

# Modèles stochastiques individu-centrés avec des dynamiques allométriques.

Virgile Brodu

Workshop de la chaire MMB, Collège de France

Travaux de thèse encadrés par Sylvain Billiard, Nicolas Champagnat et Coralie Fritsch

13 octobre 2025



## Modèles stochastiques individu-centrés avec des dynamiques allométriques.

- 1 Motivation biologique : relations allométriques.
- 2 Conception d'un modèle individu-centré.
- 3 Résultats à ressource constante.
- 4 Résultats avec compétition pour la ressource.
- 5 Synthèse.

## Modèles stochastiques individu-centrés avec des dynamiques allométriques.

- 1 Motivation biologique : relations allométriques.
- 2 Conception d'un modèle individu-centré.
- 3 Résultats à ressource constante.
- 4 Résultats avec compétition pour la ressource.
- 5 Synthèse.

## Relations allométriques

Une **relation allométrique** peut s'écrire sous la forme

$$B \propto M^{\alpha},$$

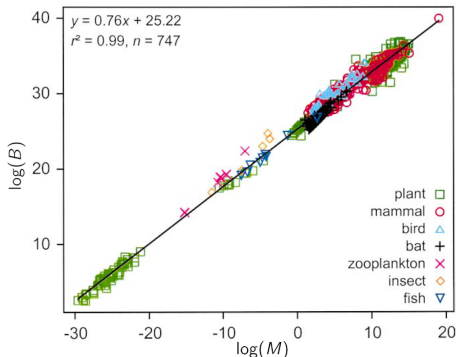
où  $\alpha$  est appelé **coefficient allométrique**.

## Relations allométriques

Une **relation allométrique** peut s'écrire sous la forme

$$B \propto M^{\alpha},$$

où  $\alpha$  est appelé **coefficient allométrique**.



Peters '83, Ernest '03, Brown '04

# La Théorie Métabolique de l'Écologie

Brown, Enquist, West '97,'04, Deeds, Savage '08 : le métabolisme comme mécanisme central.

| Paramètre        | Coefficient allométrique prédit |
|------------------|---------------------------------|
| Taux métabolique | $\alpha$                        |

# La Théorie Métabolique de l'Écologie

Brown, Enquist, West '97,'04, Deeds, Savage '08 : le métabolisme comme mécanisme central.

| Paramètre                     | Coefficient allométrique prédit |
|-------------------------------|---------------------------------|
| Taux métabolique              | $\alpha$                        |
| Taux de croissance (Malthus)  | $\alpha - 1$                    |
| Capacité de charge            | $1 - \alpha$                    |
| Densité spatiale              | $-\alpha$                       |
| Consommation totale d'énergie | 0                               |

# La Théorie Métabolique de l'Écologie

Brown, Enquist, West '97,'04, Deeds, Savage '08 : le métabolisme comme mécanisme central.

| Paramètre                     | Coefficient allométrique prédit |
|-------------------------------|---------------------------------|
| Taux métabolique              | $\alpha$                        |
| Taux de croissance (Malthus)  | $\alpha - 1$                    |
| Capacité de charge            | $1 - \alpha$                    |
| Densité spatiale              | $-\alpha$                       |
| Consommation totale d'énergie | 0                               |

Energy Equivalence Rule (Damuth '81)

## Une théorie générale ?

Malerba, Marshall '19 : étude d'une population d'algues vertes, avec un mécanisme de sélection artificielle

## Une théorie générale ?

Malerba, Marshall '19 : étude d'une population d'algues vertes, avec un mécanisme de sélection artificielle → **au sein d'une espèce donnée.**

## Une théorie générale ?

Malerba, Marshall '19 : étude d'une population d'algues vertes, avec un mécanisme de sélection artificielle → **au sein d'une espèce donnée.**

$$\alpha = 0.93$$

| Paramètre              | Coefficient prédit | Coefficient mesuré |
|------------------------|--------------------|--------------------|
| Taux de croissance     | -0.07              |                    |
| Capacité de charge     | 0.07               |                    |
| Densité spatiale       | -0.93              |                    |
| Production de biomasse | 0                  |                    |

## Une théorie générale ?

Malerba, Marshall '19 : étude d'une population d'algues vertes, avec un mécanisme de sélection artificielle → **au sein d'une espèce donnée.**

$$\alpha = 0.93$$

| Paramètre              | Coefficient prédit | Coefficient mesuré |
|------------------------|--------------------|--------------------|
| Taux de croissance     | -0.07              | 0.38               |
| Capacité de charge     | 0.07               | 0.35               |
| Densité spatiale       | -0.93              | -0.59              |
| Production de biomasse | 0                  | 0.41               |

## Une théorie générale ?

Malerba, Marshall '19 : étude d'une population d'algues vertes, avec un mécanisme de sélection artificielle → **au sein d'une espèce donnée.**

$$\alpha = 0.93$$

| Paramètre              | Coefficient prédit | Coefficient mesuré |
|------------------------|--------------------|--------------------|
| Taux de croissance     | -0.07              | 0.38               |
| Capacité de charge     | 0.07               | 0.35               |
| Densité spatiale       | -0.93              | -0.59              |
| Production de biomasse | 0                  | 0.41               |

Allométries interspécifiques  $\neq$  Allométries intraspécifiques

# Motivations biologiques et apport de nos travaux

## Objectifs

- Modéliser des dynamiques de population avec des relations allométriques au niveau individuel (au niveau “microscopique”).

# Motivations biologiques et apport de nos travaux

## Objectifs

- Modéliser des dynamiques de population avec des relations allométriques au niveau individuel (au niveau “microscopique”).
- Inverser la manière habituelle de justifier les relations allométriques émergeant à l'échelle macroscopique (dans l'esprit de Wickman '24).

