

APM_42031_EP_2025 – Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles.

Contrôle classant. Durée : 3 heures.

Mardi 24 février 2026, 14h-17h.

Sujet proposé par Lucas Chesnel.

Informations.

Ce sujet comprend six pages. Dans la correction, il sera notamment tenu compte de la qualité de la rédaction et de l'honnêteté des raisonnements. Il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour obtenir la note maximale. Les différentes parties sont très largement indépendantes, vous pouvez les aborder dans l'ordre que vous souhaitez. Le photocopié ainsi que les notes de cours et de petites classes sont autorisés. Les autres documents et les appareils électroniques sont proscrits.

Propagation d'ondes de surface dans un canal

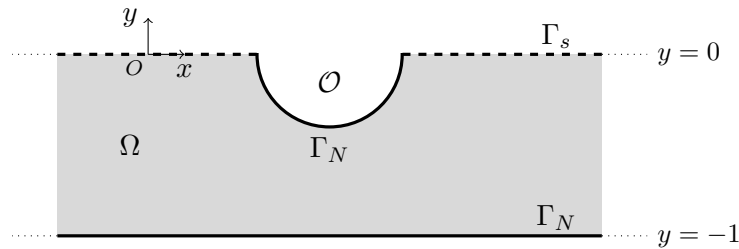


FIGURE 1 – Canal Ω en présence d'un obstacle.

Dans ce sujet, on s'intéresse à la propagation d'ondes de surface en régime harmonique en temps dans un canal de profondeur finie en présence d'un obstacle. Définissons le canal de référence

$$\Omega_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times]-1; 0[\},$$

ainsi que le canal perturbé

$$\Omega := \Omega_0 \setminus \overline{\mathcal{O}},$$

où $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ désigne l'obstacle borné. Supposons Ω connexe à bord régulier (Lipschitzien) et notons

$$\Gamma_s := \{(x, y) \in \partial\Omega \mid y = 0\} \text{ (} s \text{ comme surface)}, \quad \Gamma_N := \partial\Omega \setminus \Gamma_s,$$

voir la Figure 1. Nous sommes conduits à étudier le système d'équations

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u + k^2 u &= f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u &= \lambda u & \text{sur } \Gamma_s \\ \partial_n u &= 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

Ici u représente le potentiel de vitesses, f désigne un terme source appartenant à $L^2(\Omega)$, $k \geq 0$ est le nombre d'ondes, λ est proportionnel à la fréquence des oscillations harmoniques. De plus, n désigne le

vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω . La condition de Neumann sur Γ_N correspond à une condition de non pénétration.

Bien que Ω ne soit pas borné, en utilisant la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, on peut établir la formule de Green

$$\int_{\Omega} \Delta u v + \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \partial_n u v \, d\Gamma = \int_{\Gamma_s \cup \Gamma_N} \partial_n u v \, d\Gamma, \quad \forall u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega).$$

Par ailleurs, les résultats concernant les théorèmes de trace énoncés dans le cours sont valides dans les ouverts Ω non bornés considérés ici.

Question 1. Montrer que si $u \in H^2(\Omega)$ vérifie le problème $(\mathcal{P})$ alors u est solution du problème variationnel

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{array} \right. \quad (1)$$

où l'on donnera les expressions de $a(\cdot, \cdot)$ et $\ell(\cdot)$. Réciproquement, établir que si $u \in H^2(\Omega)$ vérifie (1) alors u est solution de $(\mathcal{P})$.

1 Étude à basse fréquence : un premier résultat

Dans cette partie, fixons $k = 1$ et étudions le problème $(\mathcal{P})$ à basse fréquence, autrement dit pour des $\lambda > 0$ petits. Notons $I :=]-1; 0[$.

Question 2. Par un calcul direct, établir l'estimation

$$\varphi(0)^2 \leq C_o \|\varphi\|_{H^1(I)}^2, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{I}), \quad (2)$$

avec une constante $C_o > 0$ dont on donnera la valeur.

