Croissance et extinction en environnement aléatoire

Vincent Bansaye

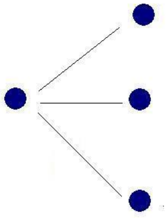
CMAP, Ecole Polytechnique.

Inauguration de la chaire MMB. 30 novembre.

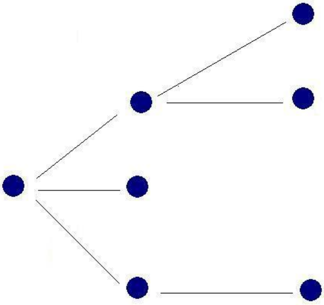
Museum National d'Histoire Naturelle

Exemple de processus de Galton Watson.

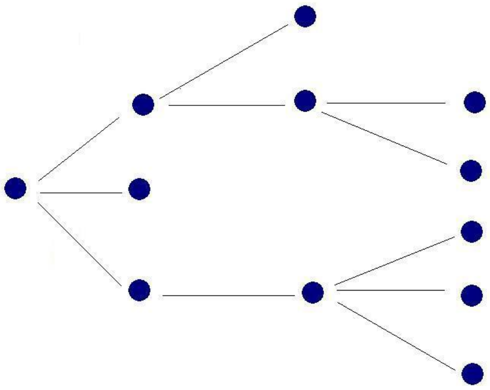
Exemple de processus de Galton Watson.



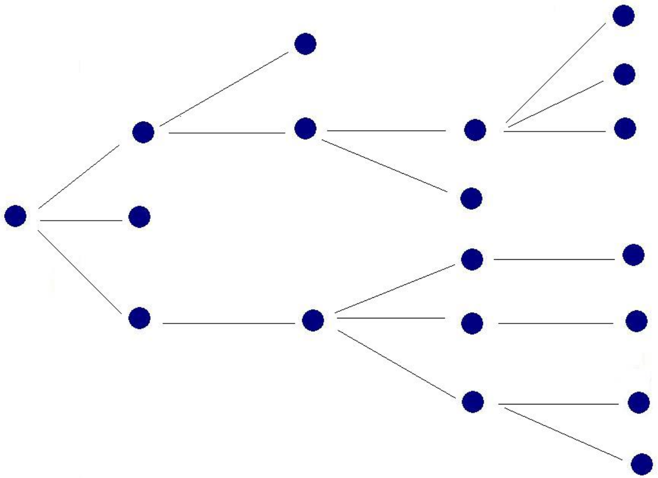
Exemple de processus de Galton Watson.



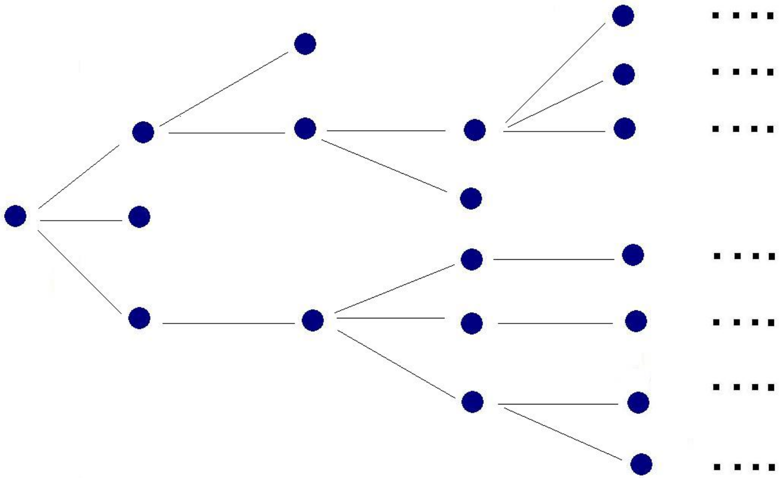
Exemple de processus de Galton Watson.



Exemple de processus de Galton Watson.



Exemple de processus de Galton Watson.



Processus de Galton Watson $(Z_n : n \in \mathbb{N})$

La loi de reproduction des individus est donnée par la v.a. :

$$N \in \mathbb{N} \; p.s., \quad m = \mathbb{E}(N).$$

La population s'éteint p.s. en temps fini si et seulement si :

$$m \leq 1.$$

Quand $m < 1$ (cas souscritique), la vitesse d'extinction est donnée par la moyenne :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim cm^n \qquad (n \to \infty).$$

Quand $m > 1$ (cas surcritique), la population survit avec probabilité positive et elle croît alors géométriquement :

$$Z_n \sim Wm^n \qquad (n \to \infty).$$

Processus de Galton Watson $(Z_n : n \in \mathbb{N})$

La loi de reproduction des individus est donnée par la v.a. :

$$N \in \mathbb{N} \ p.s., \quad m = \mathbb{E}(N).$$

La population s'éteint p.s. en temps fini si et seulement si :

$$m \leq 1.$$

Quand $m < 1$ (cas souscritique), la vitesse d'extinction est donnée par la moyenne :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim cm^n \qquad (n \to \infty).$$

Quand $m > 1$ (cas surcritique), la population survit avec probabilité positive et elle croît alors géométriquement :

$$Z_n \sim Wm^n \qquad (n \to \infty).$$

Processus de Galton Watson $(Z_n : n \in \mathbb{N})$

La loi de reproduction des individus est donnée par la v.a. :

$$N \in \mathbb{N} \ p.s., \quad m = \mathbb{E}(N).$$

La population s'éteint p.s. en temps fini si et seulement si :

$$m \leq 1.$$

Quand $m < 1$ (cas souscritique), la vitesse d'extinction est donnée par la moyenne :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim cm^n \qquad (n \to \infty).$$

Quand $m > 1$ (cas surcritique), la population survit avec probabilité positive et elle croît alors géométriquement :

$$Z_n \sim Wm^n \qquad (n \to \infty).$$

Processus de Galton Watson $(Z_n : n \in \mathbb{N})$

La loi de reproduction des individus est donnée par la v.a. :

$$N \in \mathbb{N} \; p.s., \qquad m = \mathbb{E}(N).$$

La population s'éteint p.s. en temps fini si et seulement si :

$$m \leq 1.$$

Quand $m < 1$ (cas souscritique), la vitesse d'extinction est donnée par la moyenne :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim cm^n \qquad (n \to \infty).$$

Quand $m > 1$ (cas surcritique), la population survit avec probabilité positive et elle croît alors géométriquement :

$$Z_n \sim Wm^n \qquad (n \to \infty).$$

Les processus de branchement en environnement aléatoire (PBEA) sont des processus qui généralisent les processus de Galton-Watson [Smith, Wilkinson 69] :

A chaque génération on tire de manière indépendante et identiquement distribuée un environnement qui détermine la loi de reproduction des individus.

