

Graphons et modèles non-homogènes d'épidémies

P.-A. Zitt

LAMA, Université Gustave Eiffel

École de printemps de la chaire MMB

Première partie

Graphons

Problème

On cherche à modéliser :

- De grands graphes
- plus ou moins denses
- pas forcément connus exactement, et/ou où la connaissance exacte n'est pas forcément pertinente

Historique et références

- Réf. principale : synthèse de travaux de Lovász avec Borgs, Chayes, Schrijver, Sós, Szegedy, Vesztergombi... Questions de combinatoire, de théorie des graphes ; liens avec la physique statistique,...

L. Lovász. *Large networks and graph limits*. American Mathematical Society colloquium publications 60. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 2012

- Généralisation du cadre, nombreux exemples et contre-exemples :

S. Janson. *Graphons, cut norm and distance, couplings and rearrangements*. NYJM Monographs. New York Journal of Mathematics, 2013

- Aspects algorithmique/statistiques pour le SBM (identification de communautés)

E. Abbé. « Community detection and stochastic block models : recent developments ». *The Journal of Machine Learning Research* 18 (2018)

Point de vue du cours : les graphons comme modèles/usine à graphes aléatoires.

Plan

- 1 Une usine à graphes aléatoires
 - Stochastic Block Model
 - Graphons
 - Quelle égalité ? Modèles équivalents
- 2 Proximité et convergence de grands graphes
 - La « limite à gauche »
 - Quelles distances ?
- 3 Trois grands résultats de la théorie
 - Les graphes $\mathbb{G}(n, W)$ convergent
 - Caractérisation de la convergence
 - Compacité de l'espace des graphons
- 4 Conclusion

Plan

- 1 Une usine à graphes aléatoires
 - Stochastic Block Model
 - Graphons
 - Quelle égalité ? Modèles équivalents
- 2 Proximité et convergence de grands graphes
 - La « limite à gauche »
 - Quelles distances ?
- 3 Trois grands résultats de la théorie
 - Les graphes $\mathbb{G}(n, W)$ convergent
 - Caractérisation de la convergence
 - Compacité de l'espace des graphons
- 4 Conclusion

Erdős—Rényi

Modèle (Graphe d'Erdős—Rényi)

Le modèle le plus simple de graphe aléatoire, $\mathbb{G}(n, p)$:

- *n sommets/individus étiquetés $\{1, \dots, n\}$,*
- *Pour chaque paire $\{i, j\}$, on met une arête entre i et j , indépendamment, avec probabilité p .*



Représentation graphe pour k petit. Représentation matrice d'adjacence pour n grand.

Erdős—Rényi

- Graphe grand pour n grand,
- Graphe aléatoire,
- **Dense** : $\mathbf{E}[\text{\#arêtes}] = pn^2 \propto (\text{\#sommets})^2$,
- **Homogène** : “tous les (groupes de) sommets se ressemblent”

Erdős—Rényi : preuve

Définition (Homogénéité/*quasi-randomness*)

Pour tout A, B disjoints, le nombre (aléatoire !) d'arêtes entre A et B vérifie :

$$e(A, B) = p\#A\#B + o(n^2).$$

- « Le nombre de connexions entre ensembles ne dépend que de la taille des ensembles » : si $\#A = \#A'$ et $\#B = \#B'$,

$$e(A, B) \approx e(A', B) \approx e(A', B').$$

- Formellement, convergence en proba :

$$\frac{1}{n^2} \sup_{A, B} |e(A, B) - p\#A\#B| \rightarrow 0.$$

Erdős—Rényi : homogénéité

$$|e(A, B) - p\#A\#B| = \left| \sum_{i \in A, j \in B} (X_{ij} - \mathbf{E}[X_{ij}]) \right|$$

Somme de $\#A\#B$ v.a. indépendantes bornées ; Hoeffding :

$$\mathbf{P} [|e(A, B) - p\#A\#B| \geq t] \leq 2 \exp(-2t^2 / (\#A\#B)).$$

Erdős—Rényi : homogénéité

$$|e(A, B) - p\#A\#B| = \left| \sum_{i \in A, j \in B} (X_{ij} - \mathbf{E}[X_{ij}]) \right|$$

Somme de $\#A\#B$ v.a. indépendantes bornées; Hoeffding :

$$\mathbf{P}[|e(A, B) - p\#A\#B| \geq t] \leq 2 \exp(-2t^2/(\#A\#B)).$$

Pour $t = 2n^{3/2}$, comme $\#A\#B \leq n^2$:

$$\mathbf{P}[|e(A, B) - p\#A\#B| \geq 2n^{3/2}] \leq 2 \exp(-8n)$$

Borne d'union :

$$\mathbf{P}\left[\max_{A,B} \left(\frac{1}{n^2} |e(A, B) - p\#A\#B|\right) \geq \frac{2}{\sqrt{n}}\right] \leq 2 \cdot 4^n \exp(-8n) \rightarrow 0.$$

Intermède - Quels graphes ?

Dans tout le cours, F désigne génériquement un graphe :

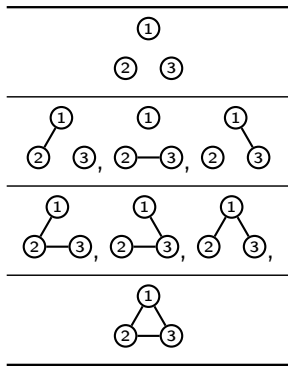
- Fini à $v(F)$ sommets
- étiqueté : sommets $1, \dots, v(F)$
- Simple (entre 2 sommets : 0 ou 1 arête)
- Non orienté
- Sans “self-loop”

Formellement :

$$F \equiv \{\text{arêtes}\}$$

$$\subset \{\{i, j\}, 1 \leq i < j \leq v(F)\}.$$

8 graphes étiquetés sur 3 sommets :



Stochastic Block Model

Généralisation classique d'Erdős—Rényi, **inhomogène** : les individus ont des **traits** (types, ...) différents.

Modèle $\mathcal{M} = (\mathcal{X}, \mu, W)$:

- 1 Un ensemble de **traits** possibles fixé ; $\mathcal{X} = \{1, \dots, m\}$,
- 2 Une **répartition des traits** : loi de proba μ sur $\mathcal{X}$.
- 3 Des **affinités entre traits**/force d'interaction/... :

$(W(x, y))_{x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{X}}$, matrice $m \times m$, symétrique



Le SBM à deux blocs, μ uniforme,

$$W(1, 1) = W(2, 2) = p_{=} \quad W(1, 2) = W(2, 1) = p_{\neq}.$$

Stochastic Block Model

Modèle (Stochastic Block Model)

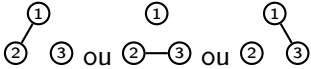
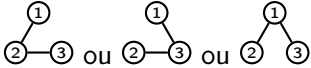
*Tirage d'un graphe aléatoire (sur $\{1, \dots, n\}$) en **deux temps** :*

- 1** *Tirage (indépendant) des **traits** de n individus, $(X_1, \dots, X_n)$, dans $\mathcal{X}$, suivant la loi μ ;*
- 2** ***Conditionnellement aux traits** : on relie i à j (indépendamment) avec probabilité $W(x_i, x_j)$ (pour $i \neq j$).*

Notation

$\mathbb{G}(n, \mathcal{M})$, graphe simple à n sommets, tiré suivant le modèle $\mathcal{M}$.

Exemple élémentaire

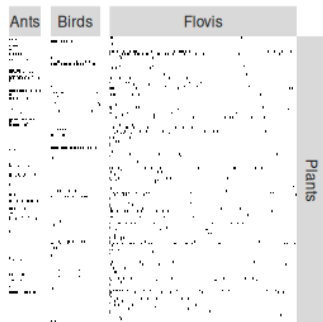
Graphe	E-R
	q^3
	$3q^2p$
	$3qp^2$
	p^3

Exemple élémentaire

Graphe	E-R	2 communautés
 	q^3	$\frac{1}{8}(2q_{=}^3 + 3q_{=}^2q_{\neq} + 3q_{=}q_{\neq}^2)$
   ou  	$3q^2p$	$\frac{3}{8}(2p_{=}q_{=}^2 + 2p_{=}q_{\neq}^2 + 4p_{\neq}q_{\neq}p_{=})$
   ou 	$3qp^2$	$\frac{3}{8}(2q_{=}p_{=}^2 + 2q_{=}p_{\neq}^2 + 4q_{\neq}p_{\neq}p_{=})$
	p^3	$\frac{1}{8}(2p_{=}^3 + 3p_{=}^2p_{\neq} + 3p_{=}p_{\neq}^2)$

Si par exemple $p_{=} = 0$, graphe biparti, pas de triangle.

Exemple concret



Étude des liens entre diverses espèces de plantes, d'oiseaux, de pollinisateurs et de fourmis. Source : Bar-Hen, Barbillon, and Donnet (2022), sur des données de Dáttilo et al. (2016).

Quelques questions sur le modèle

- 1 Propriétés des $\mathbb{G}(n, W)$ (quand n est grand),
- 2 Estimation du SBM au vu du graphe engendré.
- 3 Identifiabilité de W : peut-on distinguer $\mathbb{G}(n, W)$ et $\mathbb{G}(n, W')$ en théorie ? En pratique ?
- 4 Quand peut-on dire que W et W' génèrent les mêmes graphes ? Des graphes « proches » ?

Quelle égalité ? Renumerotation

Question

Quand a-t-on

$$(\mathcal{X}_1, \mu_1, W_1) \stackrel{''}{=} (\mathcal{X}_2, \mu_2, W_2)?$$

Définition

Deux SBM $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ génèrent les mêmes graphes si pour tout n , pour tout F graphe fini simple à n sommets étiquetés,

$$\mathbf{P} [\mathbb{G}(n, \mathcal{M}) = F] = \mathbf{P} [\mathbb{G}(n, \mathcal{M}') = F] .$$



Numérotation/étiquetage : si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont identiques à renumérotation des blocs près, ils engendrent les mêmes graphes.

Quelle égalité ? Fusion/scission de communautés



- si on scinde artificiellement un bloc en deux, on ne change pas la loi des graphes engendrés !
- Réciproquement, par exemple, le SBM à 2 communautés redonne Erdős—Rényi si $p_{=} = p_{\neq} = p$.

Quelle proximité/distance/topologie ?

Question

Quand a-t-on

$$(\mathcal{X}_1, \mu_1, W_1) \approx (\mathcal{X}_2, \mu_2, W_2)?$$

- 1 à tailles et nombre de blocs fixés, on peut comparer les W .
- 2 On peut redécouper et renuméroter les blocs.

...

Quelle proximité/distance/topologie ?