Définissons la propriété caractérisant la géométrie

$$(\text{GEO}) \quad \left| \text{Pour tout } (x, 0) \in \Gamma_s, \text{ on a } \{x\} \times I \subset \Omega. \right.$$

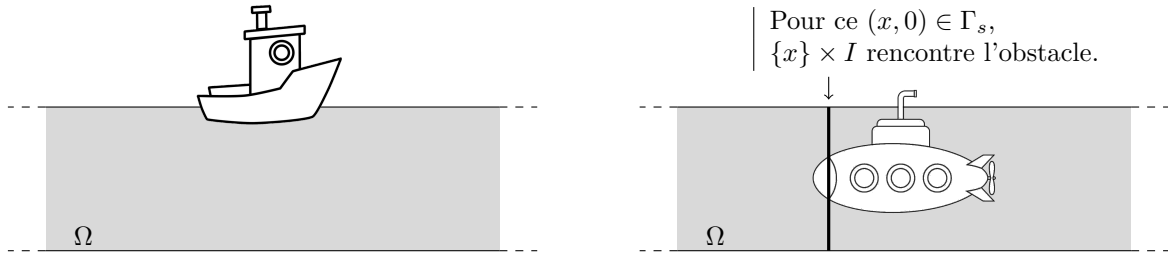


FIGURE 2 – Dans le domaine Ω de gauche, la propriété (GEO) est vérifiée. Ce n'est pas le cas dans la géométrie de droite.

Question 3. Montrer que si la propriété (GEO) est vérifiée alors on a l'estimation

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_s)}^2 \leq C_o \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Ici et comme dans tout le sujet, pour simplifier, nous écrivons u sur Γ_s ce qui désigne en réalité la trace de u sur Γ_s .

Question 4. Supposons (GEO) vérifiée et $\lambda \in]0; \lambda_o[$ avec $\lambda_o := 1/C_o$. Prouver que le problème

$$(\text{FV}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + uv \, d\Omega - \lambda \int_{\Gamma_s} uv \, d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{array} \right.$$

admet une unique solution. Dans ce cas, la résolution de (FV) est-elle associée à la minimisation d'une énergie? Si oui, donner la fonctionnelle correspondante.

2 Étude à basse fréquence : un résultat plus fin

La borne supérieure λ_0 obtenue ci-dessus n'est *a priori* pas optimale. Nous allons l'améliorer. Définissons la fonctionnelle $J : H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $J(\varphi) = \|\varphi\|_{H^1(I)}^2$ et notons

$$\lambda_* = \inf_{\varphi \in \mathcal{S}} J(\varphi) \quad \text{avec } \mathcal{S} := \{\varphi \in H^1(I) \mid \varphi^2(0) = 1\}. \quad (3)$$

Question 5. Après avoir expliqué pourquoi l'ensemble $\mathcal{S}$ est bien défini, prouver que l'on a

$$\lambda_* \varphi^2(0) \leq \|\varphi\|_{H^1(I)}^2, \quad \forall \varphi \in H^1(I). \quad (4)$$

Montrons maintenant que l'infimum dans (3) est atteint.

Question 6. i) Soit (φ_p) une suite minimisante de J sur $\mathcal{S}$, i.e. une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} J(\varphi_p) = \lambda_*.$$

Montrer qu'on peut extraire de (φ_p) une sous-suite, toujours notée (φ_p) pour simplifier, telle que (φ_p) converge faiblement vers un φ_* dans $H^1(I)$.

ii) Justifier qu'il existe $\tau \in H^1(I)$ tel que

$$\varphi(0) = (\tau, \varphi)_{H^1(I)}, \quad \forall \varphi \in H^1(I).$$

iii) Prouver que φ_* appartient à $\mathcal{S}$ et qu'on a $J(\varphi_*) = \lambda_*$, autrement dit que φ_* réalise l'infimum de J sur $\mathcal{S}$.

Question 7. En travaillant sur le problème sans contrainte

$$\inf_{\varphi \in H^1(I)} \left\{ G(\varphi) = \|\varphi\|_{H^1(I)}^2 - \lambda_* \varphi^2(0) \right\},$$

montrer que φ_* vérifie

$$(\varphi_*, \psi)_{H^1(I)} = \lambda_* \varphi_*(0) \psi(0), \quad \forall \psi \in H^1(I).$$

Question 8. Prouver que φ_* appartient à $H^2(I)$ et que l'on a

$$\begin{cases} -\varphi_*'' + \varphi_* &= 0 & \text{dans } I \\ \varphi_*'(0) &= \lambda_* \varphi_*(0) \\ \varphi_*'(-1) &= 0. \end{cases}$$

Question 9. Déterminer λ_* . Expliquer en quoi ce dernier résultat permet d'améliorer celui de la Question 4 lorsque la propriété (GEO) est vérifiée.