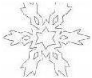
Exemple de PBEA

Population de fleurs

en environnement aleatoire :

Soleil et pluie avec proba 3/7
Forte reproduction

Nuageux avec proba 3/7
Faible reproduction

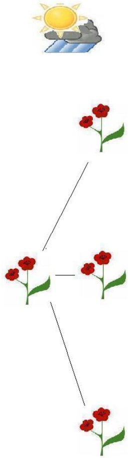


Neige, gel avec proba 1/7
Mort avec forte proba

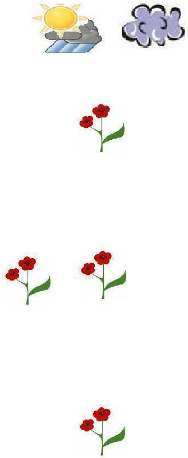
Exemple de PBEA

Exemple de PBEA

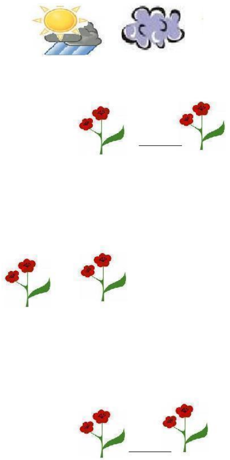
Exemple de PBEA



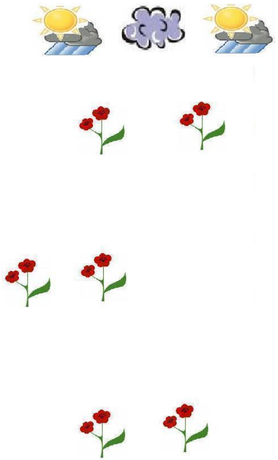
Exemple de PBEA



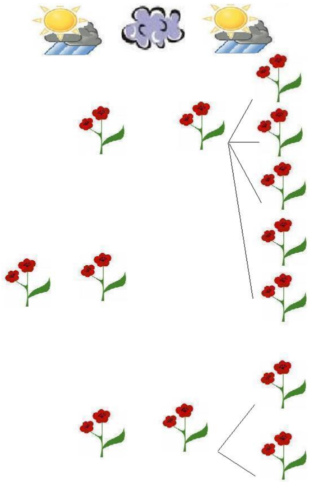
Exemple de PBEA



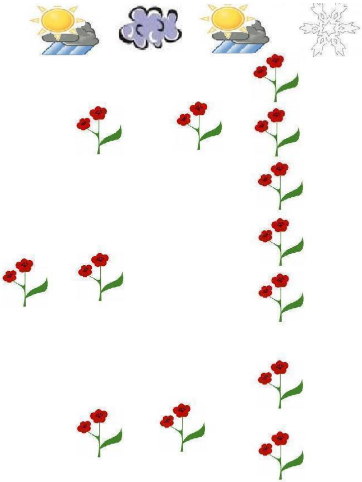
Exemple de PBEA



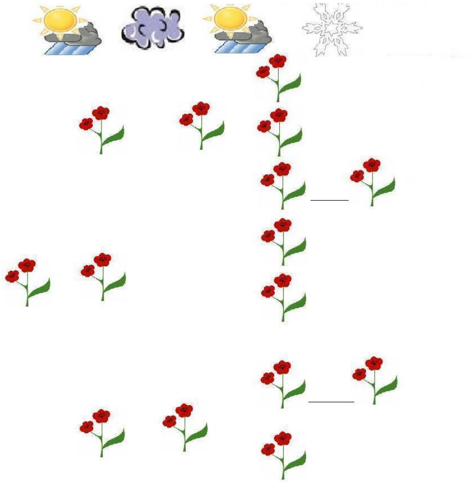
Exemple de PBEA



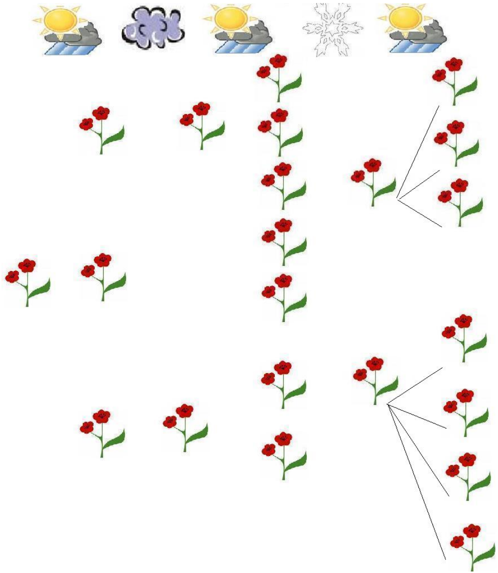
Exemple de PBEA



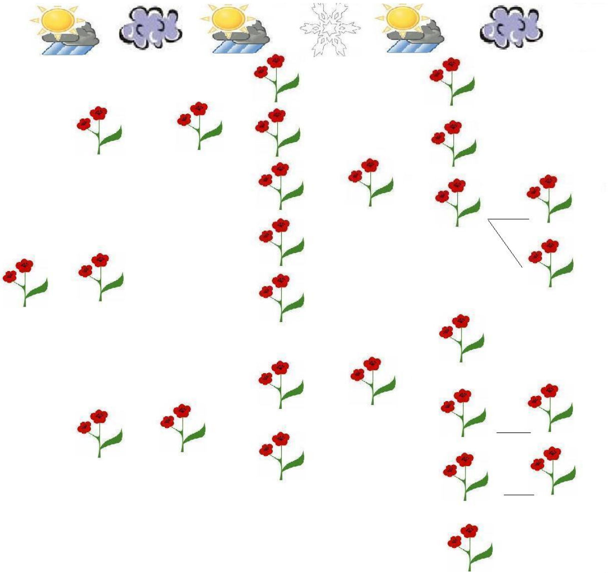
Exemple de PBEA



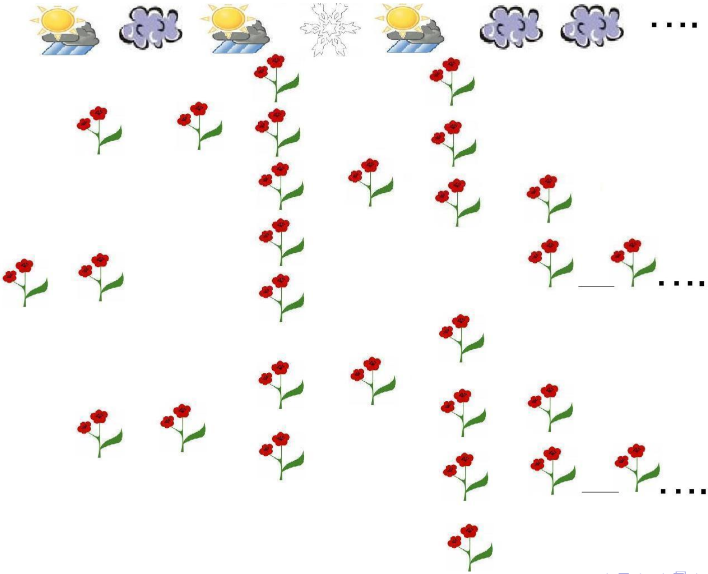
Exemple de PBEA



Exemple de PBEA



Exemple de PBEA



Motivations

- Ecologie : Quel est l'effet de la variabilité de l'environnement sur la croissance ou la survie d'une population animale ou végétale ?

- Biologie : modèle de Kimmel pour la division d'une cellule infectée. Ces processus décrivent l'évolution de la quantité de parasites dans une lignée cellulaire.

Motivations

- Ecologie : Quel est l'effet de la variabilité de l'environnement sur la croissance ou la survie d'une population animale ou végétale ?

- Biologie : modèle de Kimmel pour la division d'une cellule infectée. Ces processus décrivent l'évolution de la quantité de parasites dans une lignée cellulaire.

Description d'un PBEA $(Z_n)_{n\geq 0}$

A chaque génération on tire un environnement de manière i.i.d. :

$$\mathcal{E}_i = \text{environnement à la génération } i.$$

Le nombre d'enfants sous l'environnement e est donné par la v.a.

$$N(e), \qquad m(e) := \mathbb{E}(N(e)).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $\mathcal{E}_{n+1} = e$, on a

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i,$$

avec $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite iid de variables aléatoires distribuées comme $N(e)$.

Un PBEA s'éteint p.s. ssi $\mathbb{E}[\log(m(\mathcal{E}))] \leq 0$. [Athreya, Karlin 71].

Description d'un PBEA $(Z_n)_{n\geq 0}$

A chaque génération on tire un environnement de manière i.i.d. :

$$\mathcal{E}_i = \text{environnement à la génération } i.$$

Le nombre d'enfants sous l'environnement e est donné par la v.a.