Question

Quand a-t-on

$$(\mathcal{X}_1, \mu_1, W_1) \approx (\mathcal{X}_2, \mu_2, W_2)?$$

- 1 à tailles et nombre de blocs fixés, on peut comparer les W .
- 2 On peut redécouper et renuméroter les blocs.

... mais on rate ainsi un autre type de proximité !

Un autre modèle naturel d'échantillonnage

Modèle (Sous-graphe d'un graphe donné)

Etant donné un (très grand) graphe déterministe, on peut tirer avec (ou sans) remise n sommets dedans et considérer le graphe induit.

- 1 Tirer un très grand Erdős—Rényi ($\mathbb{G}(N, p)$ à N sommets), puis
- 2 considérer le graphe induit sur $n \ll N$ sommets

devrait donner des graphes à n sommets “proches” d'un $\mathbb{G}(n, p)$, y compris conditionnellement au premier tirage.

Comment comparer ces lois ?

On y reviendra !

Bilan

- Un modèle (SBM) de génération de graphes aléatoires
- Un codage par

- 1 $\mathcal{X}$ (ensemble fini),
- 2 μ (mesure, répart. des traits)
- 3 $(W(x, y))_{x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{X}}$ (matrice d'affinités/interactions)

peu maniable : difficile de voir les modèles proches/égaux, difficile de prendre des limites.

Plan

1 Une usine à graphes aléatoires

- Stochastic Block Model
- Graphons
- Quelle égalité ? Modèles équivalents

2 Proximité et convergence de grands graphes

- La « limite à gauche »
- Quelles distances ?

3 Trois grands résultats de la théorie

- Les graphes $\mathbb{G}(n, W)$ convergent
- Caractérisation de la convergence
- Compacité de l'espace des graphons

4 Conclusion

Graphon — définition

	SBM	Cas général	Choix usuel (wlog)
Types	$\mathcal{X}$ fini	$\mathcal{X}$ quelconque	$\mathcal{X} = [0, 1]$
Répart.	Proba sur $\mathcal{X}$	Proba sur $\mathcal{X}$	Loi uniforme sur $[0, 1]$
Affinités	$W(x, y)_{x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{X}}$		

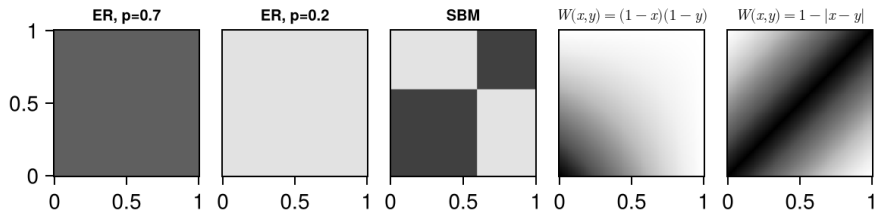
On peut se limiter à $\mathcal{X}$ espace de probas standard.

Modèle (Graphon : usine à graphes aléatoires)

- 1 Tirage des *traits* de n individus, $(X_1, \dots, X_n)$, dans $[0, 1]$, suivant la loi uniforme ;
- 2 *Conditionnellement aux traits* : on relie i à j avec probabilité $W(x_i, x_j)$.

Représentation graphique

Pour le choix “normalisé” $\mathcal{X} = [0, 1]$: visualisation par la “heatmap” de W .



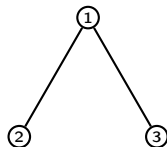
Cas particulier — *stochastic block model*

- 1 Si W est constant, les types n'influent pas, et on retrouve Erdős—Rényi.
- 2  Si W est constant par blocs, on retrouve un SBM.

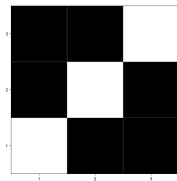
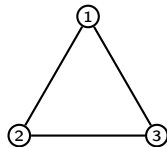
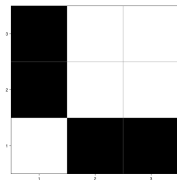
Cas particulier — *Sous-graphes d'un (très grand) graphe*

On peut plonger les graphes finis dans les graphons; à un graphe G on associe (son QR-code...) W_G :

G



W_G



Sous-graphe d'un (très grand) graphe

Modèle ("Sous-graphe")

Pour G un graphe, W_G le graphon associé, graphe aléatoire $\mathbb{G}(n, W_G)$.

Revient à tirer n sommets avec remise dans G , et prendre le graphe induit.

Cas particulier — *proportionate mixing*

Modèle (Proportionate mixing / forme produit)

$W(x, y) = a(x)a(y)$, les individus ont une “propension à faire des liens”.

Nombre de voisins moyens d'un individu de trait x :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \left[\sum \mathbb{1}_{\{U_i \leq W(x, X_i)\}} \right] &= n \mathbf{E} [W(x, X)] = n \int W(x, y) \mu(dy) \\ &= n \times a(x) \int a(y) \mu(dy).\end{aligned}$$

Terminologie

- Graphes aléatoires : Modèle de **configuration** (*canonical/soft configuration model*);
- Modèles d'épidémiologie : **proportionate mixing**

Cas particulier — graphon géométrique

Modèle (Graphon géométrique)

Cas où $(\mathcal{X}, \text{dist})$ est métrique et l'interaction est fonction de la distance :

$$W(x, y) = f(\text{dist}(x, y)),$$

Exemples typiques : $f = \mathbb{1}_{[0, R]}$, $f(u) = \exp(-u^2)$, ...

Plan

1 Une usine à graphes aléatoires

- Stochastic Block Model
- Graphons
- Quelle égalité ? Modèles équivalents

2 Proximité et convergence de grands graphes

- La « limite à gauche »
- Quelles distances ?

3 Trois grands résultats de la théorie

- Les graphes $\mathbb{G}(n, W)$ convergent
- Caractérisation de la convergence
- Compacité de l'espace des graphons

4 Conclusion

Modèles équivalents

Une application ϕ de $\mathcal{X}_1$ vers $\mathcal{X}_2$:

1 pousse les mesures (de $\mathcal{X}_1$ vers $\mathcal{X}_2$)

$$\forall B \subset \mathcal{X}_2, \quad (\phi_*\mu_1)(B) = \mu_1(\phi^{-1}(B))$$

2 tire les fonctions (de $\mathcal{X}_2$ vers $\mathcal{X}_1$)

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_1, \quad (\phi^*W_2)(x, y) = W_2(\phi(x), \phi(y)).$$

Modèles équivalents

Une application ϕ de $\mathcal{X}_1$ vers $\mathcal{X}_2$:

- 1 pousse les mesures (de $\mathcal{X}_1$ vers $\mathcal{X}_2$)

$$\forall B \subset \mathcal{X}_2, \quad (\phi_*\mu_1)(B) = \mu_1(\phi^{-1}(B))$$

- 2 tire les fonctions (de $\mathcal{X}_2$ vers $\mathcal{X}_1$)

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_1, \quad (\phi^*W_2)(x, y) = W_2(\phi(x), \phi(y)).$$

Théorème (Modèles image)

$\mathcal{M}_1 = (\mathcal{X}_1, \mu_1, W_1)$ et $\mathcal{M}_2 = (\mathcal{X}_2, \mu_2, W_2)$. Si $\phi : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$:

- pousse μ_1 sur μ_2
- tire W_2 sur W_1 ,

alors les deux modèles engendrent les mêmes graphes.

Notation : $\mathcal{M}_1 = \phi^*\mathcal{M}_2$.

Preuve pour F le graphe ①—② :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} [\mathbb{G}(2, W_1) = F] &= \iint_{\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_1} W_1(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_1(x_2) \\
 &= \iint_{\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_1} W_2(\phi(x_1), \phi(x_2)) d\mu_1(x_1) d\mu_1(x_2) \\
 &= \iint_{\mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_2} W_2(y_1, y_2) d\mu_2(y_1) d\mu_2(y_2) \\
 &= \mathbf{P} [\mathbb{G}(2, W_2) = F].
 \end{aligned}$$

Modèles équivalents

Couvre :



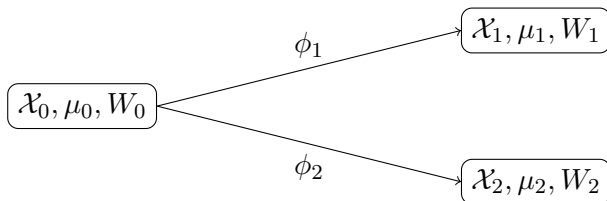
- la renumérotation (ϕ bijection de $\mathcal{X}$ fini dans lui même)
- la “renumérotation” continue (ϕ bijection mesurable de $[0, 1]$ dans lui-même),
- la fusion de blocs dans un SBM,
- L'écrasement continu-discret.

Modèles équivalents

Théorème (Équivalents ssi tirables sur le même modèle)

Si $\mathcal{M}_1 = (\mathcal{X}_1, \mu_1, W_1)$ et $\mathcal{M}_2 = (\mathcal{X}_2, \mu_2, W_2)$ engendrent les mêmes graphes, il existe $\mathcal{M}_0$ et deux applications ϕ_1 et ϕ_2 telles que :

$$\mathcal{M}_0 = \phi_1^* \mathcal{M}_1 = \phi_2^* \mathcal{M}_2.$$



Modèles équivalents

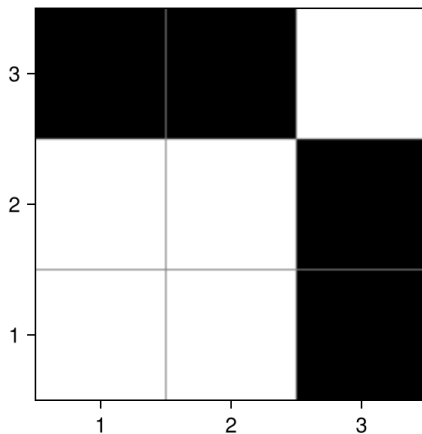
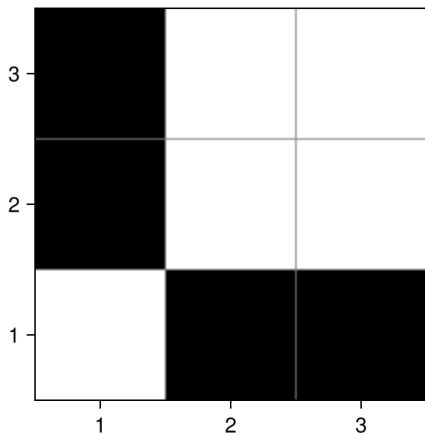


On peut aussi demander que $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ soient poussables sur le même modèle.

