Modélisation de la dynamique d'une métacommunauté forestière

Chaire Modélisation Mathématique et Biodiversité

le 15 septembre 2020

Encadré par O.Goubet (LAMFA) et D.Closset-Kopp (EDYSAN).

Vocabulaire

- Population
- Communauté
- Métacommunauté

Théorie neutraliste d'Hubbell (2000)

Hypothèses :

- espèces de même *fitness*,
- taille de la communauté, N, constante,
- même niveau trophique.

Remplacement de chaque mort en tirant un descendant au hasard parmi la communauté à l'état précédant.

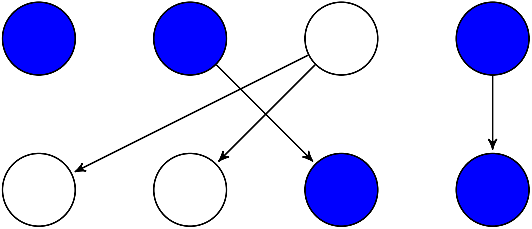
Variable explicative : abondance relative des espèces.

Modèle de Wright-Fisher

Nombre d'individus constant : N.

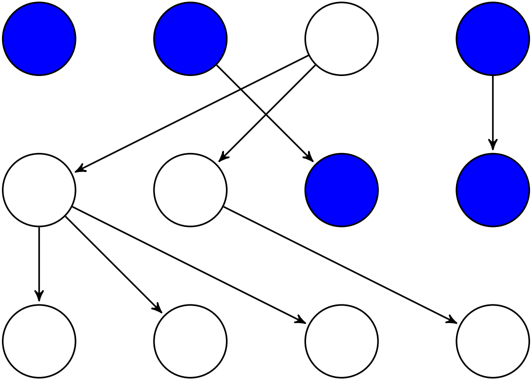
Modèle de Wright-Fisher

Nombre d'individus constant : N.



Modèle de Wright-Fisher

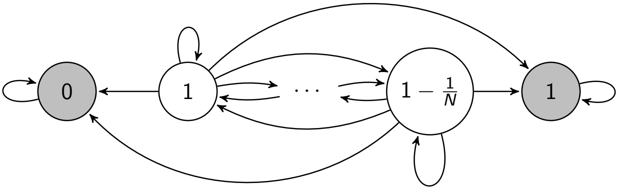
Nombre d'individus constant : N.



Chaîne de Wright-Fisher

Soit Y_N^n la proportion d'individus α au temps n.
$(Y_N^n)_n$ est une chaîne de Markov homogène. Pour f continue sur $[0,1]$

$$\mathbb{E}(f(Y_N^{n+1})|Y_N^n = x) = B_N(f)(x) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k (1-x)^{N-k} f(\frac{k}{N}).$$



Limite en grande population

Soit $X_N = (X_N^t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant, pour $t = \frac{n}{N}$, $X_N^t = Y_N^n$.

On note pour $f \in C^2([0,1])$ telle que $f(0) = f(1) = 0$

$$u_N^f(t,x) = \mathbb{E}_x(f(X_N^t)). \tag{1}$$

Proposition

Pour tout $f \in C^2([0,1])$, on a

$$N(B_N - I)f(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} Lf(x) = \frac{x(1-x)}{2} f''(x). \tag{2}$$

Théorème

La suite $(u_N^f)_N$ converge uniformément vers la solution faible de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u = Lu, \\ u(0,x) = f(x). \end{cases} \tag{3}$$

Temps moyen d'extinction d'une espèce

On note $\tau_N(x)$ le temps moyen d'extinction d'une espèce dans une communauté de taille N partant de x. On a pour tout $x \in (0,1)$

$$-N(B_N - I)\tau_N(x) = 1 \tag{4}$$

Théorème

La suite $(\tau_N)_N$ converge uniformément vers τ solution faible de l'équation

$$\begin{cases} -L\tau = 1, \\ \tau(0) = \tau(1) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

D'où $\tau(x) = -2(x \ln(x) + (1-x)\ln(1-x))$.

Modèle de métacommunauté.

