Systèmes à diffusion croisée

A. Moussa
LJLL, Sorbonne Université

V. Bansaye, L. Desvillettes, H. Dietert,
T. Lepoutre, F. Muñoz-Hernandez, A. Trescases

Outline

Sommaire

Modèles à une espèce homogènes en espace

Modèles à **une espèce** : Malthus (18^{e}) puis Verhulst (19^{e})

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u(a - bu)$$

$u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ densité de population

a : reproduction

b : compétition inter-espèce

Modèles à deux espèces homogènes en espace

Modèles **compétitifs** ou **mutualistes** :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u(r_1 - s_{11}u \pm s_{12}v),$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v(r_2 - s_{22}v \pm s_{21}u),$$

e.g. modèle proie-prédateur (Lotka-Volterra)

Populations en mouvement

- Prise en compte d'une variable (spatiale) supplémentaire
- Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$,
  - $(t,x) \mapsto u(t,x)$;
  - $(t,x) \mapsto v(t,x)$;
- Solutions de

$$\partial_t u - d_1 \Delta u = u(r_1 - s_{11} u - s_{12} v),$$

$$\partial_t v - d_2 \Delta v = v(r_2 - s_{21} v - s_{22} v),$$

- **Diffusion**, analogie avec la chaleur.

Limites (mathématiques) du modèle

- Qu'observe-t-on en temps long ?

- Si $u(t,x) \longrightarrow_{t\to+\infty} u^\star(x)$ (*idem* pour v)

$$-d_1\Delta u^\star = u^\star(r_1 - s_{11}u^\star - s_{12}v^\star),$$

$$-d_2\Delta v^\star = v^\star(r_2 - s_{21}v^\star - s_{22}v^\star).$$

$\longrightarrow$ Pour Ω « raisonnable », $u^\star$ et $v^\star$ sont génériquement constantes.

Diffusion croisée

Idée : propension à diffuser augmente avec la présence d'autres individus.

Shigesada, Kawasaki et Teramoto (*J. Theoretical Biology*, '79)

$$\partial_t u - \Delta\Big([d_1 + a_{11} u + a_{12} v] u\Big) = u(r_1 - s_{11} u - s_{12} v),$$

$$\partial_t v - \Delta\Big([d_2 + a_{21} u + a_{22} v] v\Big) = v(r_2 - s_{21} v - s_{22} v).$$

d_i : diffusion

a_{ij} : diffusion croisée pour $i \neq j$, auto-diffusion pour $i = j$

Diffusion croisée

Le modèle SKT capte le phénomène de ségrégation.

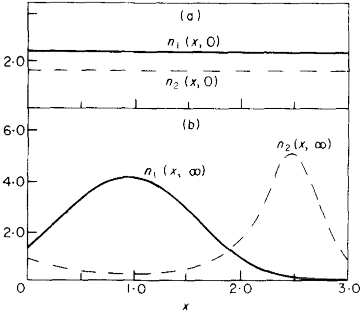


FIG. 8. **Population densities of two similar and competing species.** $U_1(x) = U_2(x) = 1{\cdot}5(x-1)^2$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$; $\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{12} = 0$, $\beta_{21} = 10$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 6$; $\mu_{11} = \mu_{22} = 1{\cdot}4$; $\mu_{21} = \mu_{12} = 2{\cdot}8$. **(a) Initial distributions,** $n_1(x, 0)$ **and** $n_2(x, 0)$. **(b) Finally attained stationary distributions,** $n_1(x, \infty)$ **and** $n_2(x, \infty)$.

4

Sommaire

27 ans

- [SKT '79] : parution du modèle
- 1979 $\rightarrow$ 1984 : états d'équilibres
- [Kim '84] : $\exists$ locale, dimension 1, $a_{ij} = d_i = 1$
- 1984 $\rightarrow$ 1990 : cas triangulaire, petits coefficients
- [Amann '90] : $\exists$ locale, toute dimension
- 1990 $\rightarrow$ 2006 : $\exists$ globale dimension 1 ou 2, petits coefficients, solutions faibles
- [Chen-Jüngel '06] : $\exists$ globale, solutions faibles

Solutions faibles

Solutions reposant sur une fonctionnelle décroissante (Lyapunov, énergie, entropie ...), typiquement pour l'équation de la chaleur (diffusion pure)

$$\partial_t u - \Delta u = 0,$$

pour conditions aux bords adaptées,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u(t)^2 + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega u(0)^2.$$

Information : taille de la solution controlée par donnée initiale

Solutions faibles

Structure entropique de SKT restée cachée longtemps.

$\rightarrow$ Révélée dans [Chen-Jüngel '06].