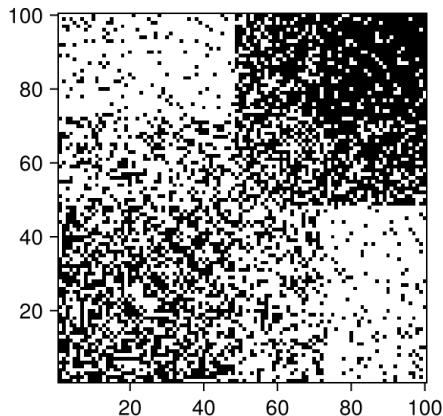
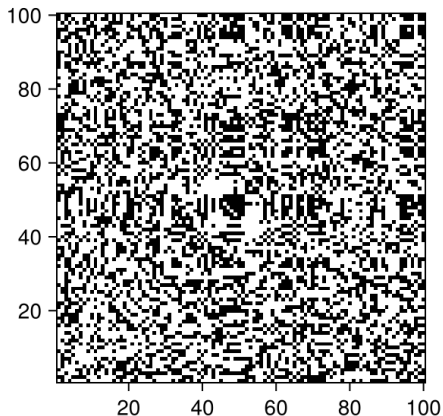
Remarque (Point de vue probabiliste)

*On peut considérer plus symétriquement des **couplages de mesures** à la place des applications ϕ , voir Janson.*

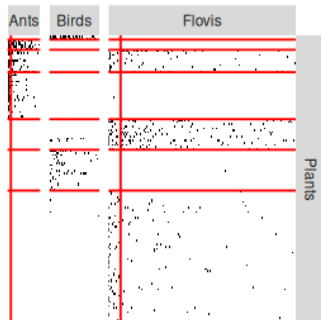
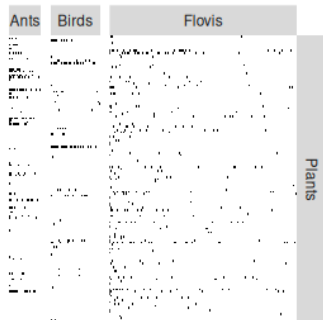
Modèles équivalents



Modèles équivalents



Modèles équivalents



Reconstruction d'un SBM, Bar-Hen, Barbillon, and Donnet (2022)

Bilan

- Graphon :
 - traits $\mathcal{X}$,
 - mesure μ sur $\mathcal{X}$,
 - interactions $W : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$
- Usine à graphes aléatoires (denses) — $\mathbb{G}(n, W)$ obtenu en :
 - 1 tirant les traits $(X_1, \dots, X_n)$,
 - 2 joignant les sommets/individus i et j indép. avec proba $W(X_i, X_j)$.
- Plusieurs graphons peuvent engendrer les mêmes graphes.
- Cadre général qui couvre :
 - Erdős—Rényi,
 - les SBM,
 - les graphes de configuration
 - ...

Plan

- 1 Une usine à graphes aléatoires
 - Stochastic Block Model
 - Graphons
 - Quelle égalité ? Modèles équivalents
- 2 Proximité et convergence de grands graphes
 - La « limite à gauche »
 - Quelles distances ?
- 3 Trois grands résultats de la théorie
 - Les graphes $\mathbb{G}(n, W)$ convergent
 - Caractérisation de la convergence
 - Compacité de l'espace des graphons
- 4 Conclusion

Plan

1 Une usine à graphes aléatoires

- Stochastic Block Model
- Graphons
- Quelle égalité ? Modèles équivalents

2 Proximité et convergence de grands graphes

- La « limite à gauche »
- Quelles distances ?

3 Trois grands résultats de la théorie

- Les graphes $\mathbb{G}(n, W)$ convergent
- Caractérisation de la convergence
- Compacité de l'espace des graphons

4 Conclusion

Quelles fonctions tests ?

Convergence d'objets aléatoires (X_n) ?

- Convergence des $\mathbf{E}[\phi(X_n)]$ pour ϕ dans une classe assez grande ;
- Objet limite X si la limite s'écrit $\mathbf{E}[\phi(X)]$.

Un bon choix ici : collection des

$\phi_F =$ indicatrice qu'un échantillonnage à $\#F$ sommets contienne F .

Définition (« Densité d'homomorphisme »)

Pour W un graphon et F un graphe simple (étiqueté) :

$$t(F, W) = \mathbf{P}[F \subset \mathbb{G}(n, W)].$$

Densité d'homomorphisme

Expression analytique comme intégrale :

$$\begin{aligned}
 & t(F, W) \\
 &= \mathbf{P} [\text{Pour toute arête } (i, j) \text{ de } F, (i, j) \text{ présente dans } \mathbb{G}(n, W)] \\
 &= \iint d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_n) \mathbf{P} [F \subset \mathbb{G}(n, W) | \text{les traits}] \\
 &= \iint d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_n) \prod_{\{i,j\} \in F} \mathbf{P} [(i, j) \in \mathbb{G}(n, W) | X_k = x_k \forall k] \\
 &= \iint d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_n) \prod_{\{i,j\} \in F} W(x_i, x_j).
 \end{aligned}$$

Exemples

- Pour $F = \textcircled{1} \text{---} \textcircled{2}$:

$$t(F, W) = \iint d\mu(x_1)d\mu(x_2)W(x_1, x_2) = \int \deg(x_1)d\mu(x_1)$$

Le degré moyen / la densité d'arêtes dans le graphe.

- Pour $F = \textcircled{2} \text{---} \textcircled{3}$:

$$t(F, W) = \iint d\mu(x_1)d\mu(x_2)d\mu(x_3)W(x_1, x_2)W(x_2, x_3).$$

Remarque : deux graphons équivalents ont (par définition) les mêmes t .

La convergence « à gauche »

Définition

Une suite de graphons W_n converge vers W si, pour tout graphe F ,

$$\mathbf{P} [\mathbb{G}(n, W_n) = F] \rightarrow \mathbf{P} [\mathbb{G}(n, W) = F] .$$

De façon équivalent, par inclusion-exclusion :

$$t(F, W_n) \rightarrow t(F, W).$$

(cf. fonction de répartition/fonction de masse)

Remarque (Non unicité)

La limite n'est pas unique (graphons équivalents)

Un premier résultat fondamental

Théorème

Soit W un graphon. Presque sûrement, la suite des (graphons associés à) $\mathbb{G}(n, W)$ converge vers W .

Le graphon apparaît donc à la fois comme :

- 1 façon de générer des grands graphes aléatoires,
- 2 objet limite de grands graphes (aléatoires ou déterministes)

Peut-on en dire plus sur la convergence de graphons ?

On sépare deux aspects :

- il faut travailler à **image/renumérotation** près,
- une fois la “bonne” numérotation trouvée, on peut comparer les deux fonctions W .

On se concentre d'abord sur le **2è aspect** :

- 1 on fixe $\mathcal{X} = [0, 1]$,
- 2 on suppose avoir trouvé une “bonne numérotation”,
- 3 on compare des fonctions W_1 et W_2 sur $[0, 1]^2$.

Plan

1 Une usine à graphes aléatoires

- Stochastic Block Model
- Graphons
- Quelle égalité ? Modèles équivalents

2 Proximité et convergence de grands graphes

- La « limite à gauche »
- Quelles distances ?

3 Trois grands résultats de la théorie

- Les graphes $\mathbb{G}(n, W)$ convergent
- Caractérisation de la convergence
- Compacité de l'espace des graphons

4 Conclusion

Distances usuelles

$$d_1(W_1, W_2) = \iint |W_1(x, y) - W_2(x, y)| \, dx dy$$

$$d_2(W_1, W_2) = \left(\iint (W_1(x, y) - W_2(x, y))^2 \, dx dy \right)^{1/2}$$

$$d_\infty(W_1, W_2) = \sup |W_1(x, y) - W_2(x, y)|.$$

- $d_1 \leq d_2 \leq d_\infty$: convergence L^∞ implique convergence L^2 , qui implique convergence L^1
- Les graphons sont des fonctions bornées : convergence L^1 et L^2 équivalentes.

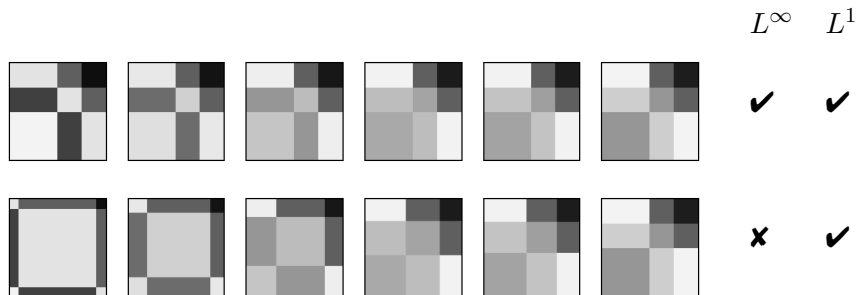
Entre graphes/matrice d'adjacence

Rappel : pour G graphe fini, W_G sa représentation graphon (QRCode).

Si $W_1 = W_{G_1}$, $W_2 = W_{G_2}$ pour deux graphes à n sommets :

- $d_\infty(W_1, W_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } G_1 = G_2, \\ 1 & \text{sinon !} \end{cases}$
- $d_1(W_1, W_2) = (2/n^2) \times \text{edit distance}$, nombre d'arêtes à changer pour passer d'un graphe à l'autre.

Illustration des modes de convergence



Si on a convergence L^1 , alors on a convergence : écriture des $t(F, W)$ comme des intégrales.

La distance L^1 est trop forte

n=30



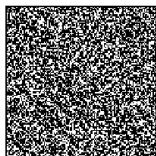
n=60



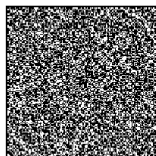
n=90



n=120



n=150



Théorème (L^1 est trop fort)

Pour $p \in (0, 1)$, si G est tiré suivant $\mathbb{G}(n, p)$, alors

$$d_1(W_G, W_p) \geq \min(p, 1 - p).$$

Pas de convergence L^1 des graphes vers le graphon qui les engendre !

La distance L^1 est trop forte

n=30



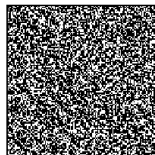
n=60



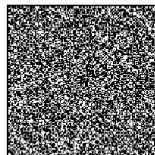
n=90



n=120



n=150



Question

- *En quoi une réalisation de Erdős—Rényi est-elle proche de sa limite ?*
- *En quoi deux réalisations de Erdős—Rényi sont-elles proches l'une de l'autre ? Nombre d'arêtes à changer trop gros !*
- *Comment flouter ?*

La distance de coupe

$W_1(x, y)$ peut être loin de $W_2(x, y)$. On prend des ensembles plus grands : pour A, B ensemble de traits,

$$\begin{aligned} W(A, B) &= \text{"nombre d'arêtes entre } A \text{ et } B \text{ dans } W\text{"} \\ &= \int_{A \times B} W(x, y) \mu(dx) \mu(dy). \end{aligned}$$

Pour Erdős—Rényi : $W(A, B) = p\mu(A)\mu(B)$.

