Cours B13-3

Étude mathématique de quelques problèmes de transmission avec coefficients changeant de signe. Séance n°3

A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel*, P. Ciarlet

*Lucas.Chesnel@cmap.polytechnique.fr

Fondation mathématique FMJH Jacques Hadamard

CMAP

Ensta ParisTech, Palaiseau, 28/01/2015

1 Séance 1 : contexte physique

2 Séance 2 : la méthode de la T-coercivité
- Principe
- Géométries élémentaires
- T-coercivité et problèmes bien posés

3 Séance 3 : géométrie générale, étude dans l'intervalle
- Géométrie générale
- Étude dans l'intervalle

4 Au programme la semaine prochaine

Contexte physique

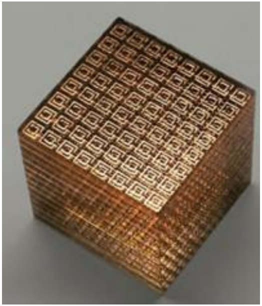
- Modélisation de phénomènes électromagnétiques en présence de matériaux négatifs tels que $\varepsilon < 0$ et/ou $\mu < 0$ pour certaines fréquences.

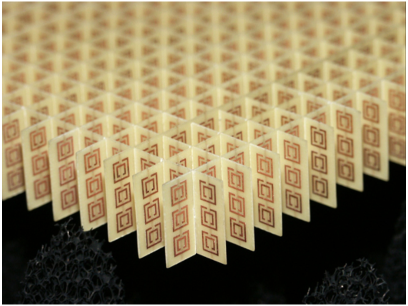
- Deux grandes familles de matériaux négatifs : métaux,

Contexte physique

- Modélisation de phénomènes électromagnétiques en présence de matériaux négatifs tels que $\varepsilon < 0$ et/ou $\mu < 0$ pour certaines fréquences.

- Deux grandes familles de matériaux négatifs : métaux, métamatériaux.



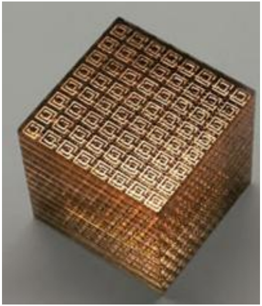


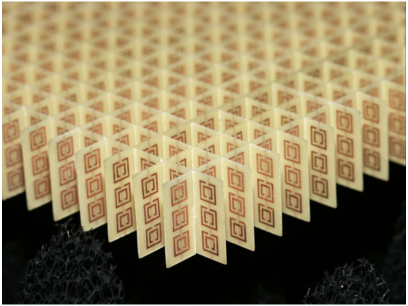
Zoom sur un métamatériau (NASA)

Contexte physique

- Modélisation de phénomènes électromagnétiques en présence de matériaux négatifs tels que $\varepsilon < 0$ et/ou $\mu < 0$ pour certaines fréquences.

- Deux grandes familles de matériaux négatifs : métaux, métamatériaux.





Zoom sur un métamatériau (NASA)

"Metamaterials are artificial materials engineered to have properties that may not be found in nature. [...] Metamaterials gain their properties not from their composition, but from their exactingly-designed structures."

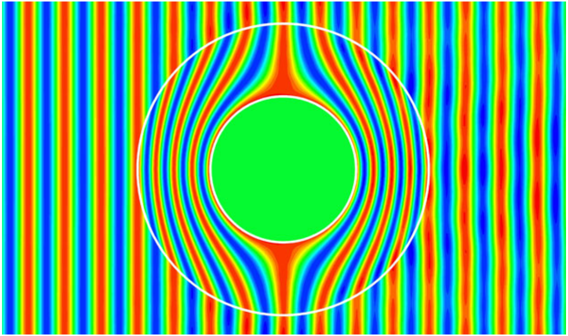
Un exemple dans la nature

- Pour certains papillons, couleurs dues à des arrangements géométriques particuliers des écailles sur les ailes, non à des pigments chimiques.

Quelques applications des métamatériaux 1/2

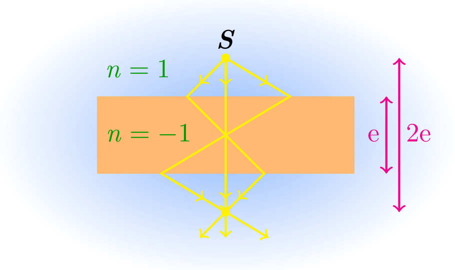
☛ Objectif : réaliser des structures pour contrôler la lumière.

- Conception de capes d'invisibilité.



Remarque : *a priori*, on pourrait utiliser la même idée pour détourner les tsunamis et les ondes sismiques.

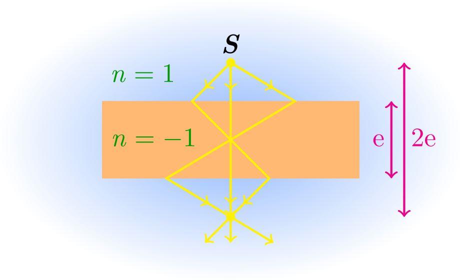
- Réalisation de matériaux à indice de réfraction négatif ($n < 0$).



$\Rightarrow$ La réfraction négative à l'interface métamatériau/diélectrique pourrait permettre de concevoir des lentilles parfaites, des pièges à photons...

Quelques applications des métamatériaux 2/2

- Réalisation de matériaux à indice de réfraction négatif ($n < 0$).



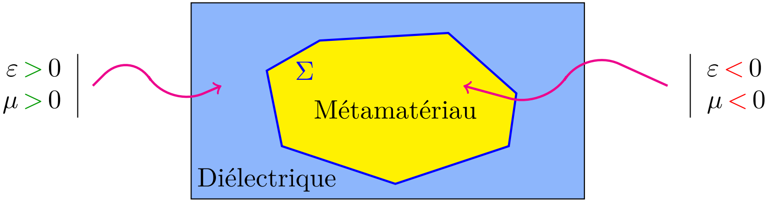
$\Rightarrow$ La réfraction négative à l'interface métamatériau/diélectrique pourrait permettre de concevoir des lentilles parfaites, des pièges à photons...

☛ Des applications potentielles assez extraordinaires mais ...

Difficulté

☛ ... des problèmes épineux de modélisation et de simulations numériques.

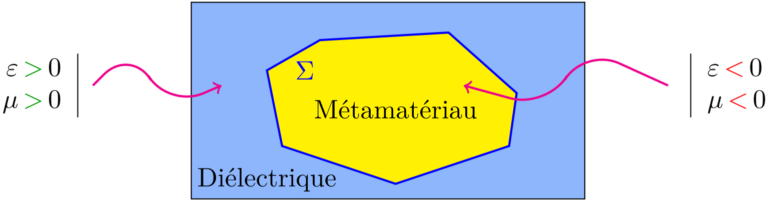
- Dans les applications, présence d'interfaces matériau nég./matériau pos..



Difficulté

☛ ... des problèmes épineux de modélisation et de simulations numériques.

► Dans les applications, présence d'interfaces matériau nég./matériau pos..

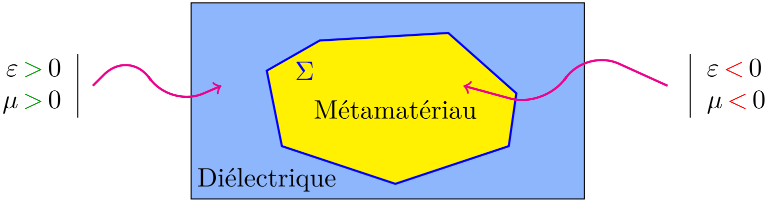


► Problèmes de transmission originaux (littérature quasi-vierge) en raison du changement de signe des coefficients ε et μ au niveau de l'interface Σ.

Difficulté

☛ ... des problèmes épineux de modélisation et de simulations numériques.

- Dans les applications, présence d'interfaces matériau nég./matériau pos..



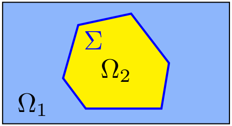
- Problèmes de transmission originaux (littérature quasi-vierge) en raison du changement de signe des coefficients ε et μ au niveau de l'interface Σ.
- De façon générale, on s'intéresse aux questions suivantes :

- Ces problèmes de transmission avec changement de signe sont-ils bien posés ?
- S'ils ne le sont pas, pourquoi (retour à la physique) ?
- Méthodes numériques pour approcher les solutions ?

Un problème modèle

- Considérons le problème modèle suivant :

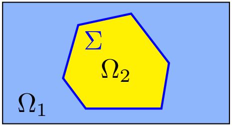
$$(\mathscr{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\mathrm{div}(\sigma \nabla u) = f \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$



Un problème modèle

- Considérons le problème modèle suivant :

$$(\mathscr{P}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\mathrm{div}(\sigma \nabla u) = f \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$



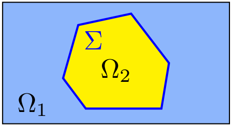
$$\left| \begin{array}{l} \sigma|_{\Omega_1} = \sigma_1 > 0 \\ \sigma|_{\Omega_2} = \sigma_2 < 0 \end{array} \right.$$

(constant)

Un problème modèle

- Considérons le problème modèle suivant :

$$(\mathscr{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\mathrm{div}(\sigma \nabla u) = f \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$



$$\left| \begin{array}{l} \sigma|_{\Omega_1} = \sigma_1 > 0 \\ \sigma|_{\Omega_2} = \sigma_2 < 0 \end{array} \right.$$

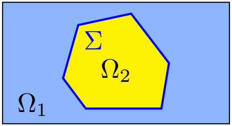
(constant)

- $\mathrm{H}^1_0(\Omega) = \{v \in \mathrm{L}^2(\Omega) \,|\, \nabla v \in \mathrm{L}^2(\Omega);\ v|_{\partial\Omega} = 0\}$
- f est un terme source dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$

Un problème modèle

- Considérons le problème modèle suivant :

$$(\mathscr{P}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\mathrm{div}(\sigma \nabla u) = f \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$



$$\left| \begin{array}{l} \sigma|_{\Omega_1} = \sigma_1 > 0 \\ \sigma|_{\Omega_2} = \sigma_2 < 0 \end{array} \right.$$
(constant)

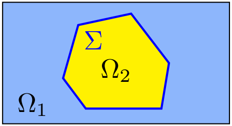
- $\mathrm{H}^1_0(\Omega) = \{v \in \mathrm{L}^2(\Omega) \,|\, \nabla v \in \mathrm{L}^2(\Omega);\ v|_{\partial\Omega} = 0\}$
- f est un terme source dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$

- Il est important de savoir montrer que $(\mathscr{P})$ possède une unique solution dépendant continûment de la donnée, solution que l'on pourra ensuite chercher à approcher numériquement.