Pour une certaine norme $\|\cdot\|_X$, on a

$$\|u(t)\|_X + \|v(t)\|_X \leq \|u(0)\|_X + \|v(0)\|_X$$

Robustesse : si SKT_n approximation de SKT, u_n et v_n vérifient

$$\|u_n(t)\|_X + \|v_n(t)\|_X \leq \|u_n(0)\|_X + \|v_n(0)\|_X$$

Solutions faibles

- Étape d'approximation SKT_n délicate
- $\mathrm{SKT}_n \to \mathrm{SKT}$?

$\to$ Argument de **compacité** (procédé non constructif)

- Pour ce type de solutions, l'unicité est une question non triviale.

Sommaire

Dérivation de modèle

- Mathématiquement : réaliser rigoureusement le modèle comme limite d'un jeu d'équations plus élémentaire.
- « justification » du modèle
- (Kiss Cool)^2 : approximation du système ($\Rightarrow \exists$)

Dérivation stochastique de SKT : première voie

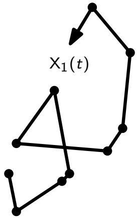
- [Fontbona-Méléard '15] :
- modèle stochastique à population finie, N
- Avec les trajectoires
  - $t \mapsto \mathsf{X}_k(t)$ (population u),
  - $t \mapsto \mathsf{Y}_j(t)$ (population v),

  pour $1 \leq k, j \leq N$.

Dérivation stochastique de SKT : première voie

- [Fontbona-Méléard '15] :
- modèle stochastique à population finie, N
- Avec les trajectoires
  - $t \mapsto X_k(t)$ (population u),
  - $t \mapsto Y_j(t)$ (population v),

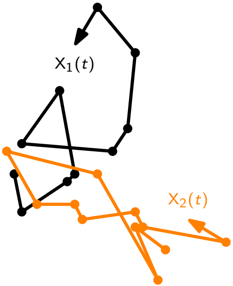
  pour $1 \leq k, j \leq N$.



Dérivation stochastique de SKT : première voie

- [Fontbona-Méléard '15] :
- modèle stochastique à population finie, N
- Avec les trajectoires
  - $t \mapsto \mathrm{X}_k(t)$ (population u),
  - $t \mapsto \mathrm{Y}_j(t)$ (population v),

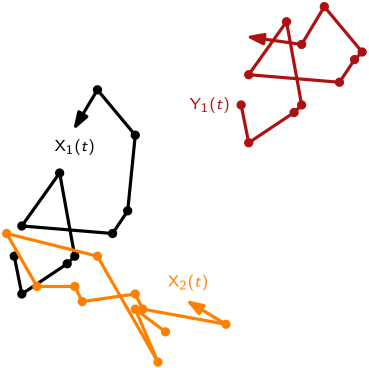
  pour $1 \leq k, j \leq N$.



Dérivation stochastique de SKT : première voie

- [Fontbona-Méléard '15] :
- modèle stochastique à population finie, N
- Avec les trajectoires
  - $t \mapsto \mathrm{X}_k(t)$ (population u),
  - $t \mapsto \mathrm{Y}_j(t)$ (population v),

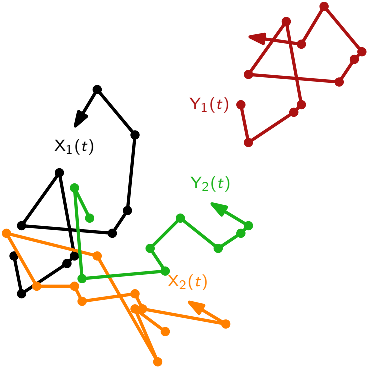
  pour $1 \leq k, j \leq N$.



Dérivation stochastique de SKT : première voie

- [Fontbona-Méléard '15] :
- modèle stochastique à population finie, N
- Avec les trajectoires
  - $t \mapsto X_k(t)$ (population u),
  - $t \mapsto Y_j(t)$ (population v),

  pour $1 \leq k, j \leq N$.



Dérivation stochastique de SKT : première voie

Pour une équation de diffusion

$$\partial_t z - \Delta(\mu z) = \dots$$

fréquence de changement de direction inhomogène, reliée à la diffusivité μ.

Les marches $Z_k(t)$ tournent plus fréquement là où μ est grand.