$$N(e), \qquad m(e) := \mathbb{E}(N(e)).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $\mathcal{E}_{n+1} = e$, on a

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i,$$

avec $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite iid de variables aléatoires distribuées comme $N(e)$.

Un PBEA s'éteint p.s. ssi $\mathbb{E}[\log(m(\mathcal{E}))] \leq 0$. [Athreya, Karlin 71].

Description d'un PBEA $(Z_n)_{n\geq 0}$

A chaque génération on tire un environnement de manière i.i.d. :

$$\mathcal{E}_i = \text{environnement à la génération } i.$$

Le nombre d'enfants sous l'environnement e est donné par la v.a.

$$N(e), \qquad m(e) := \mathbb{E}(N(e)).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $\mathcal{E}_{n+1} = e$, on a

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i,$$

avec $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite iid de variables aléatoires distribuées comme $N(e)$.

Un PBEA s'éteint p.s. ssi $\mathbb{E}[\log(m(\mathcal{E}))] \leq 0$. [Athreya, Karlin 71].

Vitesse d'extinction

Quand la population s'éteint p.s. (cas sous-critique), la vitesse d'extinction dépend de la variabilité de l'environnement [Geiger, Kersting, Vatutin 2003] :

- Cas fortement sous critique : $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) < 0$, alors :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c\mathbb{E}(m(\mathcal{E}))^n, \quad (n \to \infty).$$

- Cas moyennement sous critique : $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) = 0$, alors :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c'\mathbb{E}(m(\mathcal{E}))^n/n^{1/2}, \quad (n \to \infty).$$

- Cas faiblement sous critique : $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c''\gamma^n/n^{3/2}, \quad (n \to \infty),$$

avec $\gamma = \inf\{\mathbb{E}(m(\mathcal{E})^s) : s \in [0,1]\} < \mathbb{E}(m(\mathcal{E}))$.

Vitesse d'extinction

Quand la population s'éteint p.s. (cas sous-critique), la vitesse d'extinction dépend de la variabilité de l'environnement [Geiger, Kersting, Vatutin 2003] :

- Cas fortement sous critique : $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) < 0$, alors :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c\mathbb{E}(m(\mathcal{E}))^n, \quad (n \to \infty).$$

- Cas moyennement sous critique : $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) = 0$, alors :