La distance de coupe

$W_1(x, y)$ peut être loin de $W_2(x, y)$. On prend des ensembles plus grands : pour A, B ensemble de traits,

$$\begin{aligned} W(A, B) &= \text{"nombre d'arêtes entre } A \text{ et } B \text{ dans } W\text{"} \\ &= \int_{A \times B} W(x, y) \mu(dx) \mu(dy). \end{aligned}$$

Pour Erdős—Rényi : $W(A, B) = p\mu(A)\mu(B)$.

Définition

Distance de coupe

$$d_{\square}(W_1, W_2) = \sup\{|W_1(A, B) - W_2(A, B)|; A \text{ et } B \text{ mesurables}\}$$

- Pas de normalisation par la taille de A, B : les petits ensembles comptent peu.
- Définition opérateur : équivalente à la norme $L^{\infty} \rightarrow L^1$ de T_W .

Distance de coupe et distance L^1

$$\begin{aligned}
 |W_1(A, B) - W_2(A, B)| &= \left| \iint_{A \times B} (W_1 - W_2)(x, y) \mu(dx) \mu(dy) \right| \\
 &\leq \iint_{A \times B} |W_1 - W_2|(x, y) \mu(dx) \mu(dy) \\
 &\leq \iint_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}} |W_1 - W_2| = d_1(W_1, W_2).
 \end{aligned}$$

Théorème (Plus grossier que L^1 , mais pas trop grossier)

- 1 Ouvert pour $d_{\square} \implies$ ouvert pour L^1 ,
- 2 Convergence dans L^1 implique convergence pour $d_{\square}$.
- 3 Si $d_{\square}(W_1, W_2) = 0$, alors $W_1 = W_2$ presque sûrement.

La distance de coupe, quotientée

On réintroduit la “renumérotation” : on peut comparer W_1 sur $\mathcal{X}_1$ et W_2 sur $\mathcal{X}_2$ en les tirant sur un $\mathcal{X}_0$ commun.

$$\delta_{\square}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \inf \{ \|\phi_1^* W_1 - \phi_2^* W_2\|_{\square}; \mathcal{M}_0, \phi_1, \phi_2 \}$$

Théorème

Deux modèles sont équivalents/engendrent les mêmes graphes si et seulement si $\delta_{\square}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = 0$.

Bilan

- 1 Deux problèmes distincts se mélangent : le choix de la numérotation/étiquetage ; la comparaison de graphons à étiquetage fixé.
- 2 Deux graphons peuvent engendrer presque les mêmes graphes, mais rester loin en distance L^1 / *edit distance*.
- 3 La distance de coupe s'exprime analytiquement sur W , et caractérise l'équivalence (en tant que générateurs de graphes).

Plan

- 1 Une usine à graphes aléatoires
 - Stochastic Block Model
 - Graphons
 - Quelle égalité ? Modèles équivalents
- 2 Proximité et convergence de grands graphes
 - La « limite à gauche »
 - Quelles distances ?
- 3 Trois grands résultats de la théorie
 - Les graphes $\mathbb{G}(n, W)$ convergent
 - Caractérisation de la convergence
 - Compacité de l'espace des graphons
- 4 Conclusion

Plan

1 Une usine à graphes aléatoires

- Stochastic Block Model
- Graphons
- Quelle égalité ? Modèles équivalents

2 Proximité et convergence de grands graphes

- La « limite à gauche »
- Quelles distances ?

3 Trois grands résultats de la théorie

- Les graphes $\mathbb{G}(n, W)$ convergent
- Caractérisation de la convergence
- Compacité de l'espace des graphons

4 Conclusion

Les grands graphes aléatoires convergent vers le graphon qui les engendre

Théorème (First Sampling lemma)

W_1 et W_2 proches en coupe ssi $\mathbb{G}(n, W_1)$ et $\mathbb{G}(n, W_2)$ proches en coupe.

Théorème (Second sampling lemma)

W et $\mathbb{G}(n, W)$ proches en coupe.

Conséquence : pour tout graphon W , presque sûrement, $\mathbb{G}(n, W) \rightarrow W$.

Plan

1 Une usine à graphes aléatoires

- Stochastic Block Model
- Graphons
- Quelle égalité ? Modèles équivalents

2 Proximité et convergence de grands graphes

- La « limite à gauche »
- Quelles distances ?

3 Trois grands résultats de la théorie

- Les graphes $\mathbb{G}(n, W)$ convergent
- Caractérisation de la convergence
- Compacité de l'espace des graphons

4 Conclusion

La distance de coupe métrise la convergence à gauche

Théorème ((Inverse) Counting Lemma)

La convergence en distance de coupe est (explicitement) équivalente à la convergence des $t(F, W_n)$.

Plan

1 Une usine à graphes aléatoires

- Stochastic Block Model
- Graphons
- Quelle égalité ? Modèles équivalents

2 Proximité et convergence de grands graphes

- La « limite à gauche »
- Quelles distances ?

3 Trois grands résultats de la théorie

- Les graphes $\mathbb{G}(n, W)$ convergent
- Caractérisation de la convergence
- Compacité de l'espace des graphons

4 Conclusion

La compacité

Lemme (Lemme de Szemerédi)

Pour tout ϵ , il existe k tel que tout graphon soit à distance ϵ (pour $\delta_{\square}$) d'un SBM à k blocs.

$\forall \epsilon, \forall W, \exists k$ est facile même en distance L^1 . Ici le nombre de blocs **ne dépend que de ϵ**

Corollaire (Compacité de l'espace des graphons)

L'ensemble des graphons, quotienté par l'équivalence, muni de $\delta_{\square}$, est compact.

Plan

- 1 Une usine à graphes aléatoires
 - Stochastic Block Model
 - Graphons
 - Quelle égalité ? Modèles équivalents
- 2 Proximité et convergence de grands graphes
 - La « limite à gauche »
 - Quelles distances ?
- 3 Trois grands résultats de la théorie
 - Les graphes $\mathbb{G}(n, W)$ convergent
 - Caractérisation de la convergence
 - Compacité de l'espace des graphons
- 4 Conclusion

Conclusion

- Une usine à graphes aléatoires.
- L'objet limite des grands graphes denses
- Une **topologie naturelle** : métrique $\delta_\square$, équivalente à la convergence des t , et à la convergence des probabilités d'échantillonner F .
- Pour cette topologie, **plus faible que L^1** , **compacité** de l'espace des graphons.
- Un cadre général : couvre les SBM, les modèles d'échantillonnage, des graphes de type configuration, des graphes géométriques,...

Ouvertures et généralisations

Motivations initiales en théorie des graphes : hypothèses de symétrie, graphes denses, ...

Des adaptations-généralisations :

- à des graphes orientés
- à des graphes moins denses
- à des graphes à arêtes étiquetées
- ...

Deuxième partie

Modèle SIS sur un grand graphe

Plan

5 Le SIS homogène

6 SIS hétérogène

7 Convergence vers une EDO

8 Étude de la dynamique limite

- Lajmanovich et Yorke
- Retour au cas général

Le modèle SIS

- Population **homogène** de N individus, tous en contact.
- Deux états possibles : **Sain/Susceptible** ou **Infecté**.
- **Infections** ($S \rightarrow I$) : lors de rencontres entre un individu infecté et un individu sain, à un taux k .
- **Guérison** ($I \rightarrow S$) : spontanée à un certain taux γ .

Nombre d'infectés I_t : chaîne de Markov sur $\{0, \dots, N\}$.

- À taux γI_t : I_t décroît de 1 (guérison);
- À taux $k I_t (N - I_t)$: I_t augmente de 1 (contamination).

Le modèle SIS

- Population **homogène** de N individus, tous en contact.
- Deux états possibles : **Sain/Susceptible** ou **Infecté**.
- **Infections** ($S \rightarrow I$) : lors de rencontres entre un individu infecté et un individu sain, à un taux k_N .
- **Guérison** ($I \rightarrow S$) : spontanée à un certain taux γ_N .

Nombre d'infectés I_t : chaîne de Markov sur $\{0, \dots, N\}$.

- À taux $\gamma_N I_t$: I_t décroît de 1 (guérison) ;
- À taux $k_N I_t (N - I_t)$: I_t augmente de 1 (contamination).

Pour la suite on autorise k et γ à dépendre de N .

Le modèle SIS

- Population **homogène** de N individus, tous en contact.
- Deux états possibles : **Sain/Susceptible** ou **Infecté**.
- **Infections** ($S \rightarrow I$) : lors de rencontres entre un individu infecté et un individu sain, à un taux k_N .
- **Guérison** ($I \rightarrow S$) : spontanée à un certain taux γ_N .

Nombre d'infectés I_t : chaîne de Markov sur $\{0, \dots, N\}$.

- À taux I_t : I_t décroît de 1 (guérison) ;
- À taux $k_N I_t(N - I_t)$: I_t augmente de 1 (contamination).

Pour la suite on autorise k et γ à dépendre de N .

 Simulation du modèle homogène, en Julia, avec la librairie Agents.jl.

L'outil générateur

On étudie le processus via son *générateur* : l'opérateur $L : f \mapsto Lf$ tel que

$$\mathbf{E}[f(X_t)|X_0 = x] = f(x) + tLf(x) + o(t).$$

L'outil générateur

On étudie le processus via son *générateur* : l'opérateur $L : f \mapsto Lf$ tel que

$$\mathbf{E}[f(X_t)|X_0 = x] = f(x) + tLf(x) + o(t).$$

Pour une chaîne de Markov, *opérateur de différences* :

$$Lf(x) = \sum_y (\text{taux de saut de } x \text{ vers } y)(f(y) - f(x)).$$

Pour $X_t = x_t$ solution déterministe d'une ÉDO autonome $u' = F(u)$, *opérateur différentiel du premier ordre* :

$$Lf(x) = (f(x_t))' = F(x)f'(x).$$

La chaîne de Markov et son générateur

Générateur :

$$\begin{aligned}
 L_N f(i) &= k_N \cdot i(N - i) \cdot (f(i + 1) - f(i)) && \text{(infection)} \\
 &+ \gamma_N \cdot i \cdot (f(i - 1) - f(i)) && \text{(guérison)}
 \end{aligned}$$

La chaîne de Markov et son générateur

Générateur :

$$\begin{aligned}
 L_N f(i) &= k_N \cdot i(N-i) \cdot (f(i+1) - f(i)) && \text{(infection)} \\
 &+ \gamma_N \cdot i \cdot (f(i-1) - f(i)) && \text{(guérison)}
 \end{aligned}$$

Proportion $U_t = I_t/N$: chaîne sur $\{0, \frac{1}{N}, \dots, 1\}$, générateur

$$\begin{aligned}
 L_N f(u) &= k_N N^2 \cdot u(1-u) \cdot (f(u + \frac{1}{N}) - f(u)) \\
 &+ \gamma_N N \cdot u \cdot (f(u - \frac{1}{N}) - f(u)) \\
 &= (Nk_N) \cdot u(1-u)f'(u) - \gamma_N \cdot uf'(u) \\
 &+ O(k_N) + O(\gamma_N/N).
 \end{aligned}$$

La chaîne de Markov et son générateur

Générateur :

$$\begin{aligned}
 L_N f(i) &= k_N \cdot i(N-i) \cdot (f(i+1) - f(i)) && \text{(infection)} \\
 &+ \gamma_N \cdot i \cdot (f(i-1) - f(i)) && \text{(guérison)}
 \end{aligned}$$

Proportion $U_t = I_t/N$: chaîne sur $\{0, \frac{1}{N}, \dots, 1\}$, générateur

$$\begin{aligned}
 L_N f(u) &= k_N N^2 \cdot u(1-u) \cdot (f(u + \frac{1}{N}) - f(u)) \\
 &+ \gamma_N N \cdot u \cdot (f(u - \frac{1}{N}) - f(u)) \\
 &= (Nk_N) \cdot u(1-u)f'(u) - \gamma_N \cdot uf'(u) \\
 &+ O(k_N) + O(\gamma_N/N).
 \end{aligned}$$

Hypothèse (Bonne échelle des paramètres)

Taux de guérison d'un individu $\gamma_N \rightarrow \gamma$

Taux moyen d'infection d'un individu $Nk_N \rightarrow k$.