Mais ici, comment récupérer

$$\partial_t u - \Delta((d_1 + a_{12} v) u) = \dots \quad ?$$

Pas d'information ponctuelle $\rightarrow$ moyenne locale

Système SKT non local

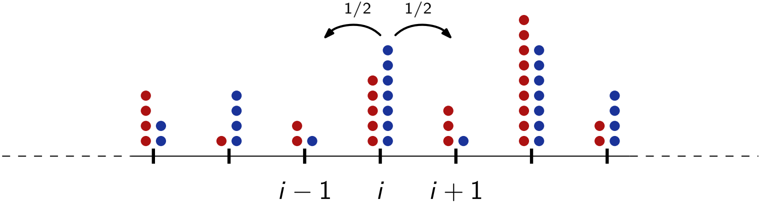
[Fontbona-Méléard '15], dérivation rigoureuse ($N \to +\infty$) de

$$\partial_t u - \Delta\Big([d_1 + a_{11} u \star \rho + a_{12} v \star \rho] u\Big) = \ldots,$$
$$\partial_t v - \Delta\Big([d_2 + a_{21} u \star \rho + a_{22} v \star \rho] v\Big) = \ldots,$$

$u \star \rho = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)\rho(y)\,\mathrm{d}y$, **moyenne pondérée** par le profil ρ.

- Modélisation : sensibilité « étendue »
- Mathématiquement :
  - régularisation ($\exists$ OK)
  - question non triviale : $\rho \rightharpoonup \delta$?

[Daus-Desvillettes-Dietert '19], en dimension 1 :



- $\#\bullet = \#\bullet \sim N$;
- $u_i = \#\bullet$ en position i, fréquence de saut : $u_i(d_1 + a_{12} v_i)$
- $v_i = \#\bullet$ en position i, fréquence de saut : $v_i(d_2 + a_{21} u_i)$

Dérivation stochastique de SKT : seconde voie

[D^3 '19] and [BmMH '22] : pour $N \to +\infty$, en périodique,

$$\dot{U}(t) - \Delta_M\Big[d_1 U(t) + a_{12} U(t) \odot V(t)\Big] = \cdots ,$$

$$\dot{V}(t) - \Delta_M\Big[d_2 V(t) + a_{21} U(t) \odot V(t)\Big] = \cdots ,$$

- $U, V : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^M$
- M : nombre de sites
- $A \odot B = (a_k b_k)_{1 \le k \le M}$

- Δ_M est la matrice

$$M^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Dérivation stochastique de SKT : seconde voie

- Pour $M \to +\infty$ le système précédent converge vers SKT [BmMH '22]

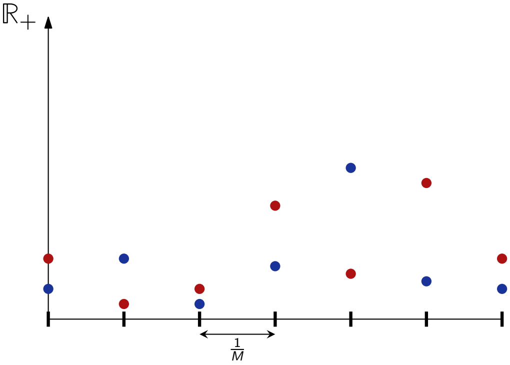
- Aussi dans la limite $M, N \to +\infty$

- Estimation quantitative

- Pour M fixé, déjà questions non triviales

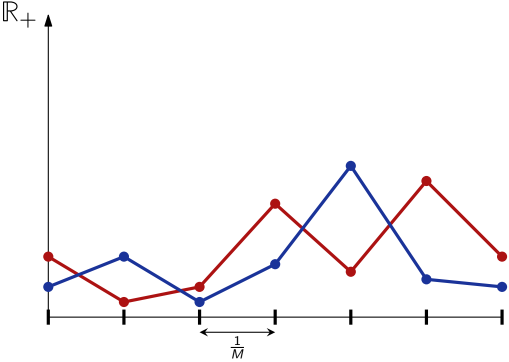
Dérivation stochastique de SKT : seconde voie

Fonctions u et v récupérées par interpolation



Dérivation stochastique de SKT : seconde voie

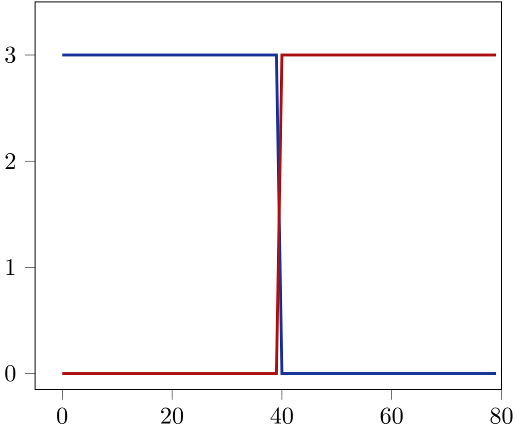
Fonctions u et v récupérées par interpolation



$$\text{Système semi-discret} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \text{SKT}$$

Simulations

Donnée initiale « ségréguée » :



Simulations

- Pas de diffusion croisée, 100 sites

- Diffusion croisée, 100 sites

- Diffusion croisée, 10 sites

Merci de votre attention !