# Motivations biologiques et apport de nos travaux

## Objectifs

- Modéliser des dynamiques de population avec des relations allométriques au niveau individuel (au niveau “microscopique”).
- Inverser la manière habituelle de justifier les relations allométriques émergeant à l'échelle macroscopique (dans l'esprit de Wickman '24).

## Contributions

- Contraintes sur les relations allométriques (Billiard, B., Champagnat, Fritsch '25, soumis à AAP).

# Motivations biologiques et apport de nos travaux

## Objectifs

- Modéliser des dynamiques de population avec des relations allométriques au niveau individuel (au niveau “microscopique”).
- Inverser la manière habituelle de justifier les relations allométriques émergeant à l'échelle macroscopique (dans l'esprit de Wickman '24).

## Contributions

- Contraintes sur les relations allométriques (Billiard, B., Champagnat, Fritsch '25, soumis à AAP).
- Un résultat de tension (convergence ?) pour des taux de croissance, naissance et mort non-bornés (soumis d'ici fin 2025).

# Motivations biologiques et apport de nos travaux

## Objectifs

- Modéliser des dynamiques de population avec des relations allométriques au niveau individuel (au niveau “microscopique”).
- Inverser la manière habituelle de justifier les relations allométriques émergeant à l'échelle macroscopique (dans l'esprit de Wickman '24).

## Contributions

- Contraintes sur les relations allométriques (Billiard, B., Champagnat, Fritsch '25, soumis à AAP).
- Un résultat de tension (convergence ?) pour des taux de croissance, naissance et mort non-bornés (soumis d'ici fin 2025).
- Interprétation biologique de nos résultats mathématiques (travail en cours avec Sylvain Billiard).

## Modèles stochastiques individu-centrés avec des dynamiques allométriques.

- 1 Motivations biologiques: relations allométriques.
- 2 Conception d'un modèle individu-centré.
- 3 Résultats à ressource constante.
- 4 Résultats avec compétition pour la ressource.
- 5 Synthèse.

## Cadre général

Modèle structuré en *énergie*, chaque espèce caractérisée par une **énergie à la naissance**  $x_0 > 0$ .

## Cadre général

Modèle structuré en *énergie*, chaque espèce caractérisée par une **énergie à la naissance**  $x_0 > 0$ .

- Population décrite par une mesure ponctuelle finie

$$\mu_t = \sum_{u \in V_t} \delta_{\xi_t^u}.$$

## Cadre général

Modèle structuré en *énergie*, chaque espèce caractérisée par une **énergie à la naissance**  $x_0 > 0$ .

- Population décrite par une mesure ponctuelle finie

$$\mu_t = \sum_{u \in V_t} \delta_{\xi_t^u}.$$

- Ressources  $R_t \in [0, R_{\max}]$ .

## Cadre général

Modèle structuré en *énergie*, chaque espèce caractérisée par une **énergie à la naissance**  $x_0 > 0$ .

- Population décrite par une mesure ponctuelle finie

$$\mu_t = \sum_{u \in V_t} \delta_{\xi_t^u}.$$

- Ressources  $R_t \in [0, R_{\max}]$ .

Naissances et morts

## Cadre général

Modèle structuré en *énergie*, chaque espèce caractérisée par une **énergie à la naissance**  $x_0 > 0$ .

- Population décrite par une mesure ponctuelle finie

$$\mu_t = \sum_{u \in V_t} \delta_{x_t^u}.$$

- Ressources  $R_t \in [0, R_{\max}]$ .

Naissances et morts

Gain et perte d'énergie

## Cadre général

Modèle structuré en *énergie*, chaque espèce caractérisée par une **énergie à la naissance**  $x_0 > 0$ .

- Population décrite par une mesure ponctuelle finie

$$\mu_t = \sum_{u \in V_t} \delta_{x_t^u}.$$

- Ressources  $R_t \in [0, R_{\max}]$ .

Naissances et morts

Gain et perte d'énergie

→ Jumping Markov Process (Jacod, Skorokhod '96).

## Cadre général

Modèle structuré en *énergie*, chaque espèce caractérisée par une **énergie à la naissance**  $x_0 > 0$ .

- Population décrite par une mesure ponctuelle finie

$$\mu_t = \sum_{u \in V_t} \delta_{\xi_t^u}.$$

- Ressources  $R_t \in [0, R_{\max}]$ .

Naissances et morts

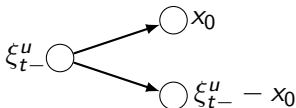
Gain et perte d'énergie

→ Jumping Markov Process (Jacod, Skorokhod '96).

→ **Modèle individu-centré** (Fournier et Méléard '04, Champagnat et al. '08, Tran '08, Campillo et Fritsch '15, Tchouanti '24).

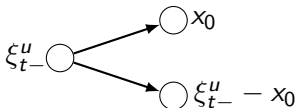
## Mécanismes aléatoires

- Naissance à taux  $b(\xi_t^u)$ .



