson : La probabilité que deux individus pris au hasard soient de la même espèce.

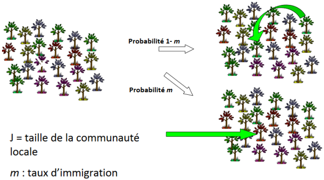
- Indice de Simpson au temps t :

$$S_t = \sum_{especes} \frac{X_t^i(X_t^i - 1)}{J(J-1)}$$

  où $X_t^i$ est le nombre d'individus de l'espèce i.

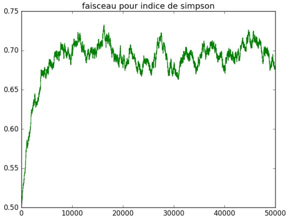
- $S_t$ proche de 1 signifie qu'une espèce envahie la communauté, $S_t$ proche de 0 signifie qu'il y a beaucoup d'espèces représentées par peu d'individus.

# Le modèle



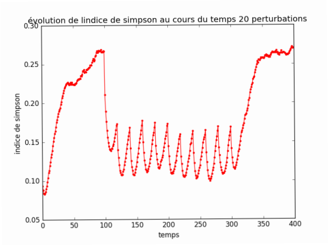

- On reprend le modèle de Hubbell.
- Avec 4 espèces (X,Y,Z,R) en proportions $(X_t, Y_t, Z_t, 1 - X_t - Y_t - Z_t)$
- L'espèce X a une fitness de 1+s.
- A chaque événement, un individu est choisi uniformément pour mourir. Un autre sera choisi pour le remplacer :
  - il viendra d'un réservoir avec probabilité m.
  - ou sera le fils d'un individu de la communauté avec probabilité (1-m). Ce dernier sera de l'espèce X,Y,Z et avec probabilité $\frac{X_t(1+s)}{1+X_t}, \frac{Y_t}{1+X_t}, \frac{Z_t}{1+X_t}$.
- Au bout d'un certain nombre d'événements l'avantage sélectif change d'espèce.

## Indice de Simpson dans le cas du modèle de Hubbell :




$$S_{lim} = \frac{1}{1+\theta} \text{ avec } \theta = \frac{(J-1)\times m}{1-m}$$

## Indice de Simpson lors de changements de fitness :




# Mise en équations

Notons $X_t, Y_t, Z_t$ les variables aléatoires représentant les proportions de chaque espèce dans la communauté et posons $\Delta = \frac{1}{J}$ et considérons que $s$ indépendant de $t$.

$$\begin{cases} P(X_{n+1} = x + \Delta | X_n = x) = (1-x)\Big(mp_x + (1-m)\dfrac{x(1+s)}{1+xs}\Big) \\ P(X_{n+1} = x - \Delta | X_n = x) = x\Big(m(1-p_x) + (1-m)\dfrac{(1-x)}{1+xs}\Big) \\ P(Y_{n+1} = y + \Delta | X_n = x, Y_n = y) = (1-y)\Big(mp_y + (1-m)\dfrac{y}{1+xs}\Big) \\ P(Y_{n+1} = y - \Delta | X_n = x, Y_n = y) = y\Big(m(1-p_y) + (1-m)\dfrac{(1-y+sx)}{1+xs}\Big) \end{cases}$$

où $p_x, p_y, p_z$ sont les proportions de chaque espèce dans le réservoir.

# Remarque

A priori le vecteur d'abondance est une chaîne de Markov, dont on peut calculer les probabilités de transitions vers les différents états.

Cependant pour un vecteur de taille s (s espèces), il y a environ $\binom{J+S-1}{S-1}$ états possibles (S étant le nombre d'espèces).

Alors pour $J$ et $s$ grands la matrice d'états est de dimension trop grande et ne peut être explicitement calculée.

Dans la suite nous allons nous intéresser à ce qui se passe quand J devient très grand. Nous allons voir que notre système est géré par une équation différentielle stochastique en grande population.

# En grande population

Si J devient très grand, l'effet sur la population d'un événement isolé devient négligeable.
En effet, on peut montrer que :

$$E[X_{n+1} - Xn|X_n = x] = \frac{1}{J}\big(m(p_x - x) + (1-m)\frac{x(1-x)s}{(1+xs)}\big)$$

$$Var[X_{n+1} - Xn|X_n = x] = \frac{1}{J^2}\big(m(p_x + x - 2xp_x) - (1-m)\times \frac{x(1-x)(2+s)}{1+sx} - (m(p_x - x) + (1-m)\frac{x(1-x)s}{(1+xs)})^2\big).$$

Ainsi si on veut pouvoir observer un phénomène non trivial en grande population on ne doit plus regarder un événement isolé mais un certain nombre d'événements simultanément.
Deux choix vont alors être envisageables :

# Échelle en $\frac{1}{J}$.

En posant $\Delta_t = \frac{1}{J}$ et $n = tJ$ le système précédent converge en loi quand J tend vers l'infini vers le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} dX_t = (\dfrac{X_t(1-X_t)s}{1+X_t s} + m(p_x - \dfrac{X_t(1+s)}{1+sX_t}))dt \\ dY_t = (-\dfrac{sY_tX_t}{1+X_t s} + m(p_y - \dfrac{Y_t}{1+sX_t})dt \\ dZ_t = (-\dfrac{sZ_tX_t}{1+X_t s} + m(p_z - \dfrac{Z_t}{1+sX_t})dt \end{cases}$$

Ce système est déterministe. Sous réserve de connaître la quantité $X_t$, solution de la première équation. Le système est composé d'équations autonomes.