3 Étude à basse fréquence sans la propriété (GEO)

On souhaite à présent étudier le problème (FV) avec $\lambda \in]0; \lambda_*[$ lorsque la propriété (GEO) n'est pas vérifiée. Définissons

$$\tilde{\Gamma}_s := \{(x, 0) \in \Gamma_s \mid \{x\} \times I \subset \Omega\},$$

ainsi que la forme $b(\cdot, \cdot)$ telle que

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + uv \, d\Omega - \lambda \int_{\tilde{\Gamma}_s} uv \, d\Gamma, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons les opérateurs $B, K : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned} (Bu, v)_{H^1(\Omega)} &= b(u, v), \quad \forall u, v \in H^1(\Omega) \\ (Ku, v)_{H^1(\Omega)} &= a(u, v) - b(u, v) = -\lambda \int_{\Gamma_s \setminus \tilde{\Gamma}_s} uv \, d\Gamma, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Question 10. Montrer que B est continu et bijectif quand $\lambda \in]0; \lambda_\star[$. On pourra exploiter (4).

Question 11. Prouver que K est un opérateur compact, autrement dit que de toute suite bornée (u_p) dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite (u_p) telle que (Ku_p) converge dans $H^1(\Omega)$.

Pour cela, on utilisera la

Proposition 1. *De toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite de fonctions dont les traces sur $\Gamma_s \setminus \tilde{\Gamma}_s$ convergent dans $L^2(\Gamma_s \setminus \tilde{\Gamma}_s)$.*

La combinaison des résultats des Questions 10 et 11 permet d'assurer que pour $\lambda \in]0; \lambda_\star[$, (FV) admet une solution lorsqu'on a unicité (comme en dimension finie), énoncé que l'on ne démontrera pas ici.

4 Approximation numérique

Pour $\lambda \in]0; \lambda_\star[$, nous souhaitons calculer une approximation de la solution du problème (FV) lorsque celui-ci admet une unique solution. Introduisons $L > 0$ telle que $\Omega = \Omega_0$ pour $|x| \geq L$ (l'obstacle est situé dans la zone $-L < x < L$) et supposons f à support dans

$$\Omega^L := \{(x, y) \in \Omega \mid |x| < L\}.$$

On peut montrer que la solution de (FV) est exponentiellement décroissante à l'infini. En première approximation, ceci amène à s'intéresser au problème

$$(FV^L) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega^L) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega^L} \nabla u \cdot \nabla v + uv \, d\Omega - \lambda \int_{\Gamma_s^L} uv \, d\Gamma = \int_{\Omega^L} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega^L), \end{array} \right.$$

avec $\Gamma_s^L := \{(x, 0) \in \Gamma_s \mid |x| < L\}$.

Question 12. Quelle condition vérifie u solution de (FV^L) sur les bords verticaux $\Sigma^{\pm L} := \{\pm L\} \times I$ de $\partial\Omega^L$?

Comme ci-dessus, on peut montrer que (FV^L) admet une unique solution si la seule solution de (FV^L) avec $f \equiv 0$ est la solution nulle, ce que nous supposons dans la suite. Pour approcher u satisfaisant (FV^L) , utilisons une méthode d'éléments finis. Supposons Ω^L à bord polygonal. Introduisons $\mathcal{T}_h$ une partition (un maillage) de Ω^L par des triangles. On supposera que $(\mathcal{T}_h)$ constitue une suite de maillages réguliers de Ω^L . De manière classique, ici h fait référence au pas du maillage. Définissons l'espace

$$V_h := \{u_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega^L}) \mid u_h|_{T_h} \in \mathbb{P}_1(T_h), \forall T_h \in \mathcal{T}_h\}.$$