## Mécanismes aléatoires

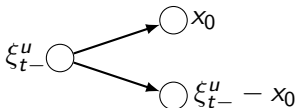
- Naissance à taux  $b(\xi_t^u)$ .



$$\mu_t \leftarrow \mu_{t-} - \delta_{\xi_{t-}^u} + \delta_{\xi_{t-}^u - x_0} + \delta_{x_0}.$$

## Mécanismes aléatoires

- Naissance à taux  $b(\xi_t^u)$ .



$$\mu_t \longleftarrow \mu_{t-} - \delta_{\xi_{t-}^u} + \delta_{\xi_{t-}^u - x_0} + \delta_{x_0}.$$

- Mort à taux  $d(\xi_t^u)$ .

$$\mu_t \longleftarrow \mu_t - \delta_{\xi_{t-}^u}.$$

## Mécanismes déterministes

- Perte d'énergie à vitesse  $\ell(\xi_t^u)$ , gain d'énergie à vitesse  $f(\xi_t^u, R_t)$ .

$$\forall u \in V_t, \quad \frac{d\xi_t^u}{dt} = f(\xi_t^u, R_t) - \ell(\xi_t^u) =: g(\xi_t^u, R_t).$$

## Mécanismes déterministes

- Perte d'énergie à vitesse  $\ell(\xi_t^u)$ , gain d'énergie à vitesse  $f(\xi_t^u, R_t)$ .

$$\forall u \in V_t, \quad \frac{d\xi_t^u}{dt} = f(\xi_t^u, R_t) - \ell(\xi_t^u) =: g(\xi_t^u, R_t).$$

- Évolution de  $(R_t)_{t \geq 0}$  : deux modèles étudiés.

## Mécanismes déterministes

- Perte d'énergie à vitesse  $\ell(\xi_t^u)$ , gain d'énergie à vitesse  $f(\xi_t^u, R_t)$ .

$$\forall u \in V_t, \quad \frac{d\xi_t^u}{dt} = f(\xi_t^u, R_t) - \ell(\xi_t^u) =: g(\xi_t^u, R_t).$$

- Évolution de  $(R_t)_{t \geq 0}$  : deux modèles étudiés.

- ① Ressource constante.

$$\forall t \geq 0, \quad R_t = R.$$

## Mécanismes déterministes

- Perte d'énergie à vitesse  $\ell(\xi_t^u)$ , gain d'énergie à vitesse  $f(\xi_t^u, R_t)$ .

$$\forall u \in V_t, \quad \frac{d\xi_t^u}{dt} = f(\xi_t^u, R_t) - \ell(\xi_t^u) =: g(\xi_t^u, R_t).$$

- Évolution de  $(R_t)_{t \geq 0}$  : deux modèles étudiés.

- ① Ressource constante.

$$\forall t \geq 0, \quad R_t = R.$$

- ② Compétition pour la ressource.

$$\frac{dR_t}{dt} = \rho(R_t, \mu_t) := \varsigma(R_t) - \chi \sum_{u \in V_t} f(\xi_t^u, R_t),$$

avec  $\chi > 1$ .

## Cadre allométrique

- Métabolisme  $\ell(x) := C_\alpha x^\alpha$ ,
- Taux de naissance  $b(x) := \mathbb{1}_{x > x_0} \tilde{b}(x)$ , avec  $\tilde{b}(x) := C_\beta x^\beta$ ,
- Taux de mort  $d(x) := C_\delta x^\delta$ ,
- Gain d'énergie  $f(x, R) := \phi(R) C_\gamma x^\gamma$ .

## Cadre allométrique

- Métabolisme  $\ell(x) := C_\alpha x^\alpha$ ,
- Taux de naissance  $b(x) := \mathbb{1}_{x > x_0} \tilde{b}(x)$ , avec  $\tilde{b}(x) := C_\beta x^\beta$ ,
- Taux de mort  $d(x) := C_\delta x^\delta$ ,
- Gain d'énergie  $f(x, R) := \phi(R) C_\gamma x^\gamma$ .

Relations allométriques prédites par la Théorie Métabolique de l'Écologie (Yodzis '92, Brown '04, Denéchère '22) :

$$\alpha = \gamma = \beta + 1 = \delta + 1.$$

## Modèles stochastiques individu-centrés avec des dynamiques allométriques.

- 1 Motivations biologiques: relations allométriques.
- 2 Conception d'un modèle individu-centré.
- 3 Résultats à ressource constante.
- 4 Résultats avec compétition pour la ressource.
- 5 Synthèse.

# Notations

- $(\mu_t)_{t \geq 0}$ : population,

# Notations

- $(\mu_t)_{t \geq 0}$ : population,
- $(\Upsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ : générations,

# Notations

- $(\mu_t)_{t \geq 0}$ : population,
- $(\Upsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ : générations,
- $(\xi_t)_{t \geq 0}$ : trajectoire individuelle aléatoire de condition initiale  $x_0$ .

## Définition

*On définit  $N$  le nombre aléatoire d'événements de naissance durant la trajectoire  $\xi$ , et*

$$m := \mathbb{E}(N).$$

# Notations

- $(\mu_t)_{t \geq 0}$ : population,
- $(\Upsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ : générations,
- $(\xi_t)_{t \geq 0}$ : trajectoire individuelle aléatoire de condition initiale  $x_0$ .

## Définition

*On définit  $N$  le nombre aléatoire d'événements de naissance durant la trajectoire  $\xi$ , et*

$$m := \mathbb{E}(N).$$

## Proposition (**Propriété de branchement**)

*Le processus  $(\Upsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est un processus de Galton-Watson dont la loi de reproduction est celle de  $N$ .*

# Notations

- $(\mu_t)_{t \geq 0}$ : population,
- $(\Upsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ : générations,
- $(\xi_t)_{t \geq 0}$ : trajectoire individuelle aléatoire de condition initiale  $x_0$ .