Un problème modèle

- Considérons le problème modèle suivant :

$$(\mathscr{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\mathrm{div}(\sigma \nabla u) = f \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$



$$\left| \begin{array}{l} \sigma|_{\Omega_1} = \sigma_1 > 0 \\ \sigma|_{\Omega_2} = \sigma_2 < 0 \end{array} \right.$$
(constant)

- $\mathrm{H}^1_0(\Omega) = \{v \in \mathrm{L}^2(\Omega) \,|\, \nabla v \in \mathrm{L}^2(\Omega);\ v|_{\partial\Omega} = 0\}$
- f est un terme source dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$

- Il est important de savoir montrer que $(\mathscr{P})$ possède une unique solution dépendant continûment de la donnée, solution que l'on pourra ensuite chercher à approcher numériquement.

Définition. Nous dirons que le problème $(\mathscr{P})$ est bien posé si l'opérateur $\mathrm{div}\,(\sigma\nabla\cdot)$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Comment étudier le problème $(\mathscr{P})$?

1. On réécrit $(\mathscr{P})$ sous forme variationnelle.

$$(\mathscr{P}) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(\mathscr{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) = \ell(v),\ \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega), \end{array} \right.}$$

avec $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \sigma\, \nabla u \cdot \nabla v$ et $\ell(v) = \langle f, v \rangle_\Omega$.

Comment étudier le problème $(\mathscr{P})$?

1. On réécrit $(\mathscr{P})$ sous forme variationnelle.

$$(\mathscr{P}) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(\mathscr{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) = \ell(v),\ \forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega), \end{array} \right.}$$

avec $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \sigma\, \nabla u \cdot \nabla v \quad$ et $\quad \ell(v) = \langle f, v \rangle_\Omega$.

2. Dans le cas classique où $\sigma \geq C > 0$ sur Ω, on trouve

$$a(u,u) = \int_\Omega \sigma\, |\nabla u|^2$$

Comment étudier le problème $(\mathscr{P})$?

1. On réécrit $(\mathscr{P})$ sous forme variationnelle.

$$(\mathscr{P}) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(\mathscr{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) = \ell(v),\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega), \end{array} \right.}$$

avec $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \sigma \, \nabla u \cdot \nabla v$ et $\ell(v) = \langle f, v \rangle_\Omega$.

2. Dans le cas classique où $\sigma \geq C > 0$ sur Ω, on trouve

$$a(u,u) = \int_\Omega \sigma \, |\nabla u|^2 \geq \min(\sigma) \, \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)},$$

Comment étudier le problème $(\mathscr{P})$?

1. On réécrit $(\mathscr{P})$ sous forme variationnelle.

$$(\mathscr{P}) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(\mathscr{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) = \ell(v),\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega), \end{array} \right.}$$

avec $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \sigma\, \nabla u \cdot \nabla v$ et $\ell(v) = \langle f, v \rangle_\Omega$.

2. Dans le cas classique où $\sigma \geq C > 0$ sur Ω, on trouve

$$a(u,u) = \int_\Omega \sigma\, |\nabla u|^2 \geq \min(\sigma)\, \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)},$$

ce qui prouve que $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

Comment étudier le problème $(\mathscr{P})$?

1. On réécrit $(\mathscr{P})$ sous forme variationnelle.

$$(\mathscr{P}) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(\mathscr{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) = \ell(v),\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega), \end{array} \right.}$$

avec $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \sigma \, \nabla u \cdot \nabla v$ et $\ell(v) = \langle f, v \rangle_\Omega$.

2. Dans le cas classique où $\sigma \geq C > 0$ sur Ω, on trouve

$$a(u,u) = \int_\Omega \sigma \, |\nabla u|^2 \geq \min(\sigma) \, \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)},$$

ce qui prouve que $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

3. On déduit du théorème de Lax-Milgram que $(\mathscr{P})$ est bien posé.

Et lorsque σ change de signe sur Ω ?

- Dans le cas où σ change de signe, on peut construire des fonctions non nulles $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ telles que

$$a(u,u) = \int_\Omega \sigma \, |\nabla u|^2 = 0.$$

Et lorsque σ change de signe sur Ω ?

- Dans le cas où σ change de signe, on peut construire des fonctions non nulles $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ telles que

$$a(u,u) = \int_\Omega \sigma \, |\nabla u|^2 = 0.$$

Ceci prouve que $a(\cdot,\cdot)$ n'est pas coercive.

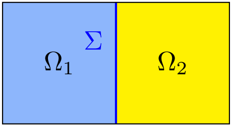
Et lorsque σ change de signe sur Ω ?

- Dans le cas où σ change de signe, on peut construire des fonctions non nulles $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ telles que

$$a(u,u) = \int_\Omega \sigma\, |\nabla u|^2 = 0.$$

Ceci prouve que $a(\cdot,\cdot)$ n'est pas coercive.

- Pour un domaine symétrique par rapport à l'interface Σ, avec $\sigma_2 = -\sigma_1$,



vous avez montré que $(\mathscr{P})$ possède un noyau de dimension infinie.

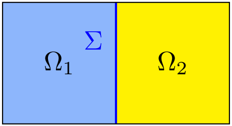
Et lorsque σ change de signe sur Ω ?

- Dans le cas où σ change de signe, on peut construire des fonctions non nulles $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ telles que

$$a(u,u) = \int_\Omega \sigma \, |\nabla u|^2 = 0.$$

Ceci prouve que $a(\cdot,\cdot)$ n'est pas coercive.

- Pour un domaine symétrique par rapport à l'interface Σ, avec $\sigma_2 = -\sigma_1$,



vous avez montré que $(\mathscr{P})$ possède un noyau de dimension infinie.

Comment étudier $(\mathscr{P})$ lorsque σ change de signe ?

1. Séance 1 : contexte physique
2. Séance 2 : la méthode de la $\mathtt{T}$-coercivité
   - Principe
   - Géométries élémentaires
   - $\mathtt{T}$-coercivité et problèmes bien posés
3. Séance 3 : géométrie générale, étude dans l'intervalle
   - Géométrie générale
   - Étude dans l'intervalle
4. Au programme la semaine prochaine

1. Séance 1 : contexte physique

2. Séance 2 : la méthode de la T-coercivité
   - Principe
   - Géométries élémentaires
   - T-coercivité et problèmes bien posés

3. Séance 3 : géométrie générale, étude dans l'intervalle
   - Géométrie générale
   - Étude dans l'intervalle

4. Au programme la semaine prochaine

Idée de la $\mathtt{T}$-coercivité

Soit $\mathtt{T}$ un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

$$(\mathscr{P}) \Leftrightarrow (\mathscr{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) = \ell(v),\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega). \end{array} \right.$$

Idée de la $\mathtt{T}$-coercivité

Soit $\mathtt{T}$ un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

$$(\mathscr{P}) \Leftrightarrow (\mathscr{P}_V) \Leftrightarrow (\mathscr{P}_V^{\mathtt{T}}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, \mathtt{T}v) = \ell(\mathtt{T}v),\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega). \end{array} \right.$$

Idée de la $\mathtt{T}$-coercivité

Soit $\mathtt{T}$ un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

$(\mathscr{P}) \Leftrightarrow \ (\mathscr{P}_V) \ \Leftrightarrow (\mathscr{P}_V^{\mathtt{T}}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, \mathtt{T}v) = \ell(\mathtt{T}v),\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega). \end{array} \right.$

Objectif : Trouver $\mathtt{T}$ tel que a soit $\mathtt{T}$-coercive : $\displaystyle\int_\Omega \sigma \, \nabla u \cdot \nabla(\mathtt{T}u) \geq C \, \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}$.

Dans ce cas, Lax-Milgram $\Rightarrow$ $(\mathscr{P}_V^{\mathtt{T}})$ (et donc $(\mathscr{P}_V)$) bien posé.

Idée de la $\mathtt{T}$-coercivité 1/2

Soit $\mathtt{T}$ un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

$$(\mathscr{P}) \Leftrightarrow (\mathscr{P}_V) \Leftrightarrow (\mathscr{P}_V^{\mathtt{T}}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, \mathtt{T}v) = \ell(\mathtt{T}v),\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega). \end{array} \right.$$

Objectif : Trouver $\mathtt{T}$ tel que a soit $\mathtt{T}$-coercive : $\displaystyle\int_\Omega \sigma\, \nabla u \cdot \nabla(\mathtt{T}u) \geq C\, \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}$.

Dans ce cas, Lax-Milgram $\Rightarrow$ $(\mathscr{P}_V^{\mathtt{T}})$ (et donc $(\mathscr{P}_V)$) bien posé.

---

1. Définissons $\mathtt{T}_1 u = \left| \begin{array}{ll} u & \text{dans } \Omega_1 \\ -u + \ldots & \text{dans } \Omega_2 \end{array} \right.$

Idée de la T-coercivité

Soit $\mathtt{T}$ un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

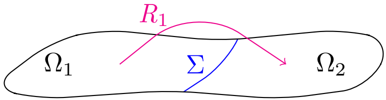
$$(\mathscr{P}) \Leftrightarrow (\mathscr{P}_V) \Leftrightarrow (\mathscr{P}_V^{\mathtt{T}}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, \mathtt{T}v) = \ell(\mathtt{T}v),\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega). \end{array} \right.$$

Objectif : Trouver $\mathtt{T}$ tel que a soit $\mathtt{T}$-coercive : $\displaystyle\int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla(\mathtt{T}u) \geq C \, \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}$.

Dans ce cas, Lax-Milgram $\Rightarrow$ $(\mathscr{P}_V^{\mathtt{T}})$ (et donc $(\mathscr{P}_V)$) bien posé.