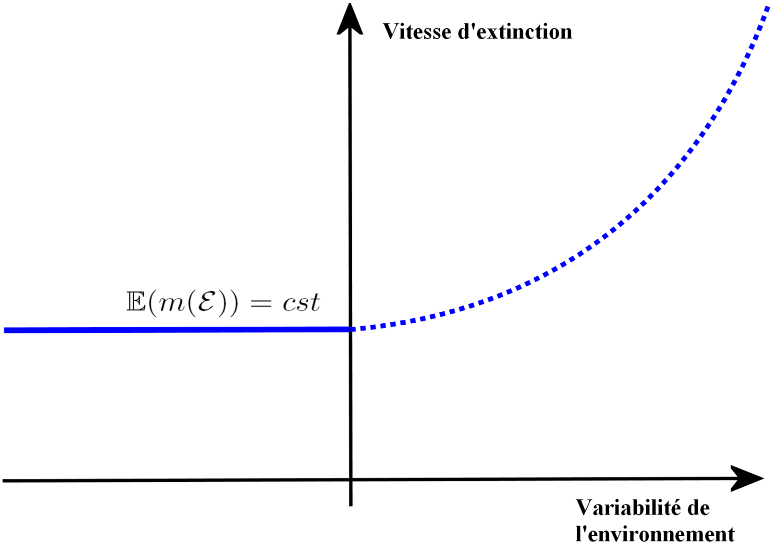
$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c'\mathbb{E}(m(\mathcal{E}))^n/n^{1/2}, \quad (n \to \infty).$$

- Cas faiblement sous critique : $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c''\gamma^n/n^{3/2}, \quad (n \to \infty),$$

avec $\gamma = \inf\{\mathbb{E}(m(\mathcal{E})^s) : s \in [0,1]\} < \mathbb{E}(m(\mathcal{E}))$.

Environnement moyen fixé : $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})) = cst$



Survie en régime sous critique

Alors que la population de fleurs doit s'éteindre p.s. en temps fini, supposons qu'au bout d'un temps long $n >> 1$, au moins une fleur ait survécu. Est ce du

à une reproduction exceptionnelle dans un environnement normal ? (c.a.d à la stochasticité démographique)

à des environnements particulièrement favorables ? (c.a.d. à la stochasticité environnementale).

Survie en régime sous critique

Alors que la population de fleurs doit s'éteindre p.s. en temps fini, supposons qu'au bout d'un temps long $n >> 1$, au moins une fleur ait survécu. Est ce du

à une reproduction exceptionnelle dans un environnement normal ? (c.a.d à la stochasticité démographique)

à des environnements particulièrement favorables ? (c.a.d. à la stochasticité environnementale).

Survie en régime sous critique

Alors que la population de fleurs doit s'éteindre p.s. en temps fini, supposons qu'au bout d'un temps long $n >> 1$, au moins une fleur ait survécu. Est ce du

à une reproduction exceptionnelle dans un environnement normal ? (c.a.d à la stochasticité démographique)

à des environnements particulièrement favorables ? (c.a.d. à la stochasticité environnementale).

Survie en régime sous critique

Alors que la population de fleurs doit s'éteindre p.s. en temps fini, supposons qu'au bout d'un temps long $n >> 1$, au moins une fleur ait survécu. C'est du

à une reproduction exceptionnelle dans le cas fortement ou moyennement sous-critique.

à des environnements particulièrement favorables dans le cas faiblement sous-critique.

Survie en régime sous critique

Introduisons la probabilité de survie de la population sous la suite d'environnements $(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n)$:

$$p(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) = \mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n).$$

Théorème

Conditionnellement à $Z_n > 0$,
Dans le cas fortement ou moyennement sous-critique,

$$p(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{en probabilité.}$$

Dans le cas faiblement sous-critique,

$$\liminf_{n\to\infty} p(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) > 0 \qquad \text{en probabilité.}$$

Idées de la preuve

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \mathbb{E}_1(Z_n \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) = \Pi_{i=1}^n m(\mathcal{E}_i) \quad \text{a.s.}$$

c.a.d

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \exp(S_n), \quad \text{avec } S_n = \sum_{i=1}^n \log(m(\mathcal{E}_i)).$$

Comme $\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \downarrow$ quand $n \uparrow$,

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \exp(L_n), \quad \text{avec } L_n = \min(S_i : 1 \leq i \leq n).$$

En utilisant les distributions linéaires fractionnaires et un lemme sur les marches aléatoires avec drift négatif conditionées à $\geq x$

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n)` \geq ` \exp(L_n).$$

Idées de la preuve

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \mathbb{E}_1(Z_n \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) = \Pi_{i=1}^n m(\mathcal{E}_i) \quad \text{a.s.}$$

c.a.d

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \exp(S_n), \quad \text{avec } S_n = \sum_{i=1}^n \log(m(\mathcal{E}_i)).$$

Comme $\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \downarrow$ quand $n \uparrow$,

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \exp(L_n), \quad \text{avec } L_n = \min(S_i : 1 \leq i \leq n).$$

En utilisant les distributions linéaires fractionnaires et un lemme sur les marches aléatoires avec drift négatif conditionées à $\geq x$

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n)`\geq`\exp(L_n).$$

Idées de la preuve

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \mathbb{E}_1(Z_n \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) = \Pi_{i=1}^n m(\mathcal{E}_i) \quad \text{a.s.}$$

c.a.d

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \exp(S_n), \quad \text{avec } S_n = \sum_{i=1}^n \log(m(\mathcal{E}_i)).$$

Comme $\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \downarrow$ quand $n \uparrow$,

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \exp(L_n), \quad \text{avec } L_n = \min(S_i : 1 \leq i \leq n).$$

En utilisant les distributions linéaires fractionnaires et un lemme sur les marches aléatoires avec drift négatif conditionées à $\geq x$

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n)` \geq ` \exp(L_n).$$

Grandes déviations (avec J. Berestycki)

Plaçons nous maintenant le cas surcritique ($\mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E}))) > 0$), la population survit avec probabilité positive et alors [Guivarc'h Liu 01] :

$$Z_n \sim W\Pi_{i=0}^{n-1} m(\mathcal{E}_i) \quad (n \to \infty) \quad \text{p.s.}$$

En posant, $L = \mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E})))$ et $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \log(m(\mathcal{E}_i))$,

$$Z_n \sim W \exp(S_n) \asymp \exp(Ln) \quad (n \to \infty) \quad \text{p.s.}$$

Avec quelle probabilité observe-t-on une croissance anormalement faible :

$$Z_n \asymp \exp(cn) \quad \text{p.s.,} \quad c < L.$$

pour $n >> 1$ (grandes déviations) et a quoi est ce du ?

On se place dans le cas $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et la taille de la population est forcément croissante.