# Par la suite...

On connaît dans ce cas l'équation différentielle qui gère à cette échelle l'évolution de la communauté pour s fixé.

Supposons maintenant s aléatoire, peut on trouver un taux de sauts et une loi pour s de sorte à ce que le PDMP dirigé par l'équation différentielle précédente ait en moyenne un indice de Simpson plus faible que celui attendu ?

# Une échelle en $\frac{1}{J^2}$.

En posant $\Delta_t = \frac{1}{J^2}$ et $n = tJ^2$ et en supposant que $s = \frac{s'}{J}$, $m = \frac{m'}{J}$ le système précédent converge en loi quand J tend vers l'infini vers le système différentiel suivant :

$$\left\{ d\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \\ Z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m'(p_x - X_t) + s'X_t(1-X_t) \\ m'(p_y - Y_t) - s'X_tY_t \\ m'(p_z - Z_t) - s'X_tZ_t \end{pmatrix} dt + \sigma(X_t, Y_t, Z_t)dB_t \right.$$

où

$$\sigma^T \times \sigma(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} x(1-x) & -x(1-x)y(1-y) & -x(1-x)z(1-z) \\ -x(1-x)y(1-y) & y(1-y) & -y(1-y)z(1-z) \\ -x(1-x)z(1-z) & -z(1-z)y(1-y) & z(1-z) \end{pmatrix}$$

# Discussions

- On obtient une partie stochastique non triviale.
- Quelle est l'évolution de l'indice de Simpson (en moyenne) au cours du temps ?
- Si m vaut 0 les états 1 et 0 sont absorbants, quels sont les temps d'atteintes ?
- Si m est non nul la loi du vecteur d'abondance converge vers une mesure invariante. Quelle est la forme de cette mesure, quelle est la vitesse de convergence ?

# Le cas de deux espèces avec m=0.

On suppose m=0 et on note $X_t$ la proportion de la première espèce, $S_t$ l'indice de Simpson au temps $t$. $S_t = X_t^2 + (1 - X_t)^2$
$X_t$ est solution de l'EDS :

$$d(X_t) = sX_t(1 - X_t)dt + \sqrt{2X_t(1 - X_t)}dB_t \tag{1}$$

.
et $S_t$ vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} dS_t =& 4X_t(1 - X_t) \times \left(1 + s(X_t - \frac{1}{2})\right)dt + dM_t & (2) \\ =& -2sX_t(S_t - X_t) - 2S_t + 2dt + dM_t & (3) \end{aligned}$$

Si $s < 2$ alors $E[S_t]$ est croissante et un changement de fitness ne pourra en aucun cas faire chuter l'indice de Simpson moyen.
Si $s > 2$, pour certaines valeurs de $X_t$, $E[S_t]$ sera décroissante.

# Le calcul des moments de $X_t$

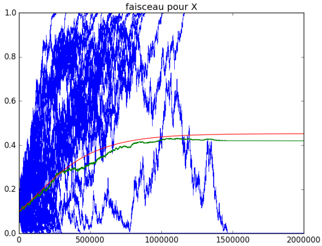
Notons $M_i = E[X_t^i]$. On ne peut directement calculer les $M_i$ car la dérivée de chaque moment s'exprime en fonction des moments d'ordre supérieur. En revanche on peut l'approcher par un système linéaire.

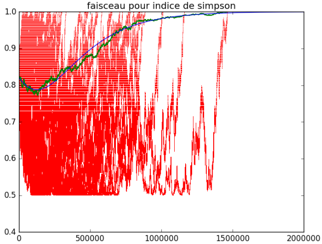
$$SoitA_n = \begin{pmatrix} s & -s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2(s-1) & -2s & 0 & & \vdots \\ 0 & 6 & 3(s-2) & -3s & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots\ 0 & (n-2)(n-1) & (n-1)\big(s-(n-2)\big) & & -(n-1)s \\ 0 & \cdots\ 0 & 0 & n(n-1) & & -n(n-1) \end{pmatrix}$$

Alors la $j$ième coordonnée de la solution du système linéaire d'équations différentielles ordinaires suivant converge quand $n$ tend vers l'infini vers le moment d'ordre $j$ de $X_t$.

$$d \begin{pmatrix} M_1 \\ . \\ . \\ . \\ M_n \end{pmatrix} = A_n \times \begin{pmatrix} M_1 \\ . \\ . \\ . \\ M_n \end{pmatrix}$$

# Simulations




(ici s=6, J=1000, N=200,m=0)

- Simulation de $X_t$ et approximation du moment d'ordre 1.
- Simulation de $S_t$ et approximation des moments d'ordre 1 et 2.

Merci pour votre attention !