1. Définissons $\mathtt{T}_1 u = \left| \begin{array}{ll} u & \text{dans } \Omega_1 \\ -u + 2R_1(u|_{\Omega_1}) & \text{dans } \Omega_2 \end{array} \right.$, avec

R_1 opérateur de transfert/prolongement



Idée de la $\mathtt{T}$-coercivité

Soit $\mathtt{T}$ un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

$$(\mathscr{P}) \Leftrightarrow (\mathscr{P}_V) \Leftrightarrow (\mathscr{P}_V^{\mathtt{T}}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, \mathtt{T}v) = \ell(\mathtt{T}v),\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega). \end{array} \right.$$

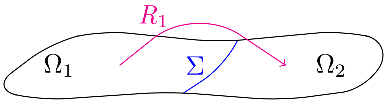
Objectif : Trouver $\mathtt{T}$ tel que a soit $\mathtt{T}$-coercive : $\displaystyle\int_\Omega \sigma\,\nabla u \cdot \nabla(\mathtt{T}u) \geq C\,\|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}$.

Dans ce cas, Lax-Milgram $\Rightarrow$ $(\mathscr{P}_V^{\mathtt{T}})$ (et donc $(\mathscr{P}_V)$) bien posé.

---

1 Définissons $\mathtt{T}_1 u = \left| \begin{array}{ll} u & \text{dans } \Omega_1 \\ -u + 2R_1(u|_{\Omega_1}) & \text{dans } \Omega_2 \end{array} \right.$, avec

R_1 opérateur de transfert/prolongement continu de Ω_1 dans Ω_2



$$\left| \begin{array}{llll} R_1(u|_{\Omega_1}) & = & u & \text{sur } \Sigma \\ R_1(u|_{\Omega_1}) & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Sigma \end{array} \right.$$

Idée de la $\mathtt{T}$-coercivité

Soit $\mathtt{T}$ un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

$$(\mathscr{P}) \Leftrightarrow (\mathscr{P}_V) \Leftrightarrow (\mathscr{P}_V^{\mathtt{T}}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, \mathtt{T}v) = \ell(\mathtt{T}v),\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega). \end{array} \right.$$

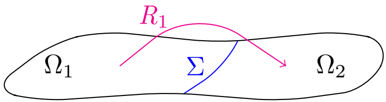
Objectif : Trouver $\mathtt{T}$ tel que a soit $\mathtt{T}$-coercive : $\displaystyle\int_\Omega \sigma\, \nabla u \cdot \nabla(\mathtt{T}u) \geq C\, \|u\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)}$.

Dans ce cas, Lax-Milgram $\Rightarrow$ $(\mathscr{P}_V^{\mathtt{T}})$ (et donc $(\mathscr{P}_V)$) bien posé.

---

1. Définissons $\mathtt{T}_1 u = \left| \begin{array}{ll} u & \text{dans } \Omega_1 \\ -u + 2R_1(u|_{\Omega_1}) & \text{dans } \Omega_2 \end{array} \right.$, avec

R_1 opérateur de transfert/prolongement continu de Ω_1 dans Ω_2



$$\left| \begin{array}{lll} R_1(u|_{\Omega_1}) & = u & \text{sur } \Sigma \\ R_1(u|_{\Omega_1}) & = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Sigma \end{array} \right.$$

2. $\mathtt{T}_1 \circ \mathtt{T}_1 = \mathrm{Id}$ ce qui assure que $\mathtt{T}_1$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$

Idée de la $\mathtt{T}$-coercivité 2/2

❸ On trouve $a(u, \mathtt{T}_1 u) = \displaystyle\int_\Omega |\sigma|\,|\nabla u|^2 - \,2\int_{\Omega_2} \sigma_2\,\nabla u \cdot \nabla(R_1(u|_{\Omega_1}))\,.$

Idée de la $\mathtt{T}$-coercivité 2/2

❸ On trouve $a(u, \mathtt{T}_1 u) = \displaystyle\int_\Omega |\sigma|\, |\nabla u|^2 - 2\int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u \cdot \nabla(R_1(u|_{\Omega_1}))$.

Inégalité de Young : $\forall \eta > 0$, on a $\quad |2\, x\, y| \leq \eta\, x^2 + \eta^{-1}\, y^2$

$$\Rightarrow \left| 2\int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u \cdot \nabla(R_1(u|_{\Omega_1})) \right| \leq \eta |\sigma_2| \int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 + \eta^{-1} \|R_1\|^2 |\sigma_2| \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2$$

Idée de la $\mathtt{T}$-coercivité

❸ On trouve $a(u, \mathtt{T}_1 u) = \displaystyle\int_\Omega |\sigma|\,|\nabla u|^2 - 2\int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u \cdot \nabla(R_1(u|_{\Omega_1}))$.

Inégalité de Young : $\forall \eta > 0$, on a $\quad |2\,x\,y| \leq \eta\, x^2 + \eta^{-1}\, y^2$

$$\Rightarrow \left| 2\int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u \cdot \nabla(R_1(u|_{\Omega_1})) \right| \leq \eta |\sigma_2| \int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 + \eta^{-1} \|R_1\|^2\, |\sigma_2| \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2$$

$$\Rightarrow |a(u, \mathtt{T}_1 u)| \geq |\sigma_2|(1-\eta) \int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 + (\sigma_1 - \eta^{-1}\|R_1\|^2\, |\sigma_2|) \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2$$

Idée de la $\mathtt{T}$-coercivité

❸ On trouve $a(u, \mathtt{T}_1 u) = \displaystyle\int_\Omega |\sigma|\,|\nabla u|^2 - 2\int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u \cdot \nabla(R_1(u|_{\Omega_1}))$.

Inégalité de Young : $\forall \eta > 0$, on a $\quad |2\,x\,y| \leq \eta\,x^2 + \eta^{-1}\,y^2$

$$\Rightarrow \left| 2\int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u \cdot \nabla(R_1(u|_{\Omega_1})) \right| \leq \eta|\sigma_2| \int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 + \eta^{-1}\|R_1\|^2\,|\sigma_2| \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2$$

$$\Rightarrow |a(u, \mathtt{T}_1 u)| \geq |\sigma_2|(1-\eta) \int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 + (\sigma_1 - \eta^{-1}\|R_1\|^2\,|\sigma_2|) \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2$$

Moralité : a est $\mathtt{T}$-coercive quand $\sigma_1 > \|R_1\|^2\,|\sigma_2|$

Idée de la $\mathtt{T}$-coercivité 2/2

❸ On trouve $a(u, \mathtt{T}_1 u) = \displaystyle\int_\Omega |\sigma|\, |\nabla u|^2 - 2\int_{\Omega_2} \sigma_2\, \nabla u \cdot \nabla(R_1(u|_{\Omega_1}))$.

Inégalité de Young $\Rightarrow$ a est $\mathtt{T}$-coercive quand $\sigma_1 > \|R_1\|^2\, |\sigma_2|$.

Idée de la $\mathtt{T}$-coercivité

❸ On trouve $a(u, \mathtt{T}_1 u) = \displaystyle\int_\Omega |\sigma|\,|\nabla u|^2 - 2\int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u \cdot \nabla(R_1(u|_{\Omega_1}))$.

Inégalité de Young $\Rightarrow$ a est T-coercive quand $\sigma_1 > \|R_1\|^2\,|\sigma_2|$.

❹ En travaillant avec $\mathtt{T}_2 u = \left| \begin{array}{ll} u - 2R_2(u|_{\Omega_2}) & \text{dans } \Omega_1 \\ -u & \text{dans } \Omega_2 \end{array} \right.$, où $R_2 : \Omega_2 \to \Omega_1$,

on prouve que a est T-coercive quand $|\sigma_2| > \|R_2\|^2\,\sigma_1$.

Idée de la $\mathtt{T}$-coercivité 2/2

3 On trouve $a(u, \mathtt{T}_1 u) = \displaystyle\int_\Omega |\sigma|\,|\nabla u|^2 - 2\int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u \cdot \nabla(R_1(u|_{\Omega_1}))$.

Inégalité de Young $\Rightarrow$ a est $\mathtt{T}$-coercive quand $\sigma_1 > \|R_1\|^2 \,|\sigma_2|$.

4 En travaillant avec $\mathtt{T}_2 u = \left| \begin{array}{ll} u - 2R_2(u|_{\Omega_2}) & \text{dans } \Omega_1 \\ -u & \text{dans } \Omega_2 \end{array} \right.$, où $R_2 : \Omega_2 \to \Omega_1$,

on prouve que a est $\mathtt{T}$-coercive quand $|\sigma_2| > \|R_2\|^2 \,\sigma_1$.

5 Conclusion :

Théorème. Si le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \notin [-\|R_2\|^2; -1/\|R_1\|^2]$ alors l'opérateur $\operatorname{div}(\sigma\nabla\cdot)$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Idée de la $\mathtt{T}$-coercivité 2/2

❸ On trouve $a(u, \mathtt{T}_1 u) = \displaystyle\int_\Omega |\sigma|\,|\nabla u|^2 - 2\int_{\Omega_2} \sigma_2\,\nabla u \cdot \nabla(R_1(u|_{\Omega_1}))\,.$

Inégalité de Young $\Rightarrow$ a est $\mathtt{T}$-coercive quand $\sigma_1 > \|R_1\|^2\,|\sigma_2|$.

❹ En travaillant avec $\mathtt{T}_2 u = \left| \begin{array}{ll} u - 2R_2(u|_{\Omega_2}) & \text{dans } \Omega_1 \\ -u & \text{dans } \Omega_2 \end{array} \right.$, où $R_2 : \Omega_2 \to \Omega_1$,

on prouve que a est $\mathtt{T}$-coercive quand $|\sigma_2| > \|R_2\|^2\,\sigma_1$.

❺ Conclusion :

L'intervalle dépend des normes
des opérateurs de transfert

Théorème. Si le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \notin [-\|R_2\|^2; -1/\|R_1\|^2]$ alors l'opérateur $\mathrm{div}\,(\sigma\nabla\cdot)$ est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

1. Séance 1 : contexte physique

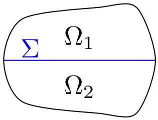
2. Séance 2 : la méthode de la T-coercivité
   - Principe
   - Géométries élémentaires
   - T-coercivité et problèmes bien posés

3. Séance 3 : géométrie générale, étude dans l'intervalle
   - Géométrie générale
   - Étude dans l'intervalle

4. Au programme la semaine prochaine

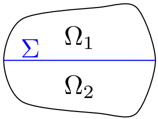
Choix de R_1, R_2 ?

- Un cas simple : le domaine symétrique



Choix de R_1, R_2 ?