Grandes déviations (avec J. Berestycki)

Plaçons nous maintenant le cas surcritique ($\mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E}))) > 0$), la population survit avec probabilité positive et alors [Guivarc'h Liu 01] :

$$Z_n \sim W\Pi_{i=0}^{n-1} m(\mathcal{E}_i) \quad (n \to \infty) \quad \text{p.s.}$$

En posant, $L = \mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E})))$ et $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \log(m(\mathcal{E}_i))$,

$$Z_n \sim W \exp(S_n) \asymp \exp(Ln) \quad (n \to \infty) \quad \text{p.s.}$$

Avec quelle probabilité observe-t-on une croissance anormalement faible :

$$Z_n \asymp \exp(cn) \quad \text{p.s.}, \quad c < L.$$

pour $n >> 1$ (grandes déviations) et a quoi est ce du ?

On se place dans le cas $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et la taille de la population est forcément croissante.

Grandes déviations (avec J. Berestycki)

Plaçons nous maintenant le cas surcritique ($\mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E}))) > 0$), la population survit avec probabilité positive et alors [Guivarc'h Liu 01] :

$$Z_n \sim W\Pi_{i=0}^{n-1} m(\mathcal{E}_i) \quad (n \to \infty) \quad \text{p.s.}$$

En posant, $L = \mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E})))$ et $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \log(m(\mathcal{E}_i))$,

$$Z_n \sim W \exp(S_n) \asymp \exp(Ln) \quad (n \to \infty) \quad \text{p.s.}$$

Avec quelle probabilité observe-t-on une croissance anormalement faible :

$$Z_n \asymp \exp(cn) \quad \text{p.s.}, \quad c < L.$$

pour $n >> 1$ (grandes déviations) et a quoi est ce du ?

On se place dans le cas $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et la taille de la population est forcément croissante.

Grandes déviations (avec J. Berestycki)

Plaçons nous maintenant le cas surcritique ($\mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E}))) > 0$), la population survit avec probabilité positive et alors [Guivarc'h Liu 01] :

$$Z_n \sim W\Pi_{i=0}^{n-1} m(\mathcal{E}_i) \quad (n \to \infty) \quad \text{p.s.}$$

En posant, $L = \mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E})))$ et $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \log(m(\mathcal{E}_i))$,

$$Z_n \sim W \exp(S_n) \asymp \exp(Ln) \quad (n \to \infty) \quad \text{p.s.}$$

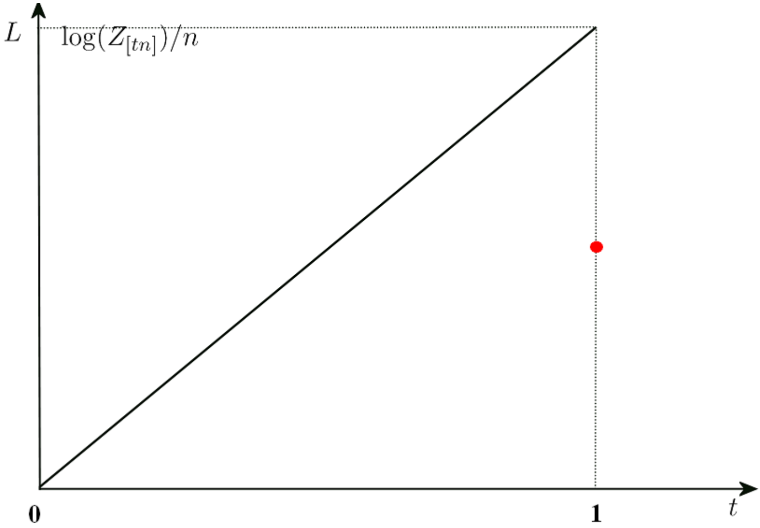
Avec quelle probabilité observe-t-on une croissance anormalement faible :

$$Z_n \asymp \exp(cn) \quad \text{p.s.}, \quad c < L.$$

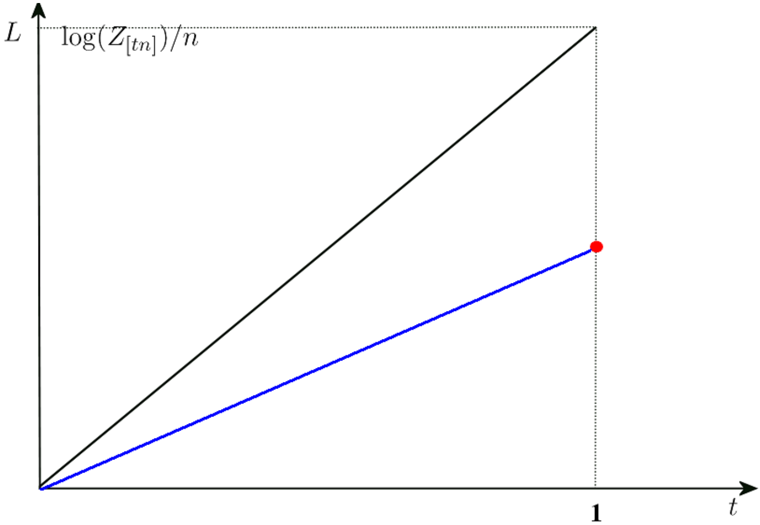
pour $n >> 1$ (grandes déviations) et a quoi est ce du ?

On se place dans le cas $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et la taille de la population est forcément croissante.