Convergence vers une ÉDO : cas homogène

Si les paramètres convergent :

$$\begin{aligned} L_N f(u) &= N k_N \cdot u(1-u) f'(u) - \gamma_N u f'(u) \\ &\quad + O(k_N) + O(\gamma_N/N) \\ &\rightarrow ((1-u)ku - \gamma u) \times f'(u) =: Lf(u) \end{aligned}$$

et on identifie le générateur de l'ÉDO limite :

$$u'(t) = (1 - u(t))ku(t) - \gamma u(t).$$

Convergence vers une ÉDO : cas homogène

Théorème

Les trajectoires stochastiques $U_N(t)$ convergent vers la solution déterministe de l'EDO $u' = (1 - u)ku - \gamma u$.

Détails et pointeurs bibliographiques :

T. Britton et E. Pardoux, éd. *Stochastic Epidemic Models with Inference*. Springer International Publishing, 2019

Le modèle SIS

Pour $u(t) \in [0, 1]$ la proportion d'individus infectés, $(1 - u(t))$ la proportion d'individus sains :

SIS unidimensionnel

$$\frac{d}{dt}u(t) = ku(t)(1 - u(t)) - \gamma u(t).$$

- Taux d'incidence / contaminations : proportionnel au produit des nombres d'infectés et de susceptibles — « loi d'action des masses » (Kermack, McKendrick 1927)

Le seuil : équilibres

SIS unidimensionnel

$$\frac{d}{dt}u(t) = ku(t)(1 - u(t)) - \gamma u(t).$$

Solutions constantes ? Si $u(t) = g \in [0, 1]$,

$$g \text{ équilibre} \iff kg(1 - g) = \gamma g.$$

Deux solutions réelles : 0 et $1 - \gamma/k$.

- 1 Si $k \leq \gamma$ un seul équilibre « biologique » (dans $[0, 1]$), l'équilibre trivial $g = 0$ (*disease-free*).
- 2 Si $k > \gamma$, deux équilibres ; $g^* = 1 - \gamma/k \in (0, 1)$ est l'équilibre endémique.

Le seuil : dynamique

L'équation *SIS* admet la solution explicite (pour $R_0 \neq 1$) :

$$u(t) = \frac{k - \gamma}{k + C(k - \gamma) \exp(-(k - \gamma)t)}.$$

Théorème (Seuil)

- Si $k < \gamma$ ($R_0 = k/\gamma < 1$), l'épidémie s'éteint (exp. vite).
- Si $k > \gamma$, l'épidémie se stabilise : $u(t) \rightarrow g^* = 1 - \frac{\gamma}{k} > 0$ dès que $I(0) > 0$.
- Si $k = \gamma$, $R_0 = 1$, l'épidémie s'éteint lentement (en $1/t$).

Objectifs

- 1 Formaliser l'apparition de modèles SIS à partir de dynamiques **stochastiques** sur un grand nombre d'individus...
- 2 en intégrant dans le modèle l'**hétérogénéité** entre individus :
 - certains guérissent plus vite que d'autres,
 - les contacts ne sont pas homogènes,
 - la transmission n'est pas homogène.

Plan

5 Le SIS homogène

6 SIS hétérogène

7 Convergence vers une EDO

8 Étude de la dynamique limite

- Lajmanovich et Yorke
- Retour au cas général

SIS sur un graphe venu d'un graphon

On fixe un tirage d'un graphe aléatoire de contacts $\mathbb{G}(n, W_E)$:

- 1 n sommets (individus) étiquetés par les traits x_i
- 2 entre chaque paire de sommets, une arête ou pas d'arête ; probabilité $W_E(x_i, x_j)$.

Modèle aléatoire sur les individus

Le graphe de contacts étant fixé, évolution de l'épidémie :

- 1 Chaque individu i est dans l'un de deux états S/I ,
- 2 Si i est malade, il guérit à taux $\gamma(x_i)$,
- 3
 - si i et j sont reliés, et
 - si i est infecté et j sain,alors j tombe malade à un taux $w_I(x_i, x_j)$.

Passage à l'échelle

On prend un grand nombre n d'individus.

- n individus,
- en contact avec une proba $w_E^{(n)}(x_i, x_j)$,
- qui guérissent à taux $\gamma^{(n)}(x_i)$,
- qui transmettent à taux $w_I^{(n)}(x_i, x_j)$.

Remarque

Le graphe de contacts est tiré une fois pour toutes au temps $t = 0$ mais reste fixé pendant l'évolution de l'épidémie.

Question

Quelle comportement limite pour les paramètres, pour quelle limite quand $n \rightarrow \infty$?

Un bon film vaut mieux qu'un long discours



- Contact avec les voisins, γ uniforme
- Contact avec les voisins, γ inhomogène

Plan

5 Le SIS homogène

6 SIS hétérogène

7 Convergence vers une EDO

8 Étude de la dynamique limite

- Lajmanovich et Yorke
- Retour au cas général

Vers quoi ça converge ?

L'équation SIS $\frac{dI}{dt} = (1 - I(t))kI(t) - \gamma I(t)$ devient :

EDO en dimension infinie

$$\partial_t u(t, x) = (1 - u(t, x)) \int k(x, y) u(t, y) d\mu(y) - \gamma(x) u(t, x).$$

- $u(t, x)$ (resp. $(1 - u(t, x))$) : proportion d'individus malades (sains) parmi ceux de type x .
- $\gamma(x)$: taux de guérison des individus de type x .
- $k(x, y)$: taux auquel un individu malade de type y infecte un individu sain de type x .

Vers quoi ça converge ?

L'équation SIS $\frac{dI}{dt} = (1 - I(t))kI(t) - \gamma I(t)$ devient :

EDO en dimension infinie

$$\partial_t u(t, x) = (1 - u(t, x)) \int k(x, y) u(t, y) d\mu(y) - \gamma(x) u(t, x).$$

- $u(t, x)$ (resp. $(1 - u(t, x))$) : proportion d'individus malades (sains) parmi ceux de type x .
- $\gamma(x)$: taux de guérison des individus de type x .
- $k(x, y)$: taux auquel un individu malade de type y infecte un individu sain de type x .
- Pas de dérivées en x — pas de déplacement/changement de type des individus.
- Pas de structure sur Ω .

À quelles conditions ?

Hypothèse (Convergence des taux de guérison)

Les taux $\gamma^{(n)}$ convergent uniformément :

$$\sup_x \left| \gamma^{(n)}(x) - \gamma(x) \right| \rightarrow 0.$$

La limite est bornée et continue pp.

L'effet joint proba. de contact w_E et taux d'infection w_I converge :

Hypothèse (Convergence du taux moyen de contact-infection)

Le produit $w^{(n)} = nw_E^{(n)}w_I^{(n)}$ converge uniformément :

$$\sup_{x,y} \left| nw_E^{(n)}(x,y)w_I^{(n)}(x,y) - w(x,y) \right| \rightarrow 0.$$

La limite est bornée et continue pp.

À quelles conditions ?

Hypothèse (Condition initiale)

La répartition initiale des traits-et-statuts, $\eta_0^{(n)} = \frac{1}{n} \sum \delta_{x_i, e_i}$, mesure sur $\mathcal{X} \times \{I, S\}$, converge vers une mesure η_0 , de marginale μ sur les traits.

$$\eta_0(dx, \{I\}) = u_0(x) d\mu(x).$$

Condition spécifique :

Hypothèse (Contrôle du taux d'infection moyen)

$$\iint w_I^{(n)}(x, y) d\mu(x) d\mu(y) \rightarrow 0.$$

Le résultat

Théorème (Convergence vers l'EDO)

La mesure empirique des infectés $\eta^{(n),I}(t)$ converge (en proba dans $\mathcal{D}$) vers un processus déterministe (η_t^I) à valeurs mesures. De plus $\eta_t^I(x) = u(t, x)\mu(dx)$, où u suit l'ÉDO :

$$\partial_t u(t, x) = (1 - u(t, x)) \int w(x, y) u(t, y) \mu(dy) - \gamma(x) u(t, x).$$

Références

- Résultat principal de Delmas, Frasca, Garin, Tran, Velleret, Z. '24.
- Généralise des travaux de Keliger, Horváth, et Takács '22.
- Convergence de processus sur graphes dans une limite graphon :
Billiard, Leman, Rey, Tran '22 (dynamique de pop.
plantes/pollinisateurs) ; Pang, Pardoux, Velleret (SIR avec dépendance
en âge d'infection)

Graphes denses ou moins denses

Hypothèse (Contrôle du taux d'infection - rappel)

$$nw_E^{(n)}w_I^{(n)} \rightarrow w, \quad \text{mais} \quad \iint w_I^{(n)}(x, y)\mu(dx)\mu(dy) \rightarrow 0.$$

- w_E n'est pas trop petit : la structure fixe doit être assez dense.
- Cas complet (dense) : $w_E = 1$ et $w_I^{(n)}(x, y) = w_I^{(n)}$. Alors $w_I^{(n)}$ de l'ordre de $1/n$: on retrouve le cas homogène. Idem pour $w_E = p < 1$.