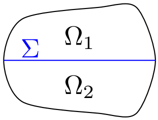
- Un cas simple : le domaine symétrique



$$R_1 = R_2 = S_\Sigma$$
On vérifie $\|R_1\| = \|R_2\| = 1$
$(\mathscr{P})$ bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

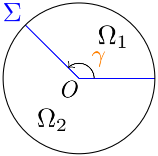
Choix de R_1, R_2 ?

- Un cas simple : le domaine symétrique



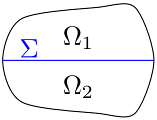
$$R_1 = R_2 = S_\Sigma$$
On vérifie $\|R_1\| = \|R_2\| = 1$
$(\mathscr{P})$ bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

- Interface avec un coin 2D



Choix de R_1, R_2 ?

- Un cas simple : le domaine symétrique

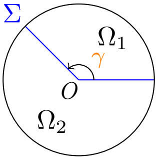


$$R_1 = R_2 = S_\Sigma$$

On vérifie $\|R_1\| = \|R_2\| = 1$

$(\mathscr{P})$ bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

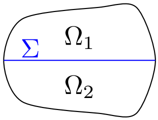
- Interface avec un coin 2D



Action de R_1 :

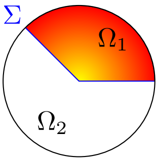
Choix de R_1, R_2 ?

- Un cas simple : le domaine symétrique



$$R_1 = R_2 = S_\Sigma$$
$$\text{On vérifie } \|R_1\| = \|R_2\| = 1$$
$$(\mathscr{P}) \text{ bien posé } \Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$$

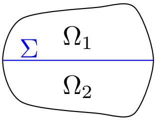
- Interface avec un coin 2D



Action de R_1 :

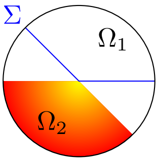
Choix de R_1, R_2 ?

- Un cas simple : le domaine symétrique



$$R_1 = R_2 = S_\Sigma$$
On vérifie $\|R_1\| = \|R_2\| = 1$
$(\mathscr{P})$ bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

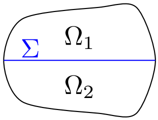
- Interface avec un coin 2D



Action de R_1 : symétrie

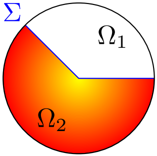
Choix de R_1, R_2 ?

- Un cas simple : le domaine symétrique



$$R_1 = R_2 = S_\Sigma$$
On vérifie $\|R_1\| = \|R_2\| = 1$
$(\mathscr{P})$ bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

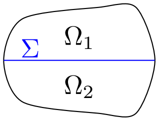
- Interface avec un coin 2D



Action de R_1 : symétrie + dilatation en θ

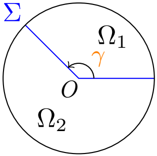
Choix de R_1, R_2 ?

- Un cas simple : le domaine symétrique



$$R_1 = R_2 = S_\Sigma$$
On vérifie $\|R_1\| = \|R_2\| = 1$
$(\mathscr{P})$ bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

- Interface avec un coin 2D

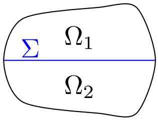


Action de R_1 : symétrie + dilatation en θ

$$\|R_1\|^2 = \mathcal{R}_\gamma := (2\pi - \gamma)/\gamma$$

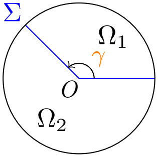
Choix de R_1, R_2 ?

- Un cas simple : le domaine symétrique



$$R_1 = R_2 = S_\Sigma$$
On vérifie $\|R_1\| = \|R_2\| = 1$
$(\mathscr{P})$ bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

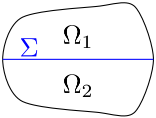
- Interface avec un coin 2D



Action de R_1 : symétrie + dilatation en θ
Action de R_2 : symétrie + contraction en θ
$$\|R_1\|^2 = \|R_2\|^2 = \mathcal{R}_\gamma := (2\pi - \gamma)/\gamma$$

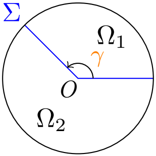
Choix de R_1, R_2 ?

- Un cas simple : le domaine symétrique



$$R_1 = R_2 = S_\Sigma$$
On vérifie $\|R_1\| = \|R_2\| = 1$
$(\mathscr{P})$ bien posé $\Leftrightarrow \kappa_\sigma \neq -1$

- Interface avec un coin 2D



Action de R_1 : symétrie + dilatation en θ
Action de R_2 : symétrie + contraction en θ
$$\|R_1\|^2 = \|R_2\|^2 = \mathcal{R}_\gamma := (2\pi - \gamma)/\gamma$$
$(\mathscr{P})$ bien posé $\Leftarrow \kappa_\sigma \notin [-\mathcal{R}_\gamma; -1/\mathcal{R}_\gamma]$

1 Séance 1 : contexte physique

2 Séance 2 : la méthode de la T-coercivité
- Principe
- Géométries élémentaires
- T-coercivité et problèmes bien posés

3 Séance 3 : géométrie générale, étude dans l'intervalle
- Géométrie générale
- Étude dans l'intervalle

4 Au programme la semaine prochaine

T-coercivité et problèmes bien posés

- De façon générale, considérons X un espace de Hilbert, a une forme sesquilinéaire continue sur $X \times X$ et $\ell \in X'$. On s'intéresse au problème

$$(\mathscr{P}_V) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in X \text{ tel que :} \\ a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in X. \end{array} \right.$$

T-coercivité et problèmes bien posés

- De façon générale, considérons X un espace de Hilbert, a une forme sesquilinéaire continue sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ et $\ell \in \mathrm{X}'$. On s'intéresse au problème

$$\boxed{(\mathscr{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{X} \text{ tel que :} \\ a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in \mathrm{X}. \end{array} \right.}$$

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tel que

$$(Au, v)_{\mathrm{X}} = a(u,v), \qquad \forall u, v \in \mathrm{X}.$$

$\mathtt{T}$-coercivité et problèmes bien posés

- De façon générale, considérons X un espace de Hilbert, a une forme sesquilinéaire continue sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ et $\ell \in \mathrm{X}'$. On s'intéresse au problème

$$\boxed{(\mathscr{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{X} \text{ tel que :} \\ a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in \mathrm{X}. \end{array} \right.}$$

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tel que

$$(Au, v)_{\mathrm{X}} = a(u, v), \qquad \forall u, v \in \mathrm{X}.$$

1 S'il existe $\mathtt{T}$ un isomorphisme de X tel que $a(\cdot, \mathtt{T}\cdot)$ soit coercive alors A est un isomorphisme.

$\mathtt{T}$-coercivité et problèmes bien posés

► De façon générale, considérons X un espace de Hilbert, a une forme sesquilinéaire continue sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ et $\ell \in \mathrm{X}'$. On s'intéresse au problème

$$\boxed{(\mathscr{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{X} \text{ tel que :} \\ a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in \mathrm{X}. \end{array} \right.}$$

► Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tel que

$$(Au, v)_{\mathrm{X}} = a(u, v), \qquad \forall u, v \in \mathrm{X}.$$

❶ S'il existe $\mathtt{T}$ un isomorphisme de X tel que $a(\cdot, \mathtt{T}\cdot)$ soit coercive alors A est un isomorphisme.

❷ Réciproquement, si A est un isomorphisme alors $a(\cdot, A\cdot)$ est coercive :

$$\forall u \in \mathrm{X}, \quad |a(u, Au)| =$$

T-coercivité et problèmes bien posés

- De façon générale, considérons X un espace de Hilbert, a une forme sesquilinéaire continue sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ et $\ell \in \mathrm{X}'$. On s'intéresse au problème

$$\boxed{(\mathscr{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{X} \text{ tel que :} \\ a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in \mathrm{X}. \end{array} \right.}$$

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tel que

$$(Au, v)_{\mathrm{X}} = a(u,v), \qquad \forall u, v \in \mathrm{X}.$$

1. S'il existe $\mathtt{T}$ un isomorphisme de X tel que $a(\cdot, \mathtt{T}\cdot)$ soit coercive alors A est un isomorphisme.

2. Réciproquement, si A est un isomorphisme alors $a(\cdot, A\cdot)$ est coercive :

$$\forall u \in \mathrm{X}, \quad |a(u, Au)| = \|Au\|_{\mathrm{X}}^2$$

T-coercivité et problèmes bien posés

- De façon générale, considérons X un espace de Hilbert, a une forme sesquilinéaire continue sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ et $\ell \in \mathrm{X}'$. On s'intéresse au problème

$$\boxed{(\mathscr{P}_V) \; \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{X} \text{ tel que :} \\ a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in \mathrm{X}. \end{array} \right.}$$

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tel que

$$(Au, v)_{\mathrm{X}} = a(u,v), \qquad \forall u, v \in \mathrm{X}.$$

1. S'il existe $\mathtt{T}$ un isomorphisme de X tel que $a(\cdot, \mathtt{T}\cdot)$ soit coercive alors A est un isomorphisme.

2. Réciproquement, si A est un isomorphisme alors $a(\cdot, A\cdot)$ est coercive :

$$\forall u \in \mathrm{X}, \quad |a(u, Au)| = \|Au\|_{\mathrm{X}}^2 \geq \|A^{-1}\|^2 \|u\|_{\mathrm{X}}^2.$$

$\mathtt{T}$-coercivité et problèmes bien posés

- De façon générale, considérons X un espace de Hilbert, a une forme sesquilinéaire continue sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ et $\ell \in \mathrm{X}'$. On s'intéresse au problème

$$\boxed{(\mathscr{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{X} \text{ tel que :} \\ a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in \mathrm{X}. \end{array} \right.}$$

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tel que

$$(Au, v)_{\mathrm{X}} = a(u,v), \qquad \forall u, v \in \mathrm{X}.$$

Proposition. $(\mathscr{P}_V)$ bien posé (A isomorphisme) $\Leftrightarrow$ il existe $\mathtt{T}$ un isomorphisme de X tel que $a(\cdot, \mathtt{T}\cdot)$ soit coercive.