Ci-dessus, $\mathbb{P}_1(T_h)$ désigne l'espace des fonctions affines sur le triangle T_h . Considérons le problème

$$(FV_h^L) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a^L(u_h, v_h) = \ell^L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

avec

$$a^L(u_h, v_h) = \int_{\Omega^L} \nabla u_h \cdot \nabla v_h + u_h v_h \, d\Omega - \lambda \int_{\Gamma_s^L} u_h v_h \, d\Gamma, \quad \ell^L(v_h) = \int_{\Omega^L} f v_h \, d\Omega. \quad (5)$$

Prouvons d'abord que (FV_h^L) admet une unique solution pour $h > 0$ suffisamment petit. Pour cela, il suffit d'établir le résultat suivant.

Proposition 2. *Zéro est la seule solution de (FV_h^L) avec $f \equiv 0$ pour $h > 0$ suffisamment petit.*

Démontrons cet énoncé.

Question 13. Raisonnons par l'absurde et supposons la Proposition 2 fausse. Il existe alors une

suite (h_p) telle que $\lim_{p \rightarrow +\infty} h_p = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p \in V_{h_p} \setminus \{0\}$ vérifiant $(FV_{h_p}^L)$ avec $f \equiv 0$.

i) Expliquer pourquoi sans perte de généralité on peut supposer $\|u_p\|_{H^1(\Omega^L)} = 1$.

ii) Justifier qu'on peut extraire de (u_p) une sous-suite qui converge faiblement vers un u dans $H^1(\Omega^L)$.

iii) Montrer que pour tout $v \in H^1(\Omega^L)$, il existe une suite (v_p) d'éléments de V_{h_p} qui converge vers v dans $H^1(\Omega^L)$.

iv) Établir que l'on a

$$a^L(u, v) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega^L).$$

v) Montrer que pour tout $g \in L^2(\Gamma_s^L)$, il existe $r_g \in H^1(\Omega^L)$ tel que

$$(r_g, v)_{H^1(\Omega^L)} = (g, v|_{\Gamma_s^L})_{L^2(\Gamma_s^L)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega^L).$$

vi) En utilisant que de toute suite bornée dans $H^1(\Omega^L)$, on peut extraire une sous-suite dont la trace sur Γ_s^L converge dans $L^2(\Gamma_s^L)$, prouver qu'on peut extraire de (u_p) une sous-suite qui converge fortement vers zéro dans $H^1(\Omega^L)$. Conclure.

Question 14. Pour $f \in L^2(\Omega^L)$, notons u la solution de (FV^L) et u_h celle de (FV_h^L) pour h suffisamment petit.

i) Prouver que l'on a

$$a^L(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Introduisons $\kappa^L(\cdot, \cdot)$ telle que

$$\kappa^L(u, v) = \lambda \int_{\Gamma_s^L} uv \, d\Gamma, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega^L).$$

ii) Définissons w_h (qui n'appartient pas à V_h en général) tel que

$$w_h = \frac{u - u_h}{\|u - u_h\|_{H^1(\Omega^L)}} \text{ si } u \neq u_h, \quad w_h = 0 \text{ sinon.}$$

Établir que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \kappa^L(w_h, w_h) = 0.$$

iii) En déduire l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega^L)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega^L)},$$

où C est une constante indépendante de h .

iv) Quelle estimation en h obtient-on pour $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega^L)}$ si $u \in H^2(\Omega^L)$?

5 Mise en œuvre pratique

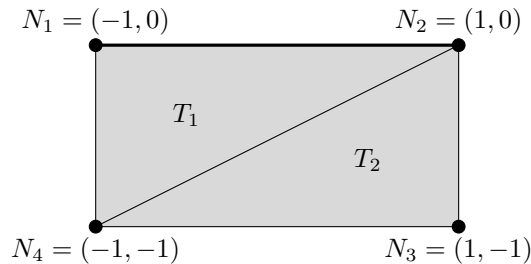


FIGURE 3 – Maillage très simple du domaine $\Omega^L =]-1; 1[\times]-1; 0[$.