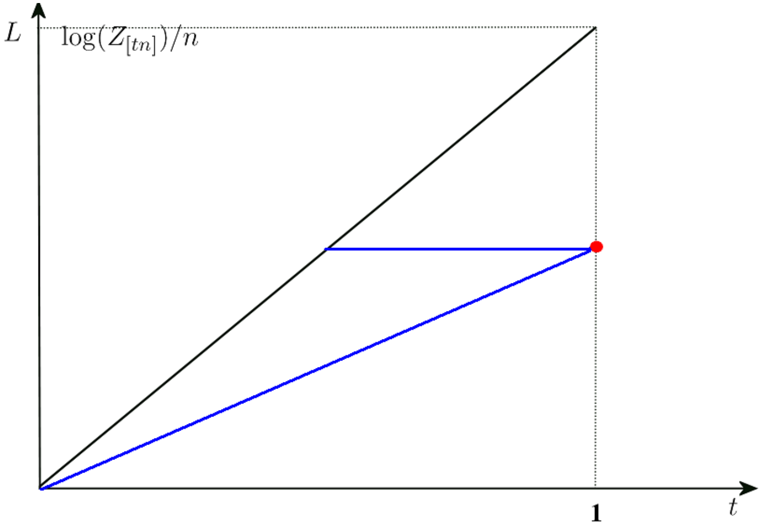
Croissance attendue ($n >> 1$)



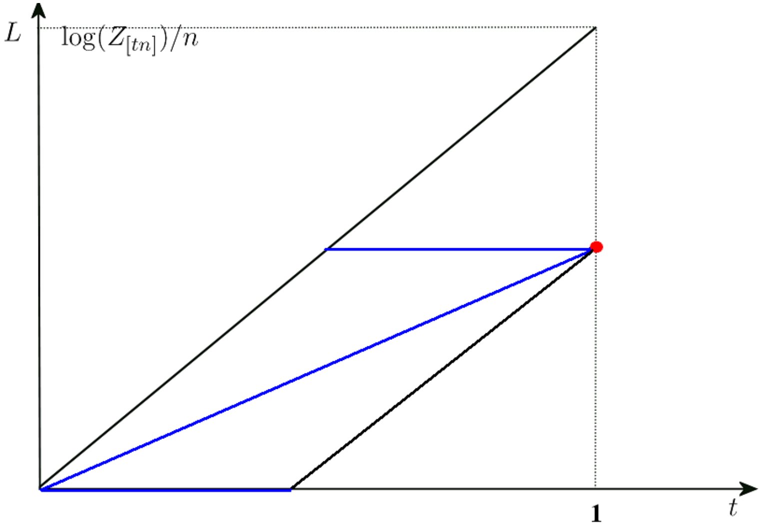
En environnement non aléatoire (Galton Watson)



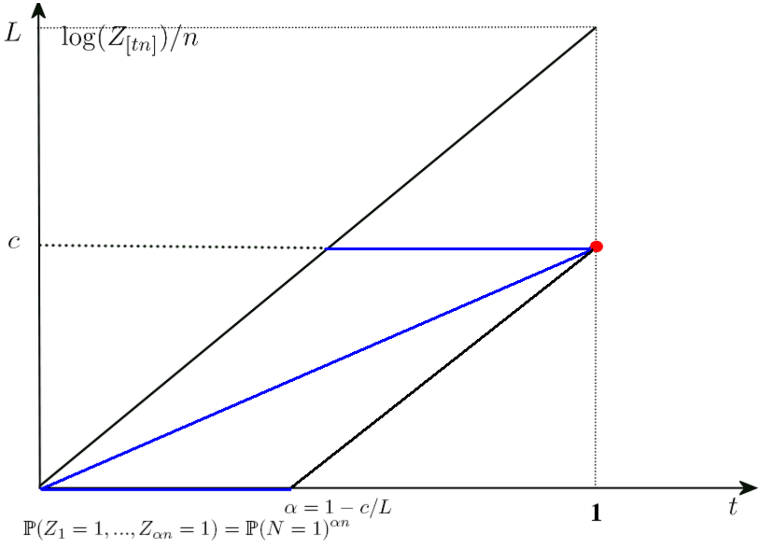
En environnement non aléatoire (Galton Watson)



En environnement non aléatoire (Galton Watson)



En environnement non aléatoire (Galton Watson)



Quoi de plus en environnement aléatoire ?

Idée : pour observer un comportement atypique en temps long, il suffit d'avoir une suite d'environnements atypiques.

$$S_n \sim nc \quad \Rightarrow \quad Z_n \asymp \exp(S_n) \asymp exp(cn).$$

On note ψ la fonction de taux de la marche aléatoire $(S_n : n \in \mathbb{N})$ de drift positif :

$$\psi(c) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{c\lambda - \log(\mathbb{E}[m(\mathcal{E})^\lambda])\} \quad (c \geq 0).$$

Proposition

Pour tous $c > 0$ et $\epsilon > 0$,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log\left(\mathbb{P}(c - \epsilon \leq \log(Z_n)/n \leq c + \epsilon)\right) \leq \psi(c).$$

Quoi de plus en environnement aléatoire ?

Idée : pour observer un comportement atypique en temps long, il suffit d'avoir une suite d'environnements atypiques.

$$S_n \sim nc \quad \Rightarrow \quad Z_n \asymp \exp(S_n) \asymp exp(cn).$$

On note ψ la fonction de taux de la marche aléatoire $(S_n : n \in \mathbb{N})$ de drift positif :

$$\psi(c) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}}\{c\lambda - \log(\mathbb{E}[m(\mathcal{E})^\lambda])\} \quad (c \geq 0).$$

Proposition

Pour tous $c > 0$ et $\epsilon > 0$,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log\left(\mathbb{P}(c - \epsilon \leq \log(Z_n)/n \leq c + \epsilon)\right) \leq \psi(c).$$

Quoi de plus en environnement aléatoire ?

Idée : pour observer un comportement atypique en temps long, il suffit d'avoir une suite d'environnements atypiques.

$$S_n \sim nc \quad \Rightarrow \quad Z_n \asymp \exp(S_n) \asymp exp(cn).$$

On note ψ la fonction de taux de la marche aléatoire $(S_n : n \in \mathbb{N})$ de drift positif :

$$\psi(c) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{c\lambda - \log(\mathbb{E}[m(\mathcal{E})^{\lambda}])\} \quad (c \geq 0).$$

Proposition

Pour tous $c > 0$ et $\epsilon > 0$,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \limsup_{n \to \infty} -\frac{1}{n} \log \left(\mathbb{P}(c - \epsilon \leq \log(Z_n)/n \leq c + \epsilon) \right) \leq \psi(c).$$

Idées de la preuve

Le supremum $\psi(c) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{\lambda c - \phi(\lambda)\}$, est atteint en $\lambda = \lambda_c$ tel que

$$c = \phi'(\lambda_c) = \frac{\mathbb{E}(m(\mathcal{E})^{\lambda_c}\log(m(\mathcal{E})))}{\mathbb{E}(m(\mathcal{E})^{\lambda_c})}.$$