Graphes denses ou moins denses

Hypothèse (Contrôle du taux d'infection - rappel)

$$nw_E^{(n)}w_I^{(n)} \rightarrow w, \quad \text{mais} \quad \iint w_I^{(n)}(x, y)\mu(dx)\mu(dy) \rightarrow 0.$$

- w_E n'est pas trop petit : la structure fixe doit être assez dense.
- Cas complet (dense) : $w_E = 1$ et $w_I^{(n)}(x, y) = w_I^{(n)}$. Alors $w_I^{(n)}$ de l'ordre de $1/n$: on retrouve le cas homogène. Idem pour $w_E = p < 1$.
- On peut descendre jusqu'à des graphes (partie persistante de l'inhomogénéité des contacts) relativement creux : la limite est $w_E \gg 1/n$.
- En termes de graphe de contact : le degré moyen d'un sommet tend vers l'infini, mais possiblement très lentement.

Idée de preuve

Schéma classique de preuve :

- Compacité/tension : les trajectoires restent dans une partie raisonnable de l'espace (arguments classiques)
- Identification de la limite : si un processus est une limite, alors il résout l'ÉDO annoncée.

Identification de la limite

Preuve en deux temps :

- 1 Preuve dans le cas où le **graphe d'interaction est complet**, $w_E = 1$: arguments classiques, proches du cas unidimensionnel.
- 2 Cœur technique : couplage délicat entre le cas général et le cas du graphe complet. On compare la dynamique donnée par w_E et w_I à la dynamique $\tilde{w}_E = 1$ et $\tilde{w}_I = w_E w_I$.

Plan

5 Le SIS homogène

6 SIS hétérogène

7 Convergence vers une EDO

8 Étude de la dynamique limite

- Lajmanovich et Yorke
- Retour au cas général

Un cadre général

ÉDO en dimension infinie (pour mémoire)

$$\partial_t u(t, x) = (1 - u(t, x)) \int k(x, y) u(t, y) d\mu(y) - \gamma(x) u(t, x).$$

- $u(t, x)$ (resp. $(1 - u(t, x))$) : proportion d'individus malades (sains) parmi ceux de type x .
- $\gamma(x)$: taux de guérison des individus de type x .
- $k(x, y)$: taux auquel le type y infecte le type x .

Un cadre général

ÉDO en dimension infinie (pour mémoire)

$$\partial_t u(t, x) = (1 - u(t, x)) \int k(x, y) u(t, y) d\mu(y) - \gamma(x) u(t, x).$$

- $u(t, x)$ (resp. $(1 - u(t, x))$) : proportion d'individus malades (sains) parmi ceux de type x .
- $\gamma(x)$: taux de guérison des individus de type x .
- $k(x, y)$: taux auquel le type y infecte le type x .
- Pas de dérivées en x : pas de changement de type des individus.
- Pas de structure sur Ω .

Référence pour cette partie : Delmas, Dronnier, Z. '22.

Plan

- 5 Le SIS homogène
- 6 SIS hétérogène
- 7 Convergence vers une EDO
- 8 Étude de la dynamique limite
 - Lajmanovich et Yorke
 - Retour au cas général

Un cas particulier

Pour $\Omega = \{1, \dots, N\}$, N é.d.o. couplées — pour $1 \leq i \leq N$,

$$\frac{du_i(t)}{dt} = (1 - u_i(t)) \sum_j k(i, j) u_j(t) \mu(\{j\}) - \gamma(i) u_i(t).$$

ou vectoriellement, $K(i, j) = k(i, j) \mu(\{j\})$:

Dynamique de Lajmanovich et Yorke, 1976

$$U'(t) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - U(t) \right) \odot KU(t) - \gamma \odot U(t),$$

$$U(t) \in \mathbb{R}^N, \quad K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \gamma \in \mathbb{R}^N.$$

Question

Le phénomène de seuil a-t-il encore lieu ? Quelle quantité scalaire remplace le quotient k/γ ?

Un cas particulier

Le seuil se lit sur la stabilité/instabilité linéaire de l'équilibre nul :

- la dynamique linéarisée en 0 est

$$U'(t) = KU(t) - \gamma \odot U(t) = (K - \text{diag}(\gamma))U(t).$$

- Si les parties réelles des v.p. de $K - \text{diag}(\gamma)$ sont strictement négatives, l'équilibre nul est stable.
- Si une v.p. a une partie réelle > 0 , l'équilibre nul est instable.

Un cas particulier

On peut montrer :

$$\begin{aligned} & \text{abscisse spectrale de } (K - \text{diag}(\gamma)) > 0 \\ \iff & \text{rayon spectral de } K \text{diag}(\gamma)^{-1} > 1. \end{aligned}$$

Lorsque que c'est le cas, en utilisant par exemple le caractère **coopératif** de la dynamique :

- Existence d'un équilibre **endémique**, non-nul.
- Unicité si K est irréductible.

Coopération

Le champ $F : U \in \mathbb{R}^N \mapsto (1 - U) \odot KU - \gamma \odot U$ vérifie

$$\forall i \neq j, \quad (1 - u_i(t))K(i, j) = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \geq 0.$$

Coopération (Hirsch, Smith)

- Augmenter le **nombre d'infectés en j** augmente le taux de croissance de l'infection pour les **autres traits**.
- Les infectés de traits différents **coopèrent** pour empirer l'infection.

NB : en revanche les traits ne **s'aident pas eux-mêmes** (facteur $1 - U$).

Deux conséquences de la coopération

Théorème (Comparaison de trajectoires)

Le flot conserve l'ordre :

$$u(0, \cdot) \leq v(0, \cdot) \implies u(t, \cdot) \leq v(t, \cdot).$$

Théorème (CS de monotonie des trajectoires)

Si toutes les composantes de $F(u_0)$ sont positives (négatives), alors pour tout x ,

$t \mapsto u(t, x)$ est croissante (décroissante).

En particulier l'état initial $u(\cdot) = 1$ conduit à une trajectoire monotone décroissante !

Plan

5 Le SIS homogène

6 SIS hétérogène

7 Convergence vers une EDO

8 Étude de la dynamique limite

- Lajmanovich et Yorke

- Retour au cas général

Un résultat général

Théorème (Delmas, Dronnier, Z.)

Pour (Ω, μ) un espace de probabilités, sous des conditions d'intégrabilité de k et γ , la dynamique SIS

$$\partial_t u(t, x) = (1 - u(t, x)) \int k(x, y) u(t, y) d\mu(y) - \gamma(x) u(t, x).$$

est bien définie en tout temps (sur $\Delta = \{u : \Omega \rightarrow [0, 1]\}$).

Un résultat général

Théorème (Delmas, Dronnier, Z., cont.)

Pour R_0 le rayon spectral de l'opérateur

$$f \mapsto \int k(x, y) f(y) / \gamma(y) d\mu(y),$$

on a le phénomène de seuil :

- 1** *Si $R_0 \leq 1$, l'épidémie s'éteint pour toute condition initiale : $u(t, x) \rightarrow 0$ (presque partout).*
- 2** *Si $R_0 > 1$, il existe (au moins) un équilibre non-nul pour (SIS). Si de plus l'opérateur est irréductible, l'équilibre non-nul est unique, et attire toute condition initiale non-nulle.*

Discussion

- Nombreux résultats de type “seuil” pour des modèles (multi ou infini-)dimensionnels variés par H. Thieme et ses coauteurs.
- Connu pour LY par diverses approches (coopération, fonctions de Lyapunov,...)
- Concentration sur un jeu d'hypothèses le plus général possible :
 - 1 Traits $x \in \Omega$ quelconques (discrets/continus/...),
 - 2 pas d'hypothèse de régularité/topologie sur k et γ ,
 - 3 pas de borne inf ou sup sur k ou γ (contrôles de moments),
 - 4 Bons espaces fonctionnels pour obtenir de la compacité et des informations sur le spectre.

Le cas non-irréductible

Hypothèse d'irréductibilité : tous les traits peuvent s'infecter les uns les autres (via des intermédiaires).

Ne couvre pas :

- les réservoirs (trait qui en infecte d'autres mais n'est pas infectée en retour, ...)
- des infections spatiales le long d'une rivière,
- etc.

Dans ce cas :

- 1 il peut y avoir un nombre arbitraire d'équilibres ;
- 2 caractérisation par les **atomes** de l'opérateur,
- 3 description des bassins d'attraction

Voir l'exposé de K. Lefki !

Troisième partie

Un modèle de vaccination

Plan

9 La vaccination - quel coût ? Quelle efficacité ?

10 Des exemples

- Les cercles
- (Dis)-assortativité

11 Quelques résultats

- Le problème d'optimisation
- Rayon spectral effectif
- L'équilibre endémique est une vaccination critique

Vaccination

Travaux en collaboration avec J.-F. Delmas et D. Dronnier, en particulier JOMB '23. Hypothèses du modèle :

- 1 On dispose d'une **quantité limitée** de vaccin.
- 2 Le vaccin est **parfaitement efficace** : un individu vacciné ne tombe pas malade et ne peut pas infecter.
- 3 La campagne de vaccination se fait **au temps 0**, avant la propagation de l'épidémie (*prophylaxie pré-exposition*).

Discussion

Quitte à enrichir l'espace des traits, on peut couvrir des vaccins multiples ou des vaccins partiellement efficaces.

Vaccination

Codage d'une stratégie de vaccination par la **population effective** :

$$\eta : \begin{cases} \Omega & \rightarrow [0, 1], \\ x & \mapsto \text{Proportion de non-vaccinés parmi les individus de type } x. \end{cases}$$

Coût

$$C(\eta) = \int (1 - \eta)(x) \mu(dx).$$

Théorème (Effet de la vaccination sur le seuil)

Si la population non-vaccinée est $\eta d\mu$, l'épidémie s'éteint ou non en fonction du rayon spectral effectif :

$$R_{\text{eff.}}(\eta) = \text{Rayon spectral de l'op. } f \mapsto \int (k(\cdot, y) / \gamma(y)) f(y) \eta(y) \mu(dy).$$

Vaccination

Question

- 1 *Comment choisir η / répartir les vaccins en fonction du type pour réduire au mieux le rayon spectral ?*
- 2 *Faut-il concentrer l'effort ? Vacciner uniformément ?*
- 3 *Peut-on essayer de réduire autre chose que R_0 ?*

Question (mathématique)

- 1 *Quel problème d'optimisation poser ?*
- 2 *Existence/ unicité des solutions ?*
- 3 *Caractérisation des solutions ? Calcul explicite ?*

Formalisation du problème

Pour toute stratégie de vaccination $\eta : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$:

- un **coût** de déploiement $C(\eta)$ (par exemple $\int (1 - \eta) d\mu$).
- une **perte** $L(\eta)$: le rayon spectral effectif $R_e(\eta)$, la taille de la population infectée à l'équilibre $I(\eta)$, ...