Considérons le domaine $\Omega^L =]-1; 1[\times]-1; 0[$ que l'on maille comme sur la Figure 3 en deux triangles T_1, T_2 et quatre nœuds situés respectivement en $N_1 = (-1, 0)$, $N_2 = (1, 0)$, $N_3 = (1, -1)$ et $N_4 = (-1, -1)$. Pour $i = 1, \dots, 4$, notons φ_i la fonction “chapeau” de V_h telle que $\varphi_i(N_j) = \delta_{ij}$ où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

Question 15. Réécrire le problème (FV_h^L) sous la forme

$$(\mathbb{K} + \mathbb{M} + \mathbb{B})U = F,$$

où les matrices $\mathbb{K}, \mathbb{M}, \mathbb{B}$ correspondent à la discrétisation des trois intégrales définissant $a^L(\cdot, \cdot)$ en (5). On donnera les expressions de $\mathbb{K}, \mathbb{M}, \mathbb{B}$ en fonction des φ_i ainsi que celles de U et F .

Question 16. Dessiner en 3D l'allure de la fonction φ_1 et donner les expressions de φ_1, φ_2 sur Ω^L .

Question 17. Calculer explicitement $\mathbb{B}$ ainsi que les termes $\mathbb{K}_{11}, \mathbb{K}_{12}, \mathbb{K}_{21}, \mathbb{K}_{22}$ de $\mathbb{K}$ (on ne se préoccupera pas de $\mathbb{M}$). Quelles propriétés possèdent les matrices $\mathbb{K}, \mathbb{M}, \mathbb{B}$ pour des maillages génériques?

6 Étude à plus haute fréquence

Dans cette partie, nous souhaitons étudier les propriétés du problème $(\mathcal{P})$ pour $\lambda > \lambda_*$. Pour simplifier les calculs, fixons $k = 0$ de sorte que $(\mathcal{P})$ devient

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = \lambda u & \text{sur } \Gamma_s \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_s. \end{cases} \quad (6)$$

Dans cette situation, on peut montrer que le λ_* correspondant vaut 0. Notre objectif consiste donc à considérer (6) pour $\lambda > 0$. Pour simplifier, nous travaillerons dans le guide sans obstacle $\Omega = \Omega_0 = \mathbb{R} \times I$ avec $\Gamma_s = \mathbb{R} \times \{0\}$.

Question 18. Supposons $f \equiv 0$ dans Ω_0 . Montrer que (6) admet des solutions non-nulles à variables séparées de la forme

$$w_{\pm}(x, y) = e^{\pm i\beta x} \varphi(y)$$

avec $\beta > 0$ et $\varphi \in H^1(I)$. On donnera l'expression de φ et on écrira l'équation caractérisant β .

Physiquement, avec une convention de régime harmonique en temps en $e^{-i\omega t}$, w_+ (resp. w_-) correspond à une onde de surface se propageant vers la droite (resp. gauche). Nous allons montrer qu'en raison de l'existence de ces $w_{\pm}$, la forme $d(\cdot, \cdot)$ définie par

$$d(u, v) = \int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \lambda \int_{\Gamma_s} uv \, d\Gamma, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega_0), \quad (7)$$

n'est pas coercive sur $H^1(\Omega_0)$. Introduisons $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de troncature telle que

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \geq 1 \\ 1 & \text{pour } x \leq 0. \end{cases}$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, définissons $\zeta_p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ la fonction paire telle que $\zeta_p(x) = \zeta(x - p)$ pour $x \geq 0$, et posons

$$u_p(x, y) = \zeta_p(x)(w_+(x, y) + w_-(x, y))/2 = \zeta_p(x) \cos(\beta x) \varphi(y).$$

Question 19. Faire un dessin de ζ_p pour $p = 10$. En travaillant avec la suite (u_p) montrer que les formes $d(\cdot, \cdot)$ et $-d(\cdot, \cdot)$ ne sont pas coercives sur $H^1(\Omega_0)$.

On peut établir de façon similaire que l'on n'a pas non plus de coercivité dans $H^1(\Omega)$ pour la forme associée à (6) en présence d'un obstacle. L'idée ici, qui est naturelle physiquement, est qu'il est nécessaire de prendre en compte les ondes $w_{\pm}$, qui n'appartiennent pas à $H^1(\Omega)$, dans le choix de l'espace où l'on cherche la solution de (6). Mais ceci est une autre histoire...