Deux patchs de tailles $N_1 = N$ et $N_2 = d.N$ avec $0 < d \leq 1$.

On note $X_N^t = (X_{N,1}^t, X_{N,2}^t)$ la proportion d'individus α dans la métacommunauté.

À chaque pas de temps $\delta t = \frac{1}{N}$, on effectue successivement

- étape d'échange d'individus entre les patchs :

$$X_N^{t+\frac{\delta t}{2}} = \varphi_N(X_N^t),$$

- étape de Wright-Fisher pour chaque patch indépendamment des autres :

$$\mathcal{L}(X_{N,i}^{t+\delta t}) = \mathcal{B}(N_i, X_{N,i}^{t+\frac{\delta t}{2}}). \tag{6}$$

Fonction d'échange

Soit φ une fonction d'échange. On impose

- $\varphi\binom{1}{1} = \binom{1}{1}$ et $\varphi\binom{0}{0} = \binom{0}{0}$,
- $\varphi([0,1]^2) \subseteq [0,1]^2$,
- $\varphi_1(x) + d\varphi_2(x) = x_1 + dx_2$.

De plus

- $\mathbb{E}(X_N^{t+\delta t} - X_N^t) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$,
- $\mathbb{V}_x(X_N^t) \in (0,\infty)$.

D'où

Echange linéaire faible

Si φ_N linéaire, alors

$$\varphi_N = I - \frac{\kappa}{N} M, \quad \kappa < N,$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} d & -d \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Limite en grande population

On appelle $X_N = (X_N^t)_t$ le processus continue obtenu à partir de la chaîne et $u_N^f(t,x) = \mathbb{E}_x(f(X_N^t))$. On a

Théorème

La suite $(u_N^f)_N$ converge uniformément vers la solution faible de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u = Lu, \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} Lf(x) &= -\kappa(Mx, \nabla f)(x) + \sum_{i=1,2} \frac{x_i(1-x_i)}{2d_i} \partial_{ii}^2 f(x) \\ &= -\kappa(x_1 - x_2)(d\partial_1 f(x) - \partial_2 f(x)) + \sum_{i=1,2} \frac{x_i(1-x_i)}{2d_i} \partial_{ii}^2 f(x) \end{aligned}$$