T-coercivité et problèmes bien posés

- De façon générale, considérons X un espace de Hilbert, a une forme sesquilinéaire continue sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ et $\ell \in \mathrm{X}'$. On s'intéresse au problème

$$(\mathscr{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{X} \text{ tel que :} \\ a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in \mathrm{X}. \end{array} \right.$$

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tel que

$$(Au, v)_{\mathrm{X}} = a(u, v), \qquad \forall u, v \in \mathrm{X}.$$

Proposition. $(\mathscr{P}_V)$ bien posé (A isomorphisme) $\Leftrightarrow$ il existe $\mathtt{T}$ un isomorphisme de X tel que $a(\cdot, \mathtt{T}\cdot)$ soit coercive.

- Supposons a symétrique ($a(u, v) = a(v, u), \quad \forall u, v \in \mathrm{X}$) et $a(\cdot, \mathtt{T}\cdot)$ coercive pour $\mathtt{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ linéaire continu. Alors :

T-coercivité et problèmes bien posés

- De façon générale, considérons X un espace de Hilbert, a une forme sesquilinéaire continue sur $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ et $\ell\in\mathrm{X}'$. On s'intéresse au problème

$$(\mathscr{P}_V)\ \left|\ \begin{array}{l}\text{Trouver } u\in\mathrm{X} \text{ tel que :}\\ a(u,v)=\ell(v),\quad \forall v\in\mathrm{X}.\end{array}\right.$$

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ tel que

$$(Au,v)_{\mathrm{X}}=a(u,v),\qquad \forall u,v\in\mathrm{X}.$$

Proposition. $(\mathscr{P}_V)$ bien posé (A isomorphisme) $\Leftrightarrow$ il existe $\mathtt{T}$ un isomorphisme de X tel que $a(\cdot,\mathtt{T}\cdot)$ soit coercive.

- Supposons a symétrique ($a(u,v)=a(v,u),\quad\forall u,v\in\mathrm{X}$) et $a(\cdot,\mathtt{T}\cdot)$ coercive pour $\mathtt{T}:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ linéaire continu. Alors :

$\star\quad Au=0 \quad\Rightarrow\quad 0=a(u,\mathtt{T}u)\geq C\,\|u\|^2_{\mathrm{X}} \quad\Rightarrow\quad u=0 \quad\Rightarrow\quad A$ injectif.

T-coercivité et problèmes bien posés

- De façon générale, considérons X un espace de Hilbert, a une forme sesquilinéaire continue sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ et $\ell \in \mathrm{X}'$. On s'intéresse au problème

$$(\mathscr{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{X} \text{ tel que :} \\ a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in \mathrm{X}. \end{array} \right.$$

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tel que

$$(Au, v)_{\mathrm{X}} = a(u,v), \qquad \forall u, v \in \mathrm{X}.$$

Proposition. $(\mathscr{P}_V)$ bien posé (A isomorphisme) $\Leftrightarrow$ il existe $\mathtt{T}$ un isomorphisme de X tel que $a(\cdot, \mathtt{T}\cdot)$ soit coercive.

- Supposons a symétrique ($a(u,v) = a(v,u), \quad \forall u, v \in \mathrm{X}$) et $a(\cdot, \mathtt{T}\cdot)$ coercive pour $\mathtt{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ linéaire continu. Alors :

⋆ $Au = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = a(u, \mathtt{T}u) \geq C \, \|u\|^2_{\mathrm{X}} \quad \Rightarrow \quad u = 0 \quad \Rightarrow \quad A$ injectif.

⋆ Soit u l'unique fonction vérifiant $a(\mathtt{T}u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in \mathrm{X}$.

T-coercivité et problèmes bien posés

- De façon générale, considérons X un espace de Hilbert, a une forme sesquilinéaire continue sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ et $\ell \in \mathrm{X}'$. On s'intéresse au problème

$$(\mathscr{P}_V) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{X} \text{ tel que :} \\ a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in \mathrm{X}. \end{array} \right.$$

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tel que

$$(Au, v)_{\mathrm{X}} = a(u,v), \qquad \forall u, v \in \mathrm{X}.$$

Proposition. $(\mathscr{P}_V)$ bien posé (A isomorphisme) $\Leftrightarrow$ il existe $\mathtt{T}$ un isomorphisme de X tel que $a(\cdot, \mathtt{T}\cdot)$ soit coercive.

- Supposons a symétrique ($a(u,v) = a(v,u), \quad \forall u, v \in \mathrm{X}$) et $a(\cdot, \mathtt{T}\cdot)$ coercive pour $\mathtt{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ linéaire continu. Alors :

⋆ $Au = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = a(u, \mathtt{T}u) \geq C \|u\|^2_{\mathrm{X}} \quad \Rightarrow \quad u = 0 \quad \Rightarrow \quad A$ injectif.

⋆ Soit u l'unique fonction vérifiant $a(\mathtt{T}u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in \mathrm{X}$.
On note que $\mathtt{T}u$ vérifie $(\mathscr{P}_V) \quad \Rightarrow \quad A$ surjectif.

T-coercivité et problèmes bien posés

- De façon générale, considérons X un espace de Hilbert, a une forme sesquilinéaire continue sur $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ et $\ell \in \mathrm{X}'$. On s'intéresse au problème

$$\boxed{(\mathscr{P}_V)\ \left|\ \begin{array}{l}\text{Trouver } u\in\mathrm{X} \text{ tel que :}\\ a(u,v)=\ell(v),\quad \forall v\in\mathrm{X}.\end{array}\right.}$$

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ tel que

$$(Au,v)_{\mathrm{X}} = a(u,v), \qquad \forall u,v\in\mathrm{X}.$$

PROPOSITION. $(\mathscr{P}_V)$ bien posé (A isomorphisme) $\Leftrightarrow$ il existe $\mathtt{T}$ un isomorphisme de X tel que $a(\cdot,\mathtt{T}\cdot)$ soit coercive.

- Si de plus a est symétrique ($a(u,v)=a(v,u),\quad \forall u,v\in\mathrm{X}$) alors :

PROPOSITION. $(\mathscr{P}_V)$ bien posé (A isomorphisme) $\Leftrightarrow$ il existe $\mathtt{T}:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ linéaire continu tel que $a(\cdot,\mathtt{T}\cdot)$ soit coercive.

1 Séance 1 : contexte physique

2 Séance 2 : la méthode de la T-coercivité
- Principe
- Géométries élémentaires
- T-coercivité et problèmes bien posés

3 Séance 3 : géométrie générale, étude dans l'intervalle
- Géométrie générale
- Étude dans l'intervalle

4 Au programme la semaine prochaine

1. Séance 1 : contexte physique

2. Séance 2 : la méthode de la $\mathtt{T}$-coercivité
   - Principe
   - Géométries élémentaires
   - $\mathtt{T}$-coercivité et problèmes bien posés

3. Séance 3 : géométrie générale, étude dans l'intervalle
   - Géométrie générale
   - Étude dans l'intervalle

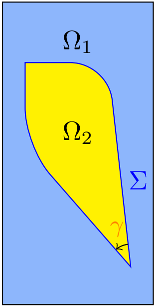
4. Au programme la semaine prochaine

Géométrie générale

Idée : raisonner par localisation

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que

$$(Au, v)_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla v, \qquad \forall u, v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega).$$

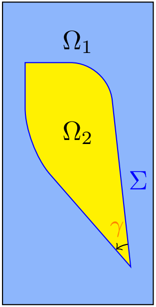


Géométrie générale

Idée : raisonner par localisation

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$(Au, v)_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} = \int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla v, \qquad \forall u, v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$



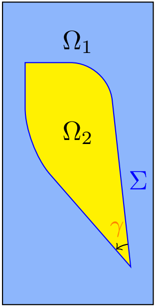
1. Partition de l'unité.

Géométrie générale

Idée : raisonner par localisation

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$(Au, v)_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} = \int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla v, \qquad \forall u, v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$



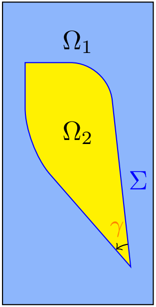
1. Partition de l'unité.
2. On construit un isomorphisme $\mathtt{T}$ en utilisant les opérateurs locaux.

Géométrie générale

Idée : raisonner par localisation

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$(Au, v)_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} = \int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla v, \qquad \forall u, v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$



1. Partition de l'unité.
2. On construit un isomorphisme $\mathtt{T}$ en utilisant les opérateurs locaux.
3. On prouve l'identité

$$\boxed{A \circ \mathtt{T} = I + K}$$

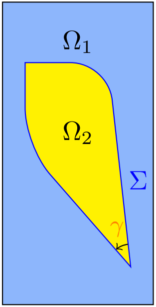
avec I isomorphisme, K compact, lorsque le contraste et la géométrie sont tels qu'on peut inverser localement.

Géométrie générale

Idée : raisonner par localisation

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$(Au, v)_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} = \int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla v, \qquad \forall u, v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$



1. Partition de l'unité.
2. On construit un isomorphisme $\mathtt{T}$ en utilisant les opérateurs locaux.
3. On prouve l'identité

$$\boxed{A \circ \mathtt{T} = I + K}$$

avec I isomorphisme, K compact, lorsque le contraste et la géométrie sont tels qu'on peut inverser localement.

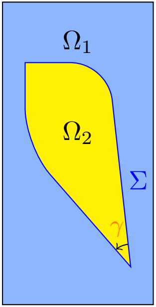
Proposition. $(\mathscr{P})$ bien posé au sens de Fredholm pour une interface polygonale curviligne lorsque $\kappa_\sigma \notin [-\mathcal{R}_\gamma; -1/\mathcal{R}_\gamma]$ où γ est le plus petit angle.

Géométrie générale

Idée : raisonner par localisation

- Avec Riesz, introduisons l'opérateur $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$(Au, v)_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} = \int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla v, \qquad \forall u, v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$



1. Partition de l'unité.
2. On construit un isomorphisme $\mathtt{T}$ en utilisant les opérateurs locaux.
3. On prouve l'identité

$$\boxed{A \circ \mathtt{T} = I + K}$$

avec I isomorphisme, K compact, lorsque le contraste et la géométrie sont tels qu'on peut inverser localement.

Proposition. $(\mathscr{P})$ bien posé au sens de Fredholm pour une interface polygonale curviligne lorsque $\kappa_\sigma \notin [-\mathcal{R}_\gamma; -1/\mathcal{R}_\gamma]$ où γ est le plus petit angle.