## Définition

On définit  $N$  le nombre aléatoire d'événements de naissance durant la trajectoire  $\xi$ , et

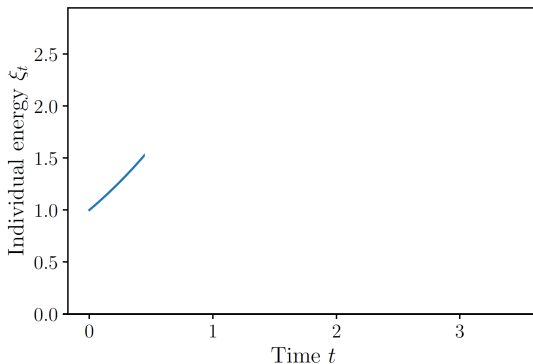
$$m := \mathbb{E}(N).$$

## Proposition (**Propriété de branchement**)

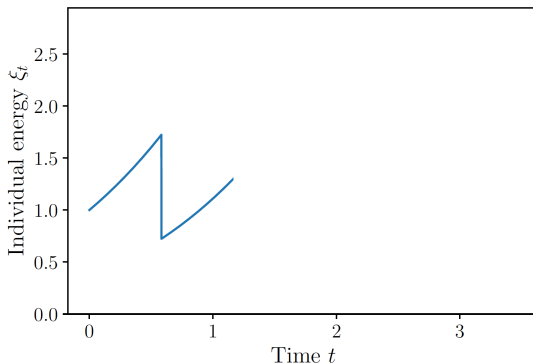
Le processus  $(\Upsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est un processus de Galton-Watson dont la loi de reproduction est celle de  $N$ .

→ Étude de  $\xi$  en fonction de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et  $x_0$ .

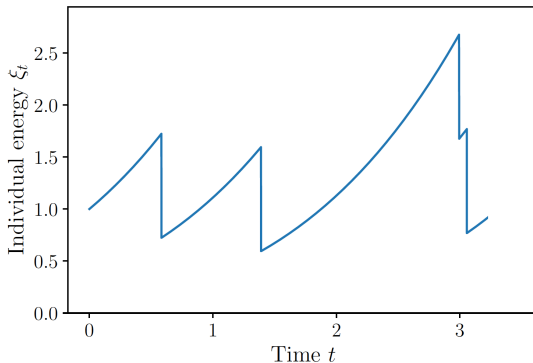
## Allure typique d'une trajectoire individuelle



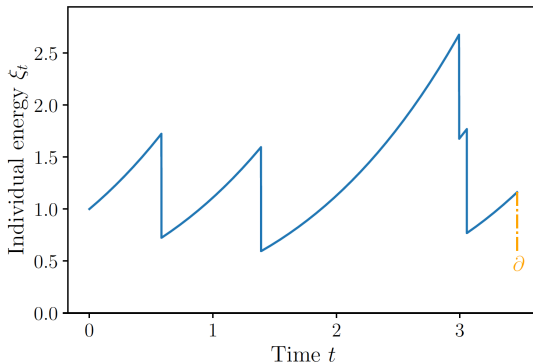
## Allure typique d'une trajectoire individuelle



## Allure typique d'une trajectoire individuelle



# Allure typique d'une trajectoire individuelle



# Hypothèses

## Définition

$$T_0 := \inf\{t \geq 0, \xi_t \xrightarrow[s \rightarrow t-]{} 0\},$$

# Hypothèses

## Définition

$$T_0 := \inf\{t \geq 0, \xi_t \xrightarrow{s \rightarrow t-} 0\}, \quad T_\infty := \inf\{t \geq 0, \xi_s \xrightarrow{s \rightarrow t-} +\infty\},$$

# Hypothèses

## Définition

$$T_0 := \inf\{t \geq 0, \xi_t \xrightarrow{s \rightarrow t-} 0\}, \quad T_\infty := \inf\{t \geq 0, \xi_s \xrightarrow{s \rightarrow t-} +\infty\},$$
$$T_d := \inf\{t \geq 0, \xi_t = \partial\}.$$

# Hypothèses

## Définition

$$T_0 := \inf\{t \geq 0, \xi_t \xrightarrow{s \rightarrow t-} 0\}, \quad T_\infty := \inf\{t \geq 0, \xi_s \xrightarrow{s \rightarrow t-} +\infty\},$$
$$T_d := \inf\{t \geq 0, \xi_t = \partial\}.$$

## Hypothèse (Trajectoires individuelles bien définies)

*Pour tout  $x_0 > 0$ , pour tout  $R \in [0, R_{\max}]$ , presque sûrement,*

$$T_d < T_0 \wedge T_\infty.$$

# Hypothèses

## Définition

$$T_0 := \inf\{t \geq 0, \xi_t \xrightarrow{s \rightarrow t-} 0\}, \quad T_\infty := \inf\{t \geq 0, \xi_s \xrightarrow{s \rightarrow t-} +\infty\},$$
$$T_d := \inf\{t \geq 0, \xi_t = \partial\}.$$

## Hypothèse (Trajectoires individuelles bien définies)

*Pour tout  $x_0 > 0$ , pour tout  $R \in [0, R_{\max}]$ , presque sûrement,*

$$T_d < T_0 \wedge T_\infty.$$

## Hypothèse (Survie de la population)

$$\forall x_0 > 0, \exists R_0 > 0, \forall R \geq R_0, \quad m > 1,$$

*i.e. le processus  $\Upsilon$  est surcritique, donc  $\mathbb{P}(\forall t \geq 0, \mu_t \neq 0) > 0$ .*

# Hypothèses

## Définition

$$T_0 := \inf\{t \geq 0, \xi_t \xrightarrow{s \rightarrow t-} 0\}, \quad T_\infty := \inf\{t \geq 0, \xi_s \xrightarrow{s \rightarrow t-} +\infty\},$$
$$T_d := \inf\{t \geq 0, \xi_t = \partial\}.$$

## Hypothèse (Trajectoires individuelles bien définies)

*Pour tout  $x_0 > 0$ , pour tout  $R \in [0, R_{\max}]$ , presque sûrement,*

$$T_d < T_0 \wedge T_\infty.$$

## Hypothèse (Survie de la population)

$$\forall x_0 > 0, \exists R_0 > 0, \forall R \geq R_0, \quad m > 1,$$

*i.e. le processus  $\Upsilon$  est surcritique, donc  $\mathbb{P}(\forall t \geq 0, \mu_t \neq 0) > 0$ .*