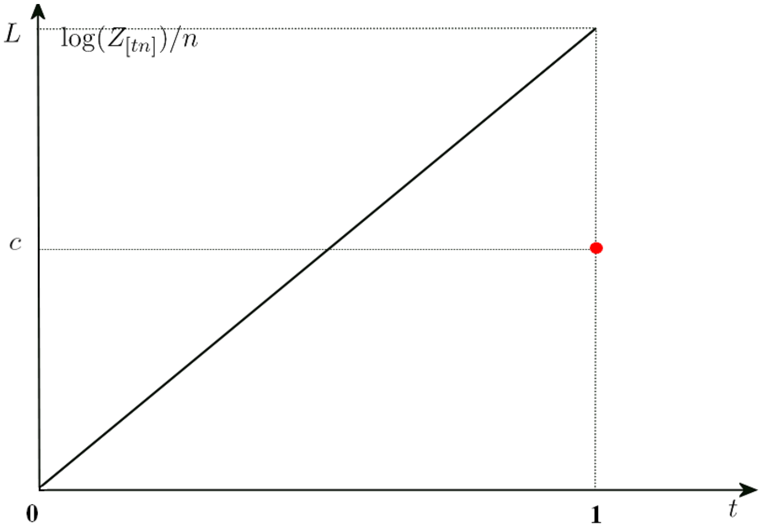
On introduit la nouvelle probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$:

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{E} \in de) = \frac{m(\mathcal{E})^{\lambda_c}}{\mathbb{E}(m(\mathcal{E})^{\lambda_c})}\mathbb{P}(\mathcal{E} \in de).$$

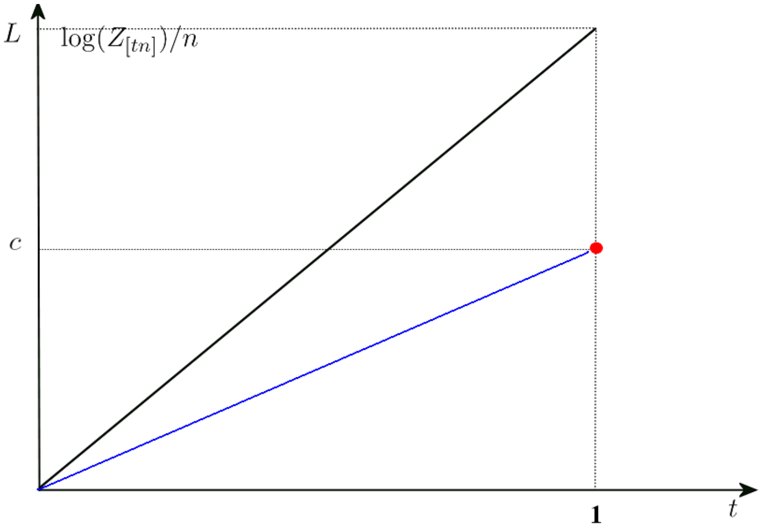
Sous $\widetilde{\mathbb{P}}$, $(S_n : n \in \mathbb{N})$ est une marche aléatoire de drift $c > 0$ et donc