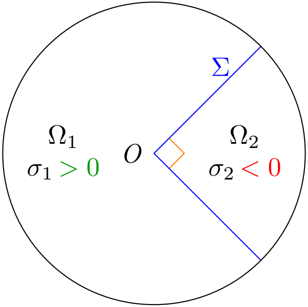
$\Rightarrow$ Si Σ est régulière, $(\mathscr{P})$ bien posé au sens de Fredholm lorsque $\kappa_\sigma \neq -1$.

1. Séance 1 : contexte physique
2. Séance 2 : la méthode de la T-coercivité
   - Principe
   - Géométries élémentaires
   - T-coercivité et problèmes bien posés
3. Séance 3 : géométrie générale, étude dans l'intervalle
   - Géométrie générale
   - Étude dans l'intervalle
4. Au programme la semaine prochaine

Problématique

$$(\mathscr{P}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\mathrm{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{ in } \Omega. \end{array} \right.$$

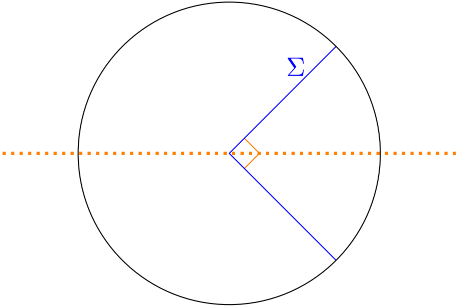
- Pour simplifier la présentation, travaillons sur un cas particulier.



Problématique

$$(\mathscr{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\mathrm{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{ in } \Omega. \end{array} \right.$$

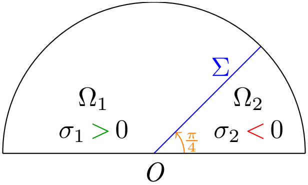
- Pour simplifier la présentation, travaillons sur un cas particulier.



Problématique

$$(\mathscr{P}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\mathrm{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{ in } \Omega. \end{array} \right.$$

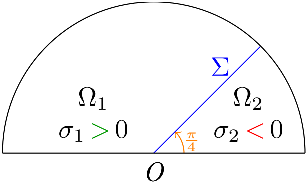
- Pour simplifier la présentation, travaillons sur un cas particulier.



Problématique

$$(\mathscr{P}) \;\left|\; \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\mathrm{div}(\sigma\nabla u) = f \quad \text{ in } \Omega. \end{array}\right.$$

- Pour simplifier la présentation, travaillons sur un cas particulier.



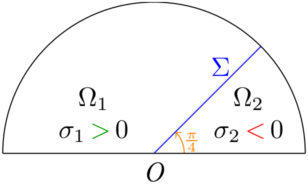
- Avec la méthode variationnelle de la T-coercivité, on prouve la

Proposition. Le problème $(\mathscr{P})$ est bien posé dès lors que le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ vérifie $\kappa_\sigma \notin I_c = [-1; -1/3]$.

Problématique

$$(\mathscr{P}) \; \left| \; \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\mathrm{div}(\sigma\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega. \end{array} \right.$$

- Pour simplifier la présentation, travaillons sur un cas particulier.



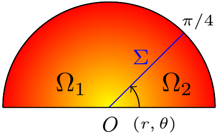
- Avec la méthode variationnelle de la $\mathtt{T}$-coercivité, on prouve la

Proposition. Le problème $(\mathscr{P})$ est bien posé dès lors que le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ vérifie $\kappa_\sigma \notin I_c = [-1; -1/3]$.

Que se passe-t-il lorsque $\kappa_\sigma \in (-1; -1/3]$?

Analogie avec un problème de guide d'ondes

- Secteur borné Ω

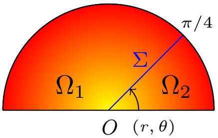


- Équation :

$$\underbrace{-\mathrm{div}(\sigma\nabla u)}_{-r^{-2}(\sigma(r\partial_r)^2+\partial_\theta\sigma\partial_\theta)u} = f$$

Analogie avec un problème de guide d'ondes

- Secteur borné Ω



- Équation :

$$\underbrace{-\mathrm{div}(\sigma\nabla u)}_{-r^{-2}(\sigma(r\partial_r)^2+\partial_\theta\sigma\partial_\theta)u} = f$$

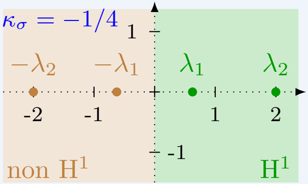
- Singularités dans le secteur

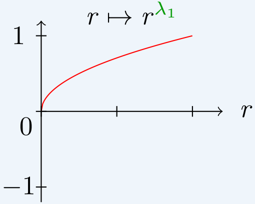
$$s(r,\theta) = r^\lambda\varphi(\theta)$$

Analogie avec un problème de guide d'ondes

On calcule les singularités $s(r,\theta) = r^{\lambda}\varphi(\theta)$. On observe deux cas :

- En dehors de l'intervalle critique

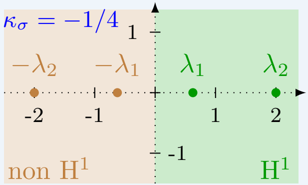


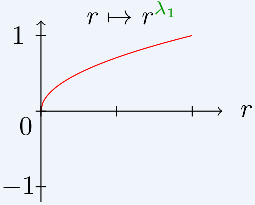


Analogie avec un problème de guide d'ondes

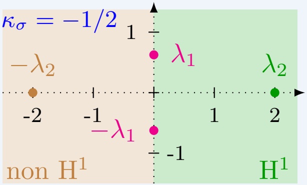
On calcule les singularités $s(r,\theta) = r^{\lambda}\varphi(\theta)$. On observe deux cas :

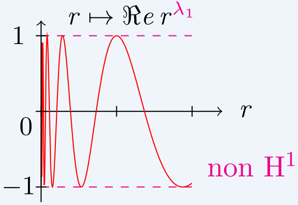
- En dehors de l'intervalle critique





- Dans l'intervalle critique

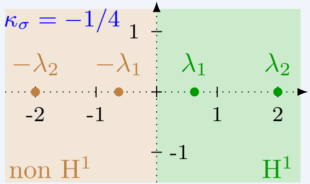


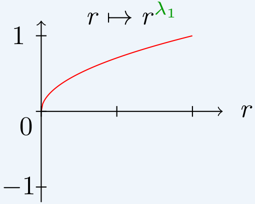


Analogie avec un problème de guide d'ondes

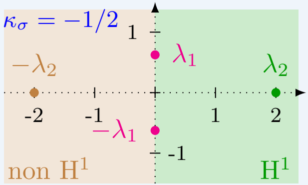
On calcule les singularités $s(r,\theta) = r^{\lambda}\varphi(\theta)$. On observe deux cas :

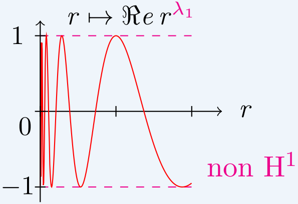
- En dehors de l'intervalle critique





- Dans l'intervalle critique





Comment tenir compte des singularités propagatives dans l'intervalle ?

Dans l'intervalle critique : message 1

Pour un contraste κ_σ dans l'intervalle critique, il existe des singularités de la forme $s(r,\theta) = r^{i\pm\eta}\varphi(\theta)$ avec $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- En utilisant ces singularités, on met à défaut l'estimation *a priori*

$$\xcancel{\|u\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \leq C\left(\|Au\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right) \qquad \forall u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).}$$

Dans l'intervalle critique : message 1

Pour un contraste κ_σ dans l'intervalle critique, il existe des singularités de la forme $s(r,\theta) = r^{i\pm\eta}\varphi(\theta)$ avec $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- En utilisant ces singularités, on met à défaut l'estimation *a priori*

$$\cancel{\|u\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \leq C\left(\|Au\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right) \qquad \forall u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).}$$

- Ceci permet de prouver qu'on ne peut pas avoir $A = I + K$ où I est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ et K un opérateur compact de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

Dans l'intervalle critique : message 1

Pour un contraste κ_σ dans l'intervalle critique, il existe des singularités de la forme $s(r,\theta) = r^{i\pm\eta}\varphi(\theta)$ avec $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- En utilisant ces singularités, on met à défaut l'estimation *a priori*

$$\xcancel{\|u\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq C\left(\|Au\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right) \qquad \forall u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega).}$$

- Ceci permet de prouver qu'on ne peut pas avoir $A = I + K$ où I est un isomorphisme de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ et K un opérateur compact de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

Proposition. Pour $\kappa_\sigma \in (-1; -1/3)$, le problème $(\mathscr{P})$ n'est pas bien posé au sens de Fredholm dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

Dans l'intervalle critique : message 1

Pour un contraste κ_σ dans l'intervalle critique, il existe des singularités de la forme $s(r,\theta) = r^{i\pm\eta}\varphi(\theta)$ avec $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- En utilisant ces singularités, on met à défaut l'estimation *a priori*

$$\cancel{\|u\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \leq C\left(\|Au\|_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right) \qquad \forall u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).}$$

- Ceci permet de prouver qu'on ne peut pas avoir $A = I + K$ où I est un isomorphisme de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ et K un opérateur compact de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

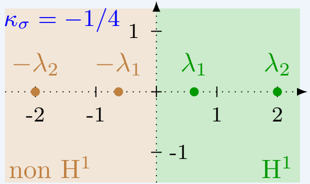
Proposition. Pour $\kappa_\sigma \in (-1; -1/3)$, le problème $(\mathscr{P})$ n'est pas bien posé au sens de Fredholm dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

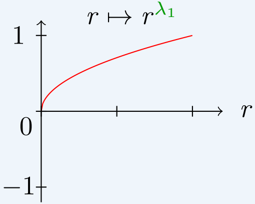
Voyons comment modifier le cadre fonctionnel pour retrouver un problème bien posé ...

Analogie avec un problème de guide d'ondes

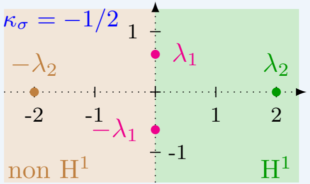
On calcule les singularités $s(r,\theta) = r^\lambda \varphi(\theta)$. On observe deux cas :

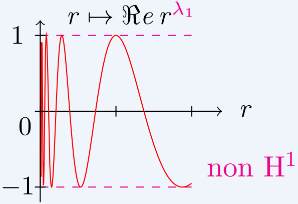
- En dehors de l'intervalle critique





- Dans l'intervalle critique

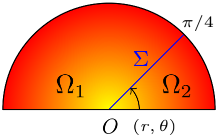


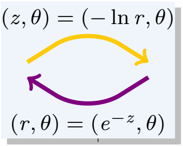


Comment tenir compte des singularités propagatives dans l'intervalle ?