# Résultat principal

## Hypothèses

*Pour tout  $x_0 > 0$ ,*

- ①  $\forall R \in [0, R_{\max}], \quad \mathbb{P}(T_d < T_0 \wedge T_\infty) = 1.$
- ②  $\exists R_0 > 0, \forall R \geq R_0, \quad \mathbb{P}(\forall t \geq 0, \mu_t \neq 0) > 0.$

# Résultat principal

## Hypothèses

Pour tout  $x_0 > 0$ ,

- ①  $\forall R \in [0, R_{\max}], \quad \mathbb{P}(T_d < T_0 \wedge T_\infty) = 1.$
- ②  $\exists R_0 > 0, \forall R \geq R_0, \quad \mathbb{P}(\forall t \geq 0, \mu_t \neq 0) > 0.$

## Théorème

Dans le cas allométrique, les hypothèses précédentes sont vérifiées, **seulement si** il existe  $C > 0$  tel que

$$\gamma = \alpha, \quad \delta = \alpha - 1, \quad (\beta = \alpha - 1 \text{ or } \beta \geq \alpha - 1 + C).$$

## Modèles stochastiques individu-centrés avec des dynamiques allométriques.

- 1 Motivations biologiques: relations allométriques.
- 2 Conception d'un modèle individu-centré.
- 3 Résultats à ressource constante.
- 4 Résultats avec compétition pour la ressource.
- 5 Synthèse.

## Écriture classique du processus

On considère  $\mathcal{N}(ds, du, dh)$  et  $\mathcal{N}'(ds, du, dh)$  deux **mesures ponctuelles de Poisson** indépendantes sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}_+^*$ , d'intensité  $ds \times n(du) \times dh$ , avec  $n(du) := \sum_{w \in \mathcal{U}} \delta_w(du)$ , et une condition initiale  $(\mu_0, R_0)$ . Le **flot associé au système d'EDO couplées** vérifié par les énergies individuelles et la ressource en l'absence de sauts est noté  $X$ .

## Écriture classique du processus

On considère  $\mathcal{N}(ds, du, dh)$  et  $\mathcal{N}'(ds, du, dh)$  deux **mesures ponctuelles de Poisson** indépendantes sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}_+^*$ , d'intensité  $ds \times n(du) \times dh$ , avec  $n(du) := \sum_{w \in \mathcal{U}} \delta_w(du)$ , et une condition initiale  $(\mu_0, R_0)$ . Le **flot associé au système d'EDO couplées** vérifié par les énergies individuelles et la ressource en l'absence de sauts est noté  $X$ .

$$(\mu_t, R_t) = X_t(\mu_0, R_0)$$

## Écriture classique du processus

On considère  $\mathcal{N}(ds, du, dh)$  et  $\mathcal{N}'(ds, du, dh)$  deux **mesures ponctuelles de Poisson** indépendantes sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}_+^*$ , d'intensité  $ds \times n(du) \times dh$ , avec  $n(du) := \sum_{w \in \mathcal{U}} \delta_w(du)$ , et une condition initiale  $(\mu_0, R_0)$ . Le **flot associé au système d'EDO couplées** vérifié par les énergies individuelles et la ressource en l'absence de sauts est noté  $X$ .

$$(\mu_t, R_t) = X_t(\mu_0, R_0) + \int_0^t \int_{\mathcal{U} \times \mathbb{R}_+^*} \mathbb{1}_{\{u \in V_{s-}\}} \mathbb{1}_{\{h \leq b(\xi_{s-}^u)\}}$$

$$\mathcal{N}(ds, du, dh)$$

## Écriture classique du processus

On considère  $\mathcal{N}(ds, du, dh)$  et  $\mathcal{N}'(ds, du, dh)$  deux **mesures ponctuelles de Poisson** indépendantes sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}_+^*$ , d'intensité  $ds \times n(du) \times dh$ , avec  $n(du) := \sum_{w \in \mathcal{U}} \delta_w(du)$ , et une condition initiale  $(\mu_0, R_0)$ . Le **flot associé au système d'EDO couplées** vérifié par les énergies individuelles et la ressource en l'absence de sauts est noté  $X$ .

$$\begin{aligned}
 (\mu_t, R_t) = & X_t(\mu_0, R_0) \\
 & + \int_0^t \int_{\mathcal{U} \times \mathbb{R}_+^*} \mathbb{1}_{\{u \in V_{s-}\}} \mathbb{1}_{\{h \leq b(\xi_{s-}^u)\}} \\
 & [X_{t-s}(\mu_{s-} + \delta_{x_0} + \delta_{\xi_{s-}^u - x_0} - \delta_{\xi_{s-}^u}, R_s) \\
 & - X_{t-s}(\mu_{s-}, R_s)] \mathcal{N}(ds, du, dh)
 \end{aligned}$$

## Écriture classique du processus

On considère  $\mathcal{N}(ds, du, dh)$  et  $\mathcal{N}'(ds, du, dh)$  deux **mesures ponctuelles de Poisson** indépendantes sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}_+^*$ , d'intensité  $ds \times n(du) \times dh$ , avec  $n(du) := \sum_{w \in \mathcal{U}} \delta_w(du)$ , et une condition initiale  $(\mu_0, R_0)$ . Le **flot associé au système d'EDO couplées** vérifié par les énergies individuelles et la ressource en l'absence de sauts est noté  $X$ .