On cherche les η tels que $C(\eta)$ et $L(\eta)$ soient **simultanément** petits.

Formalisation du problème

Pour toute stratégie de vaccination $\eta : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$:

- un **coût** de déploiement $C(\eta)$ (par exemple $\int (1 - \eta) d\mu$).
- une **perte** $L(\eta)$: le rayon spectral effectif $R_e(\eta)$, la taille de la population infectée à l'équilibre $I(\eta)$, ...

On cherche les η tels que $C(\eta)$ et $L(\eta)$ soient **simultanément** petits.

$$\text{beurre} \cap \text{argent}(\text{beurre}) = \emptyset$$

Si on vaccine plus,

- 1 la population effective décroît,
- 2 la perte **diminue**,...
- 3 mais le coût **augmente**.

Problème bi-objectif

On peut :

- fixer une perte acceptable ($R(\eta) = 1$ pour $L = R_e$ par exemple) et minimiser le coût sous contrainte ;
- fixer un coût (quantité de vaccin disponible par exemple) et minimiser la perte sous contrainte ;
- garder la symétrie et chercher les **solutions de Pareto**

Définition (Optimalité)

- 1 Si $C(\eta) \leq C(\eta')$ et $L(\eta) \leq L(\eta')$, η **domine** η' .
- 2 Si au moins l'une des inégalités est stricte, η **domine strictement** η' .
- 3 Si aucune stratégie ne domine strictement η_* , on dit que η_* est **Pareto-optimale**.

Plan

9 La vaccination - quel coût ? Quelle efficacité ?

10 Des exemples

- Les cercles
- (Dis)-assortativité

11 Quelques résultats

- Le problème d'optimisation
- Rayon spectral effectif
- L'équilibre endémique est une vaccination critique

Plan

9 La vaccination - quel coût ? Quelle efficacité ?

10 Des exemples

- Les cercles

- (Dis)-assortativité

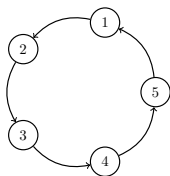
11 Quelques résultats

- Le problème d'optimisation

- Rayon spectral effectif

- L'équilibre endémique est une vaccination critique

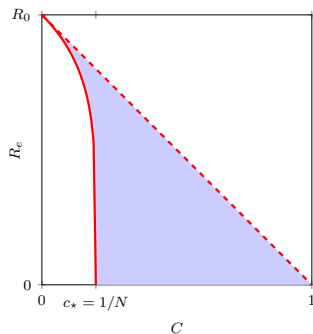
Cercle asymétrique



- 1** Modèle type Lajmanovich – Yorke (fini-dimensionnel)
- 2** N populations semblables ($\gamma \equiv 1$ constant)
- 3** $K(i, j) = 1 \iff i = j + 1 \pmod N$.

$$R_{\text{eff.}}(\eta) = \text{ray. spec. de } \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \eta(1) \\ \eta(2) & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \eta(3) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \eta(N) & 0 \end{pmatrix} = (\prod \eta(i))^{1/N}.$$

Cercle asymétrique

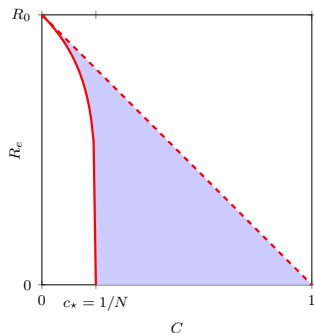


- Abscisse : coût

$$= \int (1 - \eta) d\mu = 1 - N^{-1} \sum \eta_i$$
- Ordonnée : rayon spectral effectif

$$R_{\text{eff.}}(\eta)$$
- Bleu : couples $(\text{coût}, R_{\text{eff.}})$ réalisables
 par une stratégie $\eta \in [0, 1]^N$

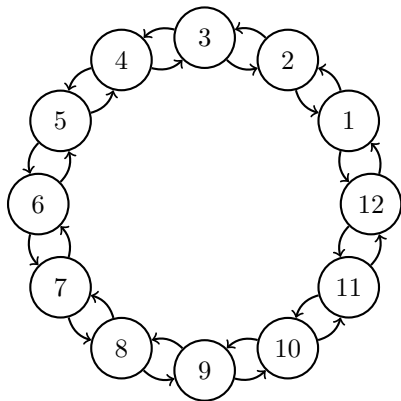
Cercle asymétrique



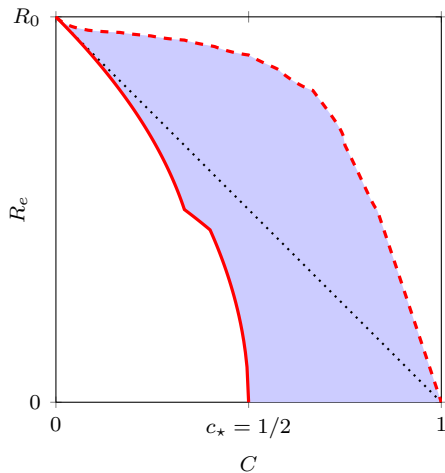
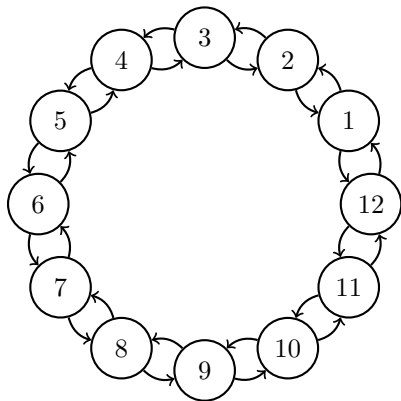
- Abscisse : coût
 $= \int (1 - \eta) d\mu = 1 - N^{-1} \sum \eta_i$
- Ordonnée : rayon spectral effectif
 $R_{\text{eff.}}(\eta)$
- Bleu : couples $(\text{coût}, R_{\text{eff.}})$ réalisables
 par une stratégie $\eta \in [0, 1]^N$

- Stratégies optimales : se concentrer sur une seule population.
- Stratégies les pires : vacciner uniformément.

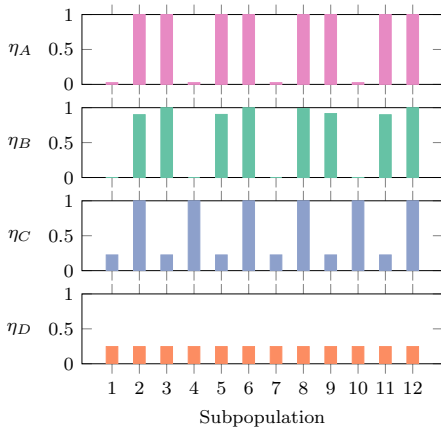
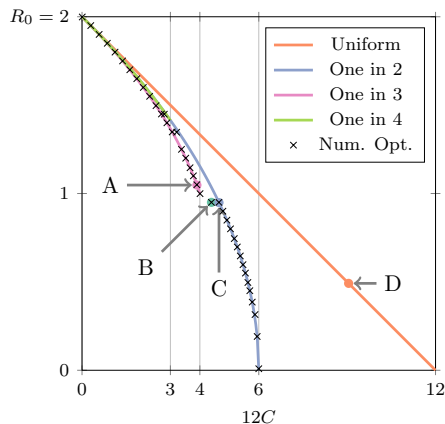
Le cercle symétrique



Le cercle symétrique



Le cercle symétrique — diverses stratégies



Plan

9 La vaccination - quel coût ? Quelle efficacité ?

10 Des exemples

- Les cercles
- (Dis)-assortativité

11 Quelques résultats

- Le problème d'optimisation
- Rayon spectral effectif
- L'équilibre endémique est une vaccination critique

Le modèle

- Un nombre fini (ou dénombrable) de communautés.
- Contamination entre les communautés i et j :

$$k(i, j) = \begin{cases} a & \text{si } i = j, \\ b & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

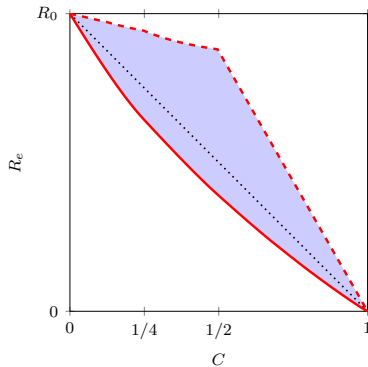
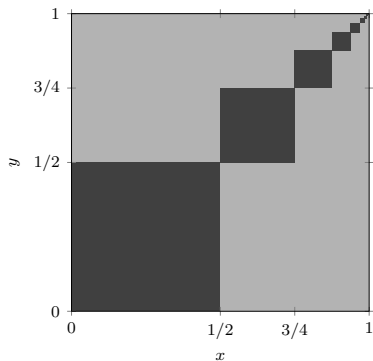
- Si $a > b$: **assortatif** — qui se ressemble se contamine.

structure par classe d'âge, localisation spatiale,...

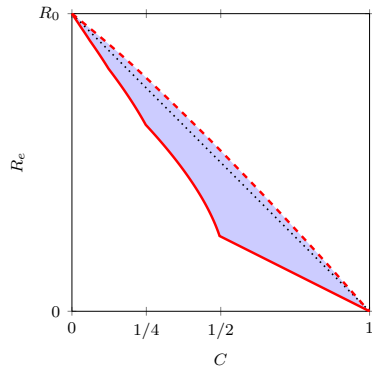
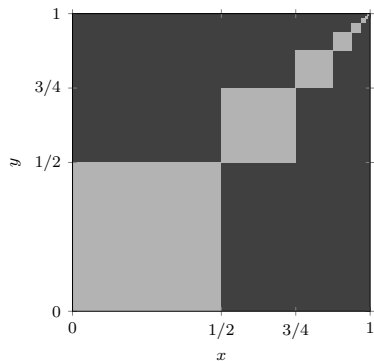
- Si $a < b$: **disassortatif** — les contraires se contaminent.

pour 2 communautés : MST, maladies vectorielles,...