Analogie avec un problème de guide d'ondes

- Secteur borné Ω





- Équation :

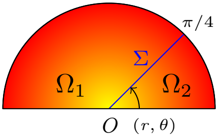
$$\underbrace{-\mathrm{div}(\sigma\nabla u)}_{-r^{-2}(\sigma(r\partial_r)^2+\partial_\theta\sigma\partial_\theta)u} = f$$

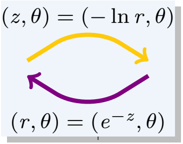
- Singularités dans le secteur

$s(r,\theta) = r^\lambda\varphi(\theta)$

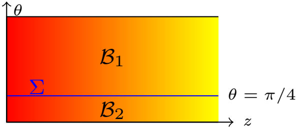
Analogie avec un problème de guide d'ondes

- Secteur borné Ω





- Demi bande $\mathcal{B}$



- Équation :

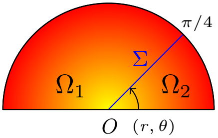
$$\underbrace{-\mathrm{div}(\sigma\nabla u)}_{-r^{-2}(\sigma(r\partial_r)^2+\partial_\theta\sigma\partial_\theta)u} = f$$

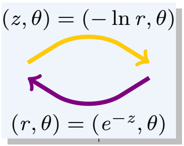
- Singularités dans le secteur

$$s(r,\theta) = r^\lambda\varphi(\theta)$$

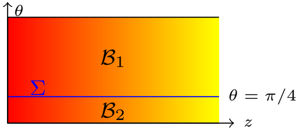
Analogie avec un problème de guide d'ondes

- Secteur borné Ω





- Demi bande $\mathcal{B}$



- Équation :

$$\underbrace{-\mathrm{div}(\sigma\nabla u)}_{-r^{-2}(\sigma(r\partial_r)^2+\partial_\theta\sigma\partial_\theta)u} = f$$

- Équation :

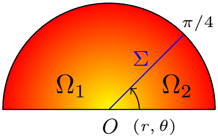
$$\underbrace{-\mathrm{div}(\sigma\nabla u)}_{-(\sigma\partial_z^2+\partial_\theta\sigma\partial_\theta)u} = e^{-2z} f$$

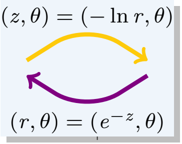
- Singularités dans le secteur

$$s(r,\theta) = r^\lambda \varphi(\theta)$$

Analogie avec un problème de guide d'ondes

- Secteur borné Ω





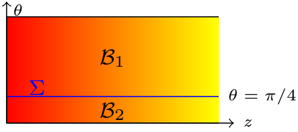
- Équation :

$$\underbrace{-\mathrm{div}(\sigma\nabla u)}_{-r^{-2}(\sigma(r\partial_r)^2+\partial_\theta\sigma\partial_\theta)u} = f$$

- Singularités dans le secteur

$$s(r,\theta) = r^\lambda \varphi(\theta)$$

- Demi bande $\mathcal{B}$



- Équation :

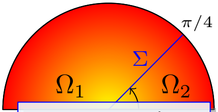
$$\underbrace{-\mathrm{div}(\sigma\nabla u)}_{-(\sigma\partial_z^2+\partial_\theta\sigma\partial_\theta)u} = e^{-2z} f$$

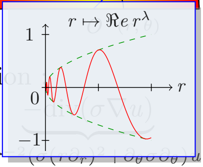
- Modes dans la bande

$$m(z,\theta) = e^{-\lambda z}\varphi(\theta)$$

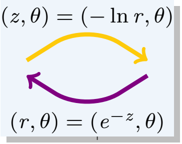
Analogie avec un problème de guide d'ondes

- Secteur borné Ω

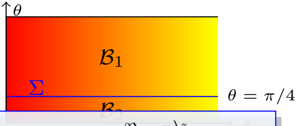


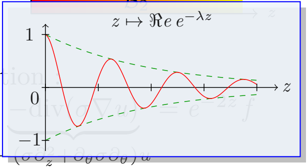


- Équation : $\underbrace{-\mathrm{div}(\sigma\nabla u)}_{-r^{-2}(\sigma(r\partial_r)^2+\partial_\theta\sigma\partial_\theta)u} = f$



- Demi bande $\mathcal{B}$





- Équation : $\underbrace{-\mathrm{div}(\sigma\nabla u)}_{-(\sigma\partial_z^2+\partial_\theta\sigma\partial_\theta)u} = e^{-2z} f$

- Singularités dans le secteur

$s(r,\theta) = r^{\lambda}\varphi(\theta)$

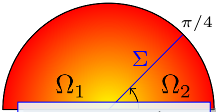
- Modes dans la bande

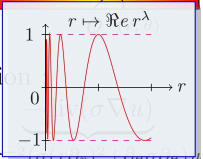
$m(z,\theta) = e^{-\lambda z}\varphi(\theta)$

$s \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ $\quad$ $\Re e\,\lambda > 0$ $\quad$ m évanescent

Analogie avec un problème de guide d'ondes

- Secteur borné Ω

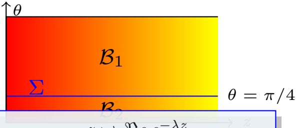


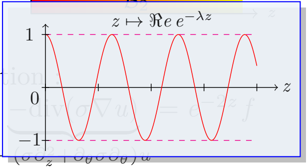


- Demi bande $\mathcal{B}$

$$(z,\theta) = (-\ln r, \theta)$$

$$(r,\theta) = (e^{-z}, \theta)$$





- Équation :

$$\underbrace{-\mathrm{div}(\sigma\nabla u)}_{-r^{-2}(\sigma(r\partial_r)^2+\partial_\theta\sigma\partial_\theta)u} = f$$

- Équation :

$$\underbrace{-\mathrm{div}(\sigma\nabla u)}_{-(\sigma\partial_z^2+\partial_\theta\sigma\partial_\theta)u} = e^{-2z} f$$

- Singularités dans le secteur

$$s(r,\theta) = r^{\lambda}\varphi(\theta) = \cancel{r^{a}}\,(\cos b\ln r + i\sin b\ln r)\varphi(\theta)$$

- Modes dans la bande

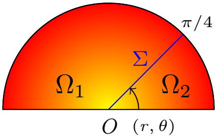
$$m(z,\theta) = e^{-\lambda z}\varphi(\theta) = \cancel{e^{-az}}\,(\cos bz - i\sin bz)\varphi(\theta)$$

$(\Re e\,\lambda = a,\ \Im m\,\lambda = b)$

$s \in \mathrm{H}^1(\Omega)$	$\Re e\,\lambda > 0$	m évanescent
$s \notin \mathrm{H}^1(\Omega)$	$\Re e\,\lambda = 0$	m propagatif

Analogie avec un problème de guide d'ondes

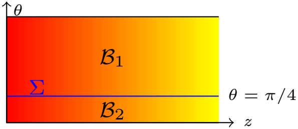
- Secteur borné Ω



$(z,\theta) = (-\ln r, \theta)$

$(r,\theta) = (e^{-z}, \theta)$

- Demi bande $\mathcal{B}$



- Équation :

$$\underbrace{-\mathrm{div}(\sigma\nabla u)}_{-r^{-2}(\sigma(r\partial_r)^2+\partial_\theta\sigma\partial_\theta)u} = f$$

- Équation :

$$\underbrace{-\mathrm{div}(\sigma\nabla u)}_{-(\sigma\partial_z^2+\partial_\theta\sigma\partial_\theta)u} = e^{-2z} f$$

- Singularités dans le secteur

$$s(r,\theta) = r^\lambda\varphi(\theta)$$
$$= \cancel{r^a}\,(\cos b\ln r + i\sin b\ln r)\varphi(\theta)$$

- Modes dans la bande

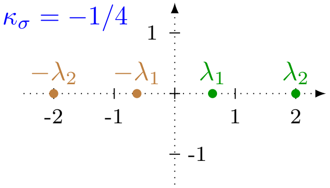
$$m(z,\theta) = e^{-\lambda z}\varphi(\theta)$$
$$= \cancel{e^{-az}}\,(\cos bz - i\sin bz)\varphi(\theta)$$

$(\Re e\,\lambda = a,\ \Im m\,\lambda = b)$

$s \in \mathrm{H}^1(\Omega)$	$\Re e\,\lambda > 0$	m évanescent
$s \notin \mathrm{H}^1(\Omega)$	$\Re e\,\lambda = 0$	m propagatif

► Ceci nous encourage à utiliser la décomposition modale dans la bande.

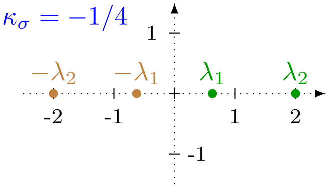
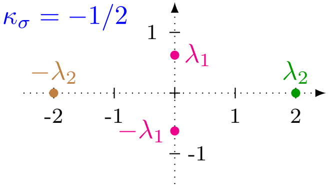
Analyse modale pour le guide d'ondes



- En dehors de l'intervalle critique. Tous les modes sont exponentiellement croissants ou décroissants.

→ On cherche une solution exponentiellement décroissante. Cadre H^1

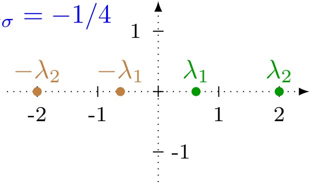
Analyse modale pour le guide d'ondes

	► En dehors de l'intervalle critique. Tous les modes sont exponentiellement croissants ou décroissants. → On cherche une solution exponentiellement décroissante. $\boxed{\text{Cadre } \mathrm{H}^1}$
	► Dans l'intervalle critique. Il y a exactement deux modes propagatifs.

Analyse modale pour le guide d'ondes

<table>
<tr>
<td>

$\kappa_\sigma = -1/4$



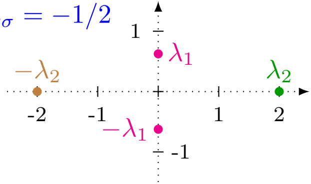
</td>
<td>

► En dehors de l'intervalle critique. Tous les modes sont exponentiellement croissants ou décroissants.