$$\begin{aligned}
 (\mu_t, R_t) = & X_t(\mu_0, R_0) \\
 & + \int_0^t \int_{\mathcal{U} \times \mathbb{R}_+^*} \mathbb{1}_{\{u \in V_{s-}\}} \mathbb{1}_{\{h \leq b(\xi_{s-}^u)\}} \\
 & \quad [X_{t-s}(\mu_{s-} + \delta_{x_0} + \delta_{\xi_{s-}^u - x_0} - \delta_{\xi_{s-}^u}, R_s) \\
 & \quad - X_{t-s}(\mu_{s-}, R_s)] \mathcal{N}(ds, du, dh) \\
 & + \int_0^t \int_{\mathcal{U} \times \mathbb{R}_+^*} \mathbb{1}_{\{u \in V_{s-}\}} \mathbb{1}_{\{h \leq d(\xi_{s-}^u)\}} [X_{t-s}(\mu_{s-} - \delta_{\xi_{s-}^u}, R_s) \\
 & \quad - X_{t-s}(\mu_{s-}, R_s)] \mathcal{N}'(ds, du, dh).
 \end{aligned}$$

# Apport de nos travaux à la littérature existante

## Résultats existants :

- Processus bien défini en tout temps  $t \geq 0$ : pas d'accumulation des temps de saut.
- Contrôle de la taille de population.
- Propriétés de martingale du processus.
- Convergence vers un système couplé d'équations intégrro-différentielles déterministes.

Fournier, Méléard '04 (modèle d'origine), Tran '08 (modèle structuré en âge), Champagnat et al. '08 (avec mutations), Campillo, Fritsch '15 (interaction avec une ressource), Tchouanti '24 (avec un terme de diffusion).

# Apport de nos travaux à la littérature existante

## Résultats existants :

- Processus bien défini en tout temps  $t \geq 0$ : pas d'accumulation des temps de saut.
- Contrôle de la taille de population.
- Propriétés de martingale du processus.
- Convergence vers un système couplé d'équations intégrro-différentielles déterministes.

Fournier, Méléard '04 (modèle d'origine), Tran '08 (modèle structuré en âge), Champagnat et al. '08 (avec mutations), Campillo, Fritsch '15 (interaction avec une ressource), Tchouanti '24 (avec un terme de diffusion).

→ Taux (de saut et de croissance) bornés.

# Apport de nos travaux à la littérature existante

## Nos résultats :

- Processus bien défini en tout temps  $t \geq 0$ : pas d'accumulation des temps de saut, **trajectoires individuelles bien définies**.
- Contrôle de la taille de population, **de l'énergie totale du système, et de moments du processus**.
- Propriétés de martingale du processus.
- Convergence vers un système couplé d'équations intégréo-différentielles déterministes.

→ **Taux (de saut et de croissance) non-bornés.**

# Apport de nos travaux à la littérature existante

## Nos résultats :

- Processus bien défini en tout temps  $t \geq 0$ : pas d'accumulation des temps de saut, **trajectoires individuelles bien définies.**
- Contrôle de la taille de population, **de l'énergie totale du système, et de moments du processus.**
- Propriétés de martingale du processus.
- Convergence vers un système couplé d'équations intégréo-différentielles déterministes.

→ **Taux (de saut et de croissance) non-bornés.**

→ **Conditions sur les taux et travail dans un espace de mesure à poids.**

## Renormalisation du processus

Paramètre d'échelle :  $K \in \mathbb{N}^*$  (nombre d'individus dans la population à  $t = 0$ ).

## Renormalisation du processus

Paramètre d'échelle :  $K \in \mathbb{N}^*$  (nombre d'individus dans la population à  $t = 0$ ).

On modifie le terme de compétition

$$\frac{dR_t^K}{dt} := \varsigma(R_t^K) - \frac{\chi}{K} \sum_{u \in V_t^K} f(\xi_t^{u,K}, R_t^K),$$

on construit  $(\nu_t^K, R_t^K)_{t \geq 0}$  de manière classique (Fournier, Méléard '04),

## Renormalisation du processus

Paramètre d'échelle :  $K \in \mathbb{N}^*$  (nombre d'individus dans la population à  $t = 0$ ).

On modifie le terme de compétition

$$\frac{dR_t^K}{dt} := \varsigma(R_t^K) - \frac{\chi}{K} \sum_{u \in V_t^K} f(\xi_t^{u,K}, R_t^K),$$

on construit  $(\nu_t^K, R_t^K)_{t \geq 0}$  de manière classique (Fournier, Méléard '04), et on étudie  $\mu_t^K := \frac{\nu_t^K}{K}$ .

## Notations préliminaires

On introduit une fonction poids  $\omega \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ , strictement positive et croissante.

## Notations préliminaires

On introduit une fonction poids  $\omega \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ , strictement positive et croissante.

Soit  $\mathcal{M}_\omega(\mathbb{R}_+^*)$  l'espace des mesures sur  $\mathbb{R}_+^*$  qui intègrent les fonctions  $f$  telles que  $f/\omega$  est bornée.

## Notations préliminaires

On introduit une fonction poids  $\omega \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ , strictement positive et croissante.

Soit  $\mathcal{M}_\omega(\mathbb{R}_+^*)$  l'espace des mesures sur  $\mathbb{R}_+^*$  qui intègrent les fonctions  $f$  telles que  $f/\omega$  est bornée.

On écrit  $(\mathcal{M}_\omega(\mathbb{R}_+^*), \nu)$ , respectivement  $(\mathcal{M}_\omega(\mathbb{R}_+^*), w)$ , quand on munit  $\mathcal{M}_\omega(\mathbb{R}_+^*)$  de la topologie vague, respectivement la topologie  $\omega$ -étroite.

## Notations préliminaires

On introduit une fonction poids  $\omega \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ , strictement positive et croissante.