$$Z_n \sim We^{S_n} \asymp e^{cn} \quad (n \to \infty)$$

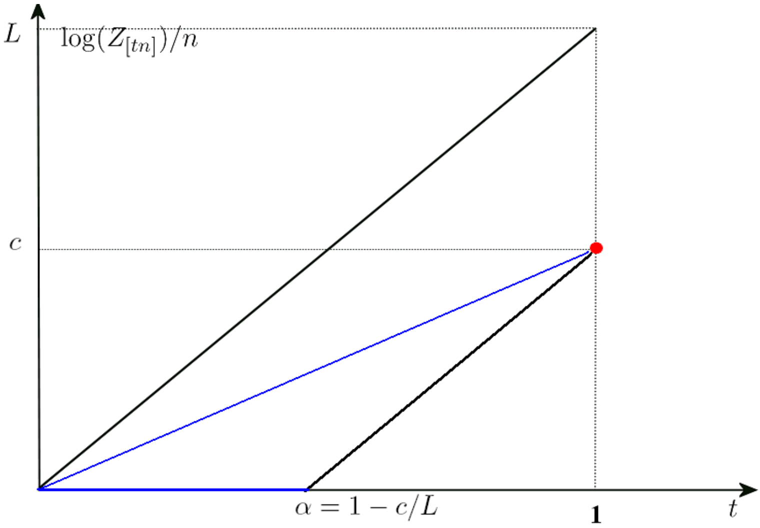
Et en envrionnement aléatoire



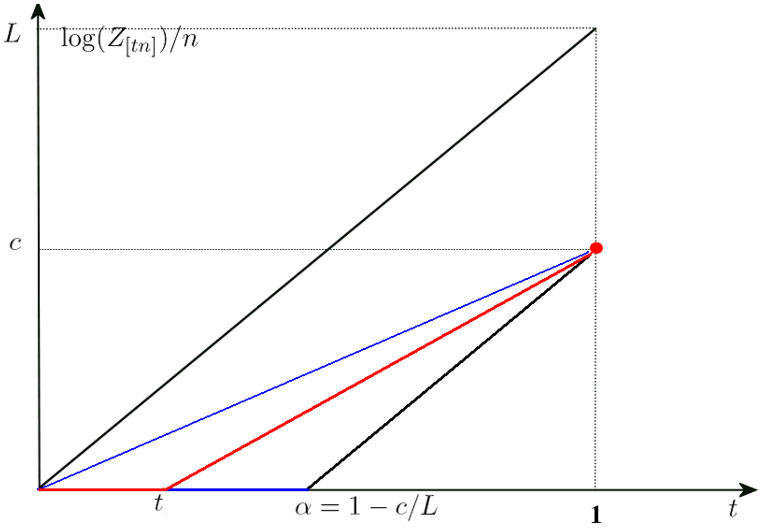
Et en envrionnement aléatoire



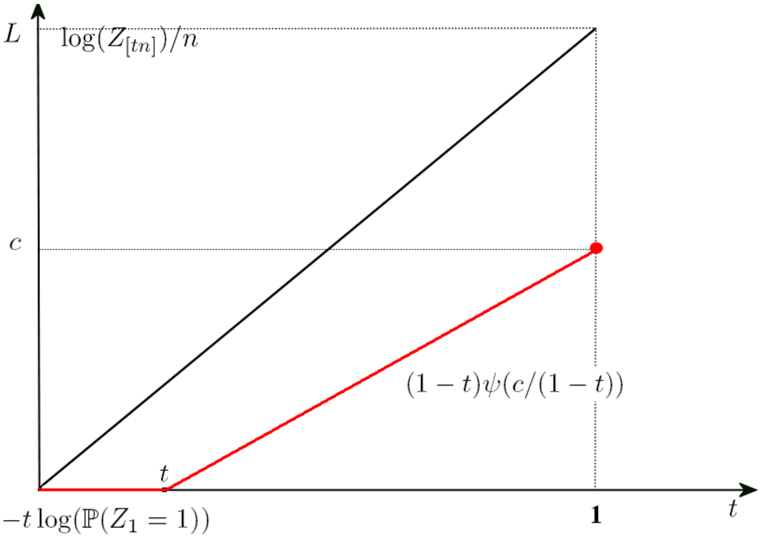
Et en envrionnement aléatoire



Et en envrionnement aléatoire



Et en envrionnement aléatoire



Déviations par valeurs inférieures

On suppose $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et

$$\exists\, A, B > 0 \quad \text{tq} \quad m(\mathcal{E}) \leq A \; p.s. \quad \text{et} \quad V(\mathcal{E}) \leq B \; p.s.$$

On définit

$$\chi(c) := \inf_{t \in [0,1]} \{-t \log(\mathbb{P}_1(Z_1 = 1)) + (1-t)\psi(c/(1-t))\}$$

et on note t_c l'unique point où l'infimum est atteint.

Théorème

Pour tout $c < L$,

$$-\log(\mathbb{P}(Z_n \leq e^{cn}))/n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \chi(c),$$

Déviations par valeurs inférieures

On suppose $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et

$$\exists\, A, B > 0 \quad \text{tq} \quad m(\mathcal{E}) \leq A\; p.s. \quad \text{et} \quad V(\mathcal{E}) \leq B\; p.s.$$

On définit

$$\chi(c) := \inf_{t\in[0,1]} \{-t \log(\mathbb{P}_1(Z_1 = 1)) + (1-t)\psi(c/(1-t))\}$$

et on note t_c l'unique point où l'infimum est atteint.

Théorème

Pour tout $c < L$,

$$-\log(\mathbb{P}(Z_n \leq e^{cn}))/n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \chi(c),$$

Déviations par valeurs inférieures

On suppose $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$ et

$$\exists\, A, B > 0 \quad \text{tq} \quad m(\mathcal{E}) \leq A \; p.s. \quad \text{et} \quad V(\mathcal{E}) \leq B \; p.s.$$

On définit

$$\chi(c) := \inf_{t\in[0,1]} \{-t \log(\mathbb{P}_1(Z_1 = 1)) + (1-t)\psi(c/(1-t))\}$$

et on note t_c l'unique point où l'infimum est atteint.

Théorème

De plus, conditionnellement à $Z_n \leq e^{cn}$,

$$(\log(Z_{[tn]})/n)_{t\in[0,1]} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (f_c(t))_{t\in[0,1]}.$$

en probabilité pour la norme uniforme avec

$$f_c(t) := \begin{cases} 0, & si\ t \leq t_c \\ \frac{c}{1-t_c}(t - t_c), & si\ t \geq t_c. \end{cases}$$

Inférence sur les environnements

Si au bout d'un temps long ($n >> 1$), les fleurs ont eu une croissance anormalement faible ($Z_n \leq \exp(cn)$), on en déduit

- une reproduction atypique (toujours un seul enfant) dans des environnements atypiques (biaisés par la probabilité de faire 1 enfant).
- puis, à partir d'un temps optimal, une reproduction typique dans des environnements atypiques (biaisés par leur moyenne).

Déviations supérieures

Dans les cas $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$, les déviations supérieures sont dues aux environnements et la trajectoire associée est en ligne droite.

Dans le cas sous-critique [Boeinghoff, Kersting 09], on observe à nouveau un plateau (la population survit juste) ssi l'environnement est fortement sous-critique.

Dans un travail en cours avec C. Boeinghoff, les individus peuvent donner naissance à un grand nombre d'enfants (i.e. queues de distribution lourdes). La stratégie consiste maintenant à optimiser

- une période de survie (dans le cas fortement sous-critique)
- un saut vertical (forte reproduction)
- une croissance linéaire dans des environnements particulièrement favorables.

Déviations supérieures

Dans les cas $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$, les déviations supérieures sont dues aux environnements et la trajectoire associée est en ligne droite.

Dans le cas sous-critique [Boeinghoff, Kersting 09], on observe à nouveau un plateau (la population survit juste) ssi l'environnement est fortement sous-critique.

Dans un travail en cours avec C. Boeinghoff, les individus peuvent donner naissance à un grand nombre d'enfants (i.e. queues de distribution lourdes). La stratégie consiste maintenant à optimiser

- une période de survie (dans le cas fortement sous-critique)
- un saut vertical (forte reproduction)
- une croissance linéaire dans des environnements particulièrement favorables.

Déviations supérieures

Dans les cas $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$, les déviations supérieures sont dues aux environnements et la trajectoire associée est en ligne droite.

Dans le cas sous-critique [Boeinghoff, Kersting 09], on observe à nouveau un plateau (la population survit juste) ssi l'environnement est fortement sous-critique.

Dans un travail en cours avec C. Boeinghoff, les individus peuvent donner naissance à un grand nombre d'enfants (i.e. queues de distribution lourdes). La stratégie consiste maintenant à optimiser

- une période de survie (dans le cas fortement sous-critique)
- un saut vertical (forte reproduction)
- une croissance linéaire dans des environnements particulièrement favorables.

Applications et perspectives

Comportement asymptotique du nombre de cellules anormalement infectées dans le modèle de Kimmel.

Processus de branchement en environnement aléatoire multitype pour prendre en compte la variété phénotypique en environnement aléatoire (avec Clément Dombry et Christian Mazza).