→ On cherche une solution exponentiellement décroissante. $\boxed{\text{Cadre } \mathrm{H}^1}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$\kappa_\sigma = -1/2$



</td>
<td>

► Dans l'intervalle critique. Il y a exactement deux modes propagatifs.

→ La décomposition sur les modes sortants conduit à chercher une solution de la forme

$$u = \underbrace{c\,\varphi_1\, e^{\lambda_1 z}}_{\text{propagatif}} + \underbrace{u_e}_{\text{partie évanescente}}.$$

$\boxed{\text{Cadre non } \mathrm{H}^1}$

</td>
</tr>
</table>

Dans l'intervalle critique : message 2

Il existe un cadre fonctionnel, différent de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, prenant en compte une singularité, dans lequel il y a existence et unicité de la solution.

Comment approcher numériquement la solution dans ce nouveau cadre ?

Approximation naïve

- Essayons une méthode éléments finis classique (élément de Lagrange P1). Nous calculons la solution du problème

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in \mathrm{V}_h \text{ t.q. :} \\ \displaystyle\int_\Omega \sigma \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_\Omega f v_h, \quad \forall v \in \mathrm{V}_h, \end{array}\right.$$

où V_h approche $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ lorsque $h \to 0$ (h est le pas de maillage).

Approximation naïve

- Essayons une méthode éléments finis classique (élément de Lagrange P1). Nous calculons la solution du problème

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h \in \mathrm{V}_h \text{ t.q. :}\\ \displaystyle\int_\Omega \sigma \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_\Omega f v_h, \quad \forall v \in \mathrm{V}_h,\end{array}\right.$$

où V_h approche $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ lorsque $h \to 0$ (h est le pas de maillage).

- Nous affichons u_h lorsque $h \to 0$.

Approximation naïve

- Essayons une méthode éléments finis classique (élément de Lagrange P1). Nous calculons la solution du problème

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h \in \mathrm{V}_h \text{ t}\ldots \\ \displaystyle\int \sigma\nabla \ldots \int_\Omega f v_h, \quad \forall v \in \mathrm{V}_h,\end{array}\right.$$

La suite (u_h) ne converge pas lorsque $h \to 0$!!!

où V_h approche $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ lorsque $h \to 0$ (h est le pas de maillage).

- Nous affichons u_h lorsque $h \to 0$.

(...) (...)

Contraste $\kappa_\sigma = -0.999 \in (-1; -1/3)$.

Remarque

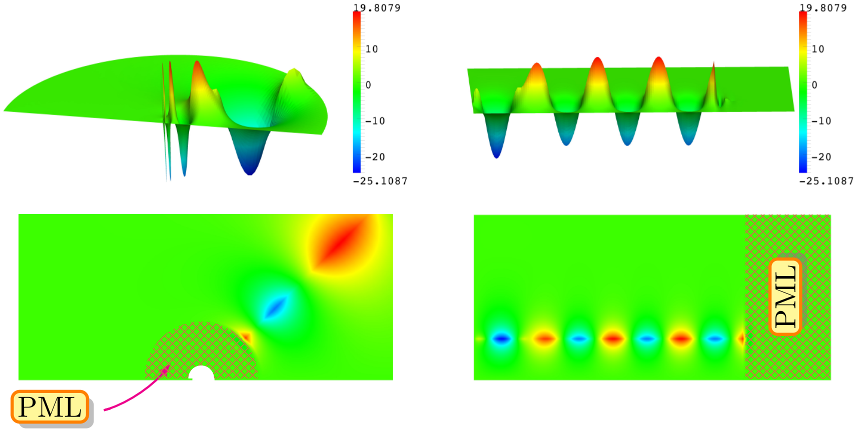
- En dehors de l'intervalle critique, pour la méthode d'approximation classique, la suite (u_h) converge.

$(\dots)$ $(\dots)$

Contraste $\kappa_\sigma = -1.001 \notin (-1; -1/3)$.

Comment approcher la solution ?

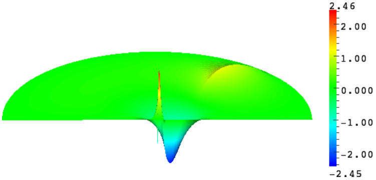
- Nous utilisons une couche parfaitement adaptée (PML en anglais, pour *Perfectly Matched Layer*) pour borner le domaine $\mathcal{B}$.
  + Éléments finis dans la bande tronquée ($\kappa_\sigma = -0.999 \in (-1; -1/3)$).

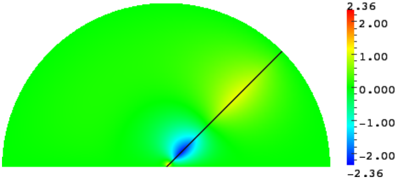


Un curieux phénomène de trou noir

- Pour l'équation de Helmholtz $\operatorname{div}(\sigma \nabla u) + \omega^2 u = f$, de la même façon, il faut modifier le cadre fonctionnel pour avoir un problème bien posé.

- Lorsqu'on revient en régime temporel, la solution considérée présente un étrange comportement d'onde de trou noir.





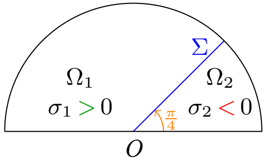
$(\boldsymbol{x}, t) \mapsto \Re e\left(u(\boldsymbol{x}) e^{-i\omega t}\right)$ for $\kappa_\sigma = -1/1.3$

- Tout se passe comme si une onde était absorbée par le coin.

Conclusion : résumé des résultats

Problème

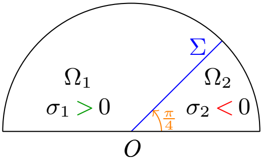
$$(\mathscr{P}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ t.q. :} \\ -\mathrm{div}\,(\sigma \nabla u) = f \qquad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$



Conclusion : résumé des résultats

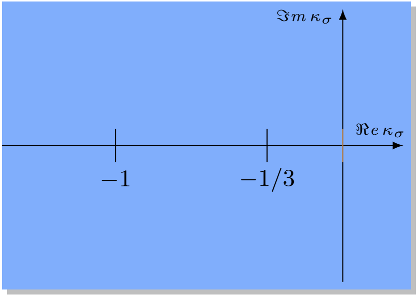
Problème

$(\mathscr{P})$ $\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ t.q. :} \\ -\mathrm{div}\,(\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega.\end{array}\right.$



Résultats

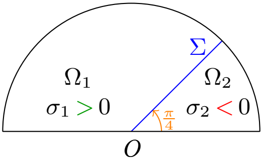
Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, $(\mathscr{P})$ bien-posé dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ (Lax-Milgram)



Conclusion : résumé des résultats

Problème

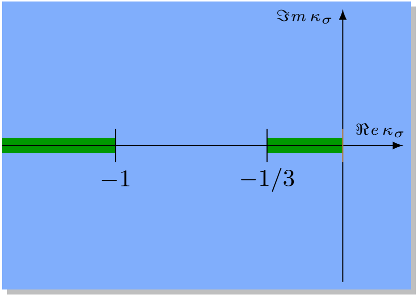
$(\mathscr{P})$ $\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ t.q. :} \\ -\mathrm{div}\,(\sigma\nabla u) = f \quad \text{ dans } \Omega.\end{array}\right.$



Résultats

Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, $(\mathscr{P})$ bien-posé dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ (Lax-Milgram)

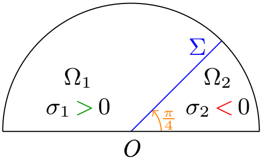
Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}^*_-\backslash[-1;-1/3]$, $(\mathscr{P})$ bien-posé dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ (T-coercivité)



Conclusion : résumé des résultats

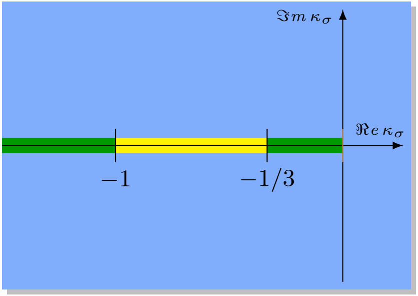
Problème

$(\mathscr{P})$ | Trouver $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ t.q. :
$-\mathrm{div}\,(\sigma\nabla u) = f \quad$ dans Ω.



Résultats

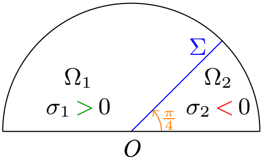
- Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, $(\mathscr{P})$ bien-posé dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ (Lax-Milgram)
- Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}_-^*\backslash[-1;-1/3]$, $(\mathscr{P})$ bien-posé dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ (T-coercivité)
- Pour $\kappa_\sigma \in (-1;-1/3)$, $(\mathscr{P})$ pas bien posé au sens de Fredholm dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ mais bien-posé dans nouveau cadre (PMLs)



Conclusion : résumé des résultats

Problème

$(\mathscr{P})$ $\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ t.q. :}\\ -\mathrm{div}\,(\sigma\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega.\end{array}\right.$



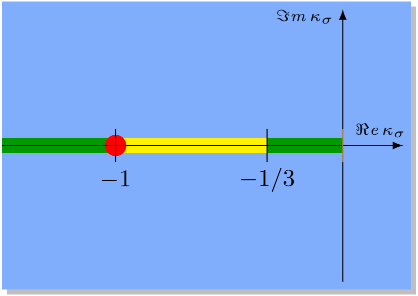
Résultats

Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, $(\mathscr{P})$ bien-posé dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ (Lax-Milgram)

Pour $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}^*_-\backslash[-1;-1/3]$, $(\mathscr{P})$ bien-posé dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ (T-coercivité)

Pour $\kappa_\sigma \in (-1;-1/3)$, $(\mathscr{P})$ pas bien posé au sens de Fredholm dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ mais bien-posé dans nouveau cadre (PMLs)

$\kappa_\sigma = -1$, $(\mathscr{P})$ mal-posé dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$



1. Séance 1 : contexte physique

2. Séance 2 : la méthode de la T-coercivité
   - Principe
   - Géométries élémentaires
   - T-coercivité et problèmes bien posés

3. Séance 3 : géométrie générale, étude dans l'intervalle
   - Géométrie générale
   - Étude dans l'intervalle

4. Au programme la semaine prochaine

Au programme la semaine prochaine

Discrétisation par éléments finis du problème $(\mathscr{P})$.