Cas assortatif



Cas disassortatif



Outils et difficultés

- Vacciner plus est intéressant : $R_{\text{eff.}}(\eta_1) \leq R_{\text{eff.}}(\eta_2)$ si $\eta_1 \leq \eta_2$,
... mais pas de stricte monotonie ; “survacciner”
une population sous-critique est inutile
- Vacciner les types les plus connectés est intéressant
... mais comment gérer les ex-æquo ?
- Solution explicite, inégalités de majorisation

Plan

9 La vaccination - quel coût ? Quelle efficacité ?

10 Des exemples

- Les cercles
- (Dis)-assortativité

11 Quelques résultats

- Le problème d'optimisation
- Rayon spectral effectif
- L'équilibre endémique est une vaccination critique

Plan

9 La vaccination - quel coût ? Quelle efficacité ?

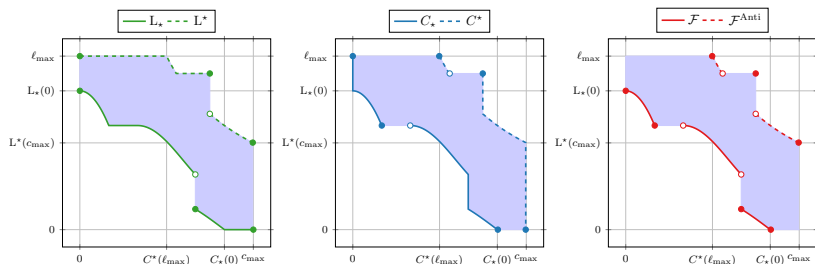
10 Des exemples

- Les cercles
- (Dis)-assortativité

11 Quelques résultats

- Le problème d'optimisation
- Rayon spectral effectif
- L'équilibre endémique est une vaccination critique

Un cadre général

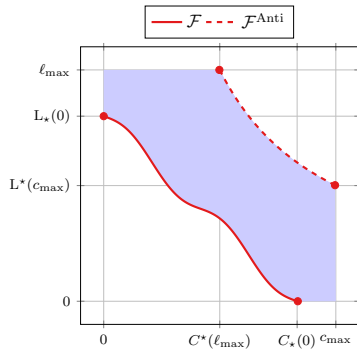


Hypothèse

La fonction de coût est décroissante et (faible-) continue.*

La fonction de perte est croissante et (faible-) continue.*

Cas sympathique



Sous hypothèses supplémentaires, vérifiées pour $L = R_e$ ou $L = I$ et un k irréductible.

Plan

9 La vaccination - quel coût ? Quelle efficacité ?

10 Des exemples

- Les cercles
- (Dis)-assortativité

11 Quelques résultats

- Le problème d'optimisation
- Rayon spectral effectif
- L'équilibre endémique est une vaccination critique

Comportement du rayon spectral effectif

Fonctionnelle d'intérêt :

$$R_{\text{eff.}} : \eta \mapsto \rho(T_\eta)$$

où

- $T_\eta : f \mapsto \int (k(\cdot, y)/\gamma(y))\eta(y)f(y)\mu(dy),$
- ρ est le rayon spectral.

Question (Comportement de la fonctionnelle)

Quelles conditions pour assurer...

- *la continuité ?*
- *la convexité ?*

Comportement de la fonctionnelle

Pour la continuité : $R_{\text{eff.}} = \rho \circ (\eta \mapsto T_\eta)$:

$$\{\eta : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]\} \rightarrow \text{opérateurs bornés sur } L^p \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{top. faible-}^* \rightarrow \quad ? \quad \rightarrow \text{top. usuelle} \quad (2)$$

- 1 ρ est continu si “?” est la norme d'opérateur...
- 2 ... mais $\eta \mapsto T_\eta$ n'est continu que pour “?” la convergence forte
- 3 utilisation de la **compacité collective** pour obtenir la convergence des spectres

Convexité

Théorème (Convexité/concavité)

On suppose k symétrique et $\int k^2(x, y) d\mu(x) d\mu(y) < \infty$.

- 1** *Le spectre de T_k est réel ;*
- 2** *Si $\text{spec.}(T_k) \subset \mathbb{R}_+$ alors $R_{\text{eff.}} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ;*
- 3** *Si R_0 est simple et si c'est la seule valeur propre positive, alors $R_{\text{eff.}}$ est concave.*

Convexité : conséquences en degré constant

On suppose γ , $\int k(\cdot, y)d\mu(y)$ et $\int k(x, \cdot)d\mu(x)$ constants.

Théorème (Stratégies uniformes en degré constant)

- Si $R_{\text{eff.}}$ est convexe, les stratégies uniformes sont les “meilleures” (elles sont Pareto-optimales).
- Si $R_{\text{eff.}}$ est concave, les stratégies uniformes sont les “pires”.

Plan

9 La vaccination - quel coût ? Quelle efficacité ?

10 Des exemples

- Les cercles
- (Dis)-assortativité

11 Quelques résultats

- Le problème d'optimisation
- Rayon spectral effectif
- L'équilibre endémique est une vaccination critique

Vaccination critique

Vaccination critique

Vaccination η telle que $R_{\text{eff.}}(\eta) = 1$.

- Homogénéité du rayon spectral : la stratégie uniforme $\eta(x) = 1/R_0$ est toujours critique.
- Vacciner en proportion du profil endémique est aussi une stratégie critique !

Vaccination critique

Théorème (Vacciner suivant le profil endémique atteint l'immunité de groupe)

Si $R_0 > 1$, et le modèle irréductible, il existe un unique équilibre endémique $x \mapsto g^(x)$; dans ce cas*

$$R_{\text{eff.}}(1 - g^*) = 1.$$

Caractérisation de l'équilibre maximal

Théorème (Clé)

L'équilibre maximal est caractérisé par R_{eff} : si g est un équilibre,

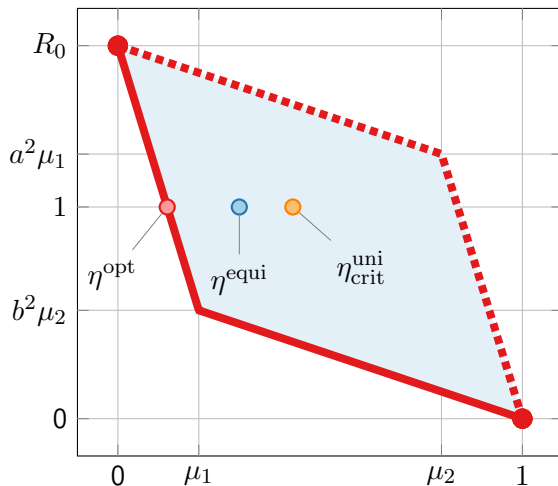
$$g = g^* \iff R_{\text{eff}}((1 - g)^2) \leq 1$$

$\iff g$ est lin. stable pour la dynamique d'origine

$$\iff R_{\text{eff}}(1 - g) \leq 1$$

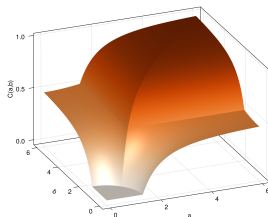
$\iff 0$ est lin. stable pour la dynamique vaccinée

Vaccination critique — un exemple élémentaire

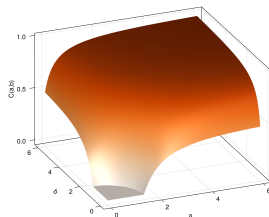


- Deux traits 1 et 2,
- Répartition μ_1, μ_2 ,
- γ constant,
- Interaction
“proportionate mixing” : $k(1, 1) = a^2$,
 $k(2, 2) = b^2$,
 $k(1, 2) = ab$.

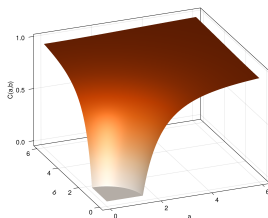
Vaccination critique — un exemple élémentaire



Vacc. critique optimale



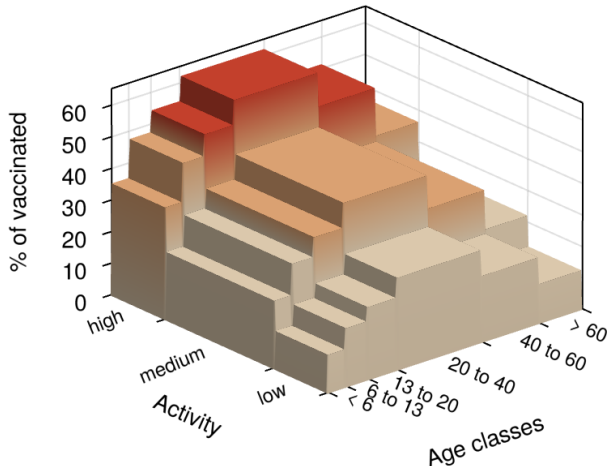
Vacc. critique suivant l'équilibre



Vaccination critique uniforme.

Coût des vaccinations critiques en fonction des paramètres a et b ($\mu_1 = \mu_2 = 1/2$).

Vaccination critique — un exemple sur une population structurée





Merci !

Bibliographie

Sur les modèles épidémiologiques M. J. Keeling et P. Rohani. *Modeling infectious diseases in humans and animals*. Princeton University Press, 2008

Sur les dynamiques monotones M. W. Hirsch et H. L. Smith. « Monotone dynamical systems ». T. 2. Handbook of Differential Equations : Ordinary Differential Equations. Elsevier, 2006, p. 239-357

Sur le modèle de Lajmanovich et Yorke R. Pastor-Satorras, C. Castellano, P. Van Mieghem et A. Vespignani. « Epidemic processes in complex networks ». *Reviews of Modern Physics* 87.3 (2015), p. 925-979

Bibliographie

Sur la vaccination et la convexité dans le cas fini-dimensionnel

A. J. G. Cairns. « Epidemics in Heterogeneous Populations : Aspects of Optimal Vaccination Policies ». *Mathematical Medicine and Biology* 6.3 (1989), p. 137-159

A. N. Hill et I. M. Longini Jr. « The critical vaccination fraction for heterogeneous epidemic models ». *Mathematical Biosciences* 181.1 (2003), p. 85-106

Bibliothèque pour la simulation G. Datseris, A. R. Vahdati et T. C. DuBois.

« Agents.jl : a performant and feature-full agent-based modeling software of minimal code complexity ». *SIMULATION* 0.0 (2022), p. 003754972110688

Bibliographie

- Convergence** J.-F. Delmas, P. Frasca, F. Garin, V. C. Tran, A. Velleret et P.-A. Zitt.
« Individual-based SIS models on (not so) dense large random networks ». *Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics* 21.2 (2024), p. 1375
- Dynamique** J.-F. Delmas, D. Dronnier et P.-A. Zitt. « An infinite-dimensional metapopulation SIS model ». *Journal of Differential Equations* 313 (2022), p. 1-53
- Exemples** J.-F. Delmas, D. Dronnier et P.-A. Zitt. « Optimal vaccination : various (counter) intuitive examples ». *Journal of Mathematical Biology* 86.26 (2023), p. 1-57
- Rayon spectral effectif** J.-F. Delmas, D. Dronnier et P.-A. Zitt. « The effective reproduction number : convexity, concavity and invariance ». *Journal of the European Mathematical Society* (2024)
- Cas non-irréductible** J.-F. Delmas, K. Lefki et P.-A. Zitt. « Atoms and associated spectral properties for positive operators on L_p ». *Pacific Journal of Mathematics* 337.1 (2025), p. 87-136