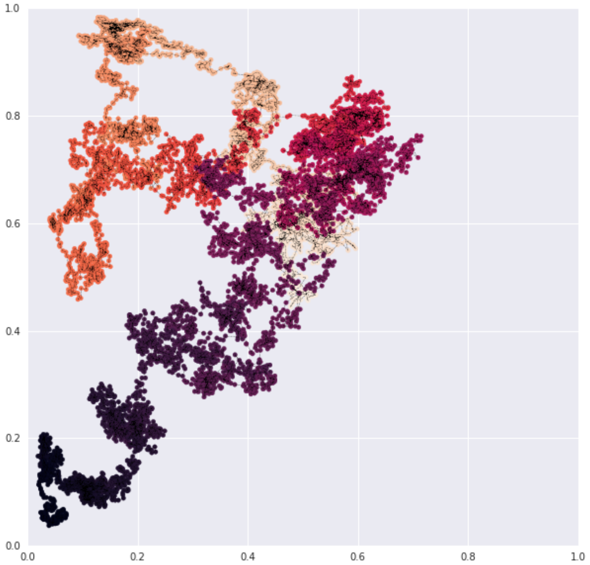
Principe du maximum

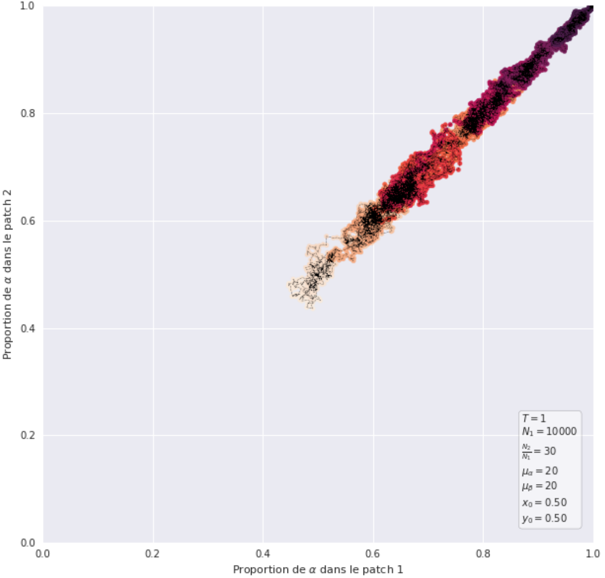
Théorème

Soit $f \in C^2([0,1]^2)$ telle que $f\binom{0}{0} = f\binom{1}{1} = 0$.
Soit $u \in C(\mathbb{R}^+, D(L))$ vérifiant

- $\partial_t u - Lu = 0$,
- $u(0,x) = f(x) \geq 0$ sur $[0,1]^2$,

alors $u(t,x) \geq 0$.


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0



Proportion de α dans le patch 2
Proportion de α dans le patch 1
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
$T = 1$
$N_1 = 10000$
$\frac{N_2}{N_1} = 30$
$\mu_\alpha = 20$
$\mu_\beta = 20$
$x_0 = 0.50$
$y_0 = 0.50$

Temps moyen d'extinction

Théorème

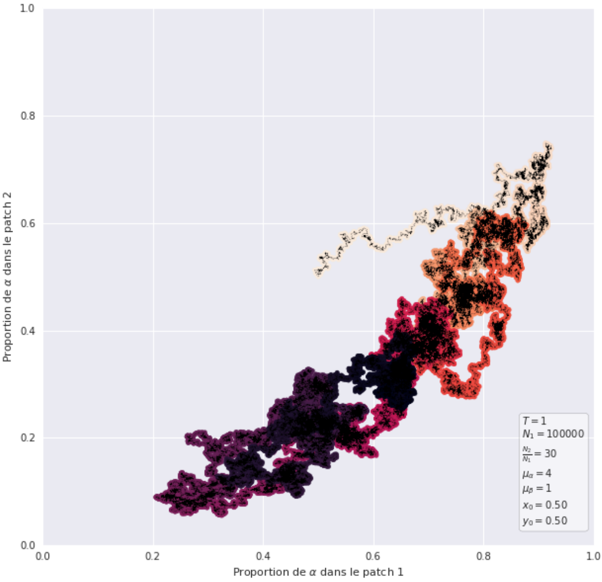
La suite des temps d'extinction $(\tau_N)_N$ converge uniformément vers la solution faible de

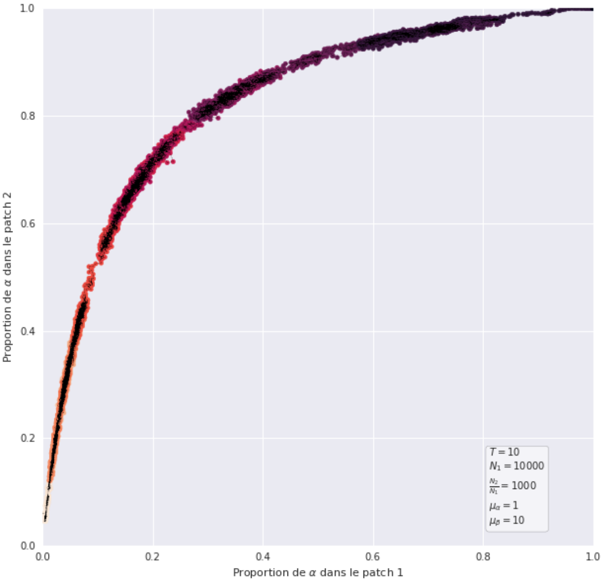
$$\begin{cases} -L\tau = 1, \\ \tau((0,0)) = \tau((1,1)) = 0. \end{cases}$$

Echange réaliste

On suppose que α produit des graines à un taux μ et β à un taux ν.
On définit une fonction d'échange $\varphi_N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non linéaire vérifiant