Soit  $\mathcal{M}_\omega(\mathbb{R}_+^*)$  l'espace des mesures sur  $\mathbb{R}_+^*$  qui intègrent les fonctions  $f$  telles que  $f/\omega$  est bornée.

On écrit  $(\mathcal{M}_\omega(\mathbb{R}_+^*), \nu)$ , respectivement  $(\mathcal{M}_\omega(\mathbb{R}_+^*), w)$ , quand on munit  $\mathcal{M}_\omega(\mathbb{R}_+^*)$  de la topologie vague, respectivement la topologie  $\omega$ -étroite.

Soit  $\mathbb{D}([0, 1], (\mathcal{M}_\omega(\mathbb{R}_+^*), i))$  l'espace de Skorokhod sur  $(\mathcal{M}_\omega(\mathbb{R}_+^*), i)$ , pour  $i = \nu$  ou  $w$ .

# Résultat principal

## Théorème (**Tension**)

*Sous des hypothèses techniques, la suite de renormalisations de notre processus  $(\mu^K, R^K)_{K \in \mathbb{N}^*}$  est tendue dans  $\mathbb{D}([0, 1], (\mathcal{M}_\omega(\mathbb{R}_+^*), w) \times \mathbb{R})$ . Tout point d'accumulation  $(\mu^*, R^*)$  est continu et vérifie **un système d'EDP explicite**.*

# Résultat principal

## Théorème (**Tension**)

*Sous des hypothèses techniques, la suite de renormalisations de notre processus  $(\mu^K, R^K)_{K \in \mathbb{N}^*}$  est tendue dans  $\mathbb{D}([0, 1], (\mathcal{M}_\omega(\mathbb{R}_+^*), w) \times \mathbb{R})$ . Tout point d'accumulation  $(\mu^*, R^*)$  est continu et vérifie un système d'EDP explicite.*

## Corollaire (**Convergence**)

*S'il existe une unique solution mesure au système d'EDP précédent, alors le résultat de tension précédent devient un résultat de convergence vers cette unique solution.*

## Solutions fonctions du système d'EDP limite

Supposons que  $\mu_t$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue pour tout  $t \in [0, 1]$ , avec une densité régulière  $u_t$ ,

## Solutions fonctions du système d'EDP limite

Supposons que  $\mu_t$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue pour tout  $t \in [0, 1]$ , avec une densité régulière  $u_t$ , alors pour tout  $t \in (0, 1]$  et  $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{x_0\}$ ,

$$\partial_t u_t(x) + \partial_x \left( g(x, R_t^*) u_t(x) \right) = b(x + x_0) u_t(x + x_0) - (b(x) + d(x)) u_t(x),$$

avec

$$\frac{dR_t^*}{dt} = \varsigma(R_t^*) - \chi \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x, R_t^*) u_t(x) dx$$

## Solutions fonctions du système d'EDP limite

Supposons que  $\mu_t$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue pour tout  $t \in [0, 1]$ , avec une densité régulière  $u_t$ , alors pour tout  $t \in (0, 1]$  et  $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{x_0\}$ ,

$$\partial_t u_t(x) + \partial_x \left( g(x, R_t^*) u_t(x) \right) = b(x + x_0) u_t(x + x_0) - (b(x) + d(x)) u_t(x),$$

avec

$$\frac{dR_t^*}{dt} = \varsigma(R_t^*) - \chi \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x, R_t^*) u_t(x) dx$$

et la condition aux bords

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} b(y) u_t(y) dy = \left( u_t(x_0+) - u_t(x_0-) \right) g(x_0, R_t^*).$$

## Solutions fonctions du système d'EDP limite

Supposons que  $\mu_t$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue pour tout  $t \in [0, 1]$ , avec une densité régulière  $u_t$ , alors pour tout  $t \in (0, 1]$  et  $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{x_0\}$ ,

$$\partial_t u_t(x) + \partial_x \left( g(x, R_t^*) u_t(x) \right) = b(x + x_0) u_t(x + x_0) - (b(x) + d(x)) u_t(x),$$

avec

$$\frac{dR_t^*}{dt} = \varsigma(R_t^*) - \chi \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x, R_t^*) u_t(x) dx$$

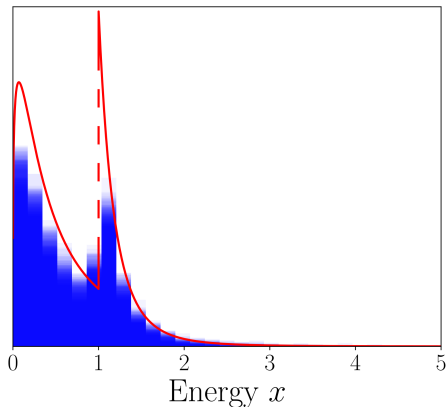
et la **condition aux bords**

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} b(y) u_t(y) dy = \left( u_t(x_0+) - u_t(x_0-) \right) g(x_0, R_t^*).$$