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \text{probabilité de remplacer un individu par l'espèce } \alpha \text{ sur le } \Pi_1 \\
&= \frac{\text{graines de } \alpha \text{ sur } \Pi_1}{\text{graines de } \alpha \text{ sur } \Pi_1 + \text{graines de } \beta \text{ sur } \Pi_1} \\
&= \frac{x_1(1-\frac{\mu d}{N}) + x_2\frac{\mu d}{N}}{x_1(1-\frac{\mu d}{N}) + x_2\frac{\mu d}{N} + (1-x_1)(1-\frac{\nu d}{N}) + (1-x_2)\frac{\nu d}{N}}.
\end{aligned}$$

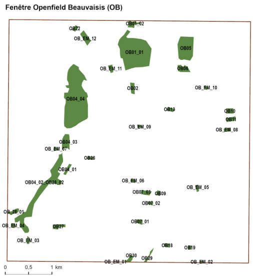

1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Proportion de α dans le patch 2
Proportion de α dans le patch 1
$T = 1$
$N_1 = 100000$
$\frac{N_2}{N_1} = 30$
$\mu_\alpha = 4$
$\mu_\beta = 1$
$x_0 = 0.50$
$y_0 = 0.50$

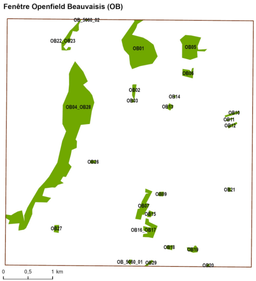


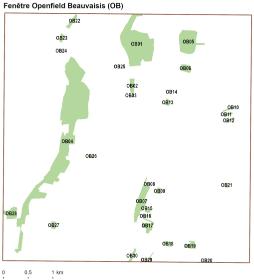
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Proportion de α dans le patch 2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Proportion de α dans le patch 1
$T = 10$
$N_1 = 10000$
$\frac{N_2}{N_1} = 1000$
$\mu_\alpha = 1$
$\mu_\beta = 10$

Données réelles

- 30 patchs sur un carré de $5km^2$ dans le Beauvaisis,
- 300 espèce d'herbacées,
- présence/absence des espèces sur chaque patch en 2000,
- $N \simeq 10^6$,
- histoire du paysage en $1850, 1950$ et 2000.







Fonction de distance

Pour l'étape d'échange, on utilise une matrice $A = (a_{ij})$ telle que

$$a_{ij} = \beta \exp(-\alpha d_{ij}) \frac{A_j}{A_i}, \;\; i \neq j \tag{7}$$

et

$$a_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} a_{ij}. \tag{8}$$

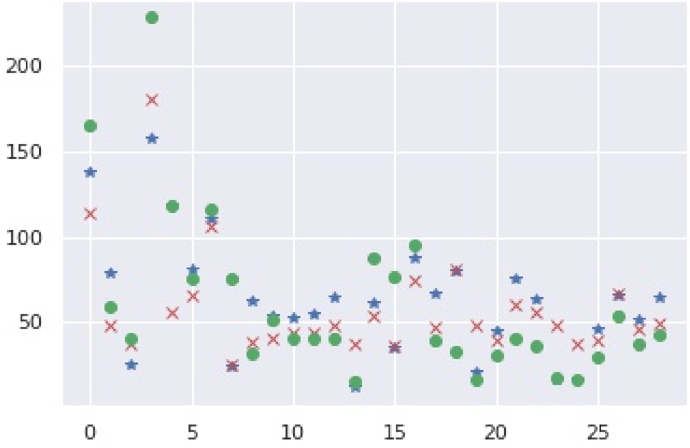
En théorie un patch doit acceuillir $R = \log(\gamma A^{\delta})$ espèces, où A est l'aire du patch et γ, δ des paramètres à déterminer empiriquement.

Simulation sur 400 ans, sans prise en compte de l'histoire du paysage

x : richesse observée, * : richesse théorique, • : richesse simulée

Simulation sur 400 ans, avec prise en compte de l'histoire du paysage

x : richesse observée, * : richesse théorique, • : richesse simulée



Merci de votre attention.