# Illustration numérique avec une solution fonction

$$K = 100$$

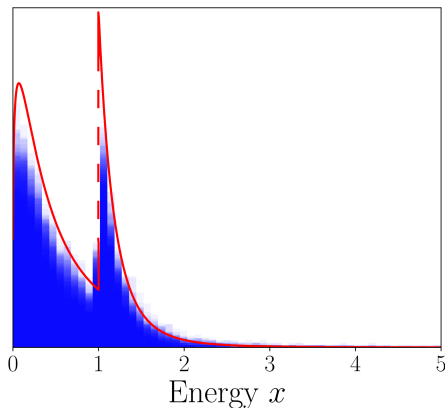
Density at time  $t = 160.0$



# Illustration numérique avec une solution fonction

$$K = 1000$$

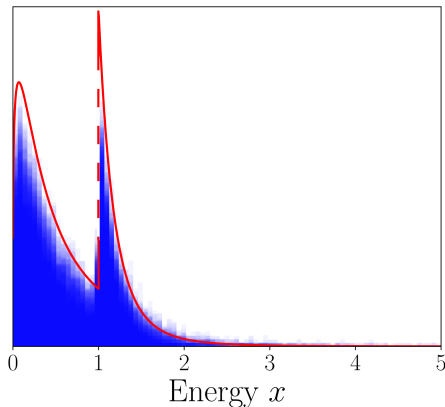
Density at time  $t = 160.0$



# Illustration numérique avec une solution fonction

$$K = 10000$$

Density at time  $t = 160.0$



## Lien avec notre motivation biologique

### Proposition

*Il existe une fonction poids  $\omega$  appropriée dans le cas allométrique.*

## Lien avec notre motivation biologique

### Proposition

*Il existe une fonction poids  $\omega$  appropriée dans le cas allométrique.*

**Remarque :** on obtient un système d'EDP limite similaire dans le modèle à ressource constante.

## Lien avec notre motivation biologique

### Proposition

*Il existe une fonction poids  $\omega$  appropriée dans le cas allométrique.*

**Remarque :** on obtient un système d'EDP limite similaire dans le modèle à ressource constante.

### Théorème

*Dans le cas allométrique, si  $\gamma = \alpha = \delta + 1$ , la valeur de la ressource à un équilibre non-trivial (s'il existe) est unique et vérifie*

$$\phi(R_{\text{eq}}) = \frac{C_\delta + C_\alpha}{C_\gamma} < 1.$$

## Lien avec notre motivation biologique

### Proposition

*Il existe une fonction poids  $\omega$  appropriée dans le cas allométrique.*

**Remarque :** on obtient un système d'EDP limite similaire dans le modèle à ressource constante.

### Théorème

*Dans le cas allométrique, si  $\gamma = \alpha = \delta + 1$ , la valeur de la ressource à un équilibre non-trivial (s'il existe) est unique et vérifie*

$$\phi(R_{\text{eq}}) = \frac{C_\delta + C_\alpha}{C_\gamma} < 1.$$

→ **TME** : compatible avec l'existence d'un équilibre non-trivial.

## Lien avec notre motivation biologique

### Proposition

*Il existe une fonction poids  $\omega$  appropriée dans le cas allométrique.*

**Remarque :** on obtient un système d'EDP limite similaire dans le modèle à ressource constante.

### Théorème

*Dans le cas allométrique, si  $\gamma = \alpha = \delta + 1$ , la valeur de la ressource à un équilibre non-trivial (s'il existe) est unique et vérifie*

$$\phi(R_{\text{eq}}) = \frac{C_\delta + C_\alpha}{C_\gamma} < 1.$$

→ **TME** : compatible avec l'existence d'un équilibre non-trivial.

→ **Les autres** relations allométriques ne sont pas compatibles.

## Modèles stochastiques individu-centrés avec des dynamiques allométriques.

- 1 Motivations biologiques: relations allométriques.
- 2 Conception d'un modèle individu-centré.
- 3 Résultats à ressource constante.
- 4 Résultats avec compétition pour la ressource.
- 5 Synthèse.

# Retour sur la Théorie Métabolique de l'Écologie

Rappelons que le jeu de paramètres prédit par la TME est

$$\alpha = \gamma = \beta + 1 = \delta + 1. \quad (1)$$

## Retour sur la Théorie Métabolique de l'Écologie

Rappelons que le jeu de paramètres prédit par la TME est

$$\alpha = \gamma = \beta + 1 = \delta + 1. \quad (1)$$

Ce sont les seules allométries qui vérifient les deux conditions suivantes (pour le modèle à ressource constante) :

# Retour sur la Théorie Métabolique de l'Écologie

Rappelons que le jeu de paramètres prédit par la TME est

$$\alpha = \gamma = \beta + 1 = \delta + 1. \quad (1)$$

Ce sont les seules allométries qui vérifient les deux conditions suivantes (pour le modèle à ressource constante) :

- 1 Il existe une quantité de ressources  $R_{\text{sup}}$  à partir de laquelle la population survit avec probabilité positive (étude d'un processus de branchement).

# Retour sur la Théorie Métabolique de l'Écologie

Rappelons que le jeu de paramètres prédit par la TME est

$$\alpha = \gamma = \beta + 1 = \delta + 1. \quad (1)$$

Ce sont les seules allométries qui vérifient les deux conditions suivantes (pour le modèle à ressource constante) :

- 1 Il existe une quantité de ressources  $R_{\text{sup}}$  à partir de laquelle la population survit avec probabilité positive (étude d'un processus de branchement).
- 2 Il existe une quantité de ressources  $R_{\text{eq}}$  pour laquelle le système d'EDP limite est à un équilibre non-trivial (résultat de convergence avec des taux non-bornés, simulations numériques).

# Retour sur la Théorie Métabolique de l'Écologie

Rappelons que le jeu de paramètres prédit par la TME est

$$\alpha = \gamma = \beta + 1 = \delta + 1. \quad (1)$$

Ce sont les seules allométries qui vérifient les deux conditions suivantes (pour le modèle à ressource constante) :

- 1 Il existe une quantité de ressources  $R_{\text{sup}}$  à partir de laquelle la population survit avec probabilité positive (étude d'un processus de branchement).
- 2 Il existe une quantité de ressources  $R_{\text{eq}}$  pour laquelle le système d'EDP limite est à un équilibre non-trivial (résultat de convergence avec des taux non-bornés, simulations numériques).

→ Justification mathématique de (1).