

MAP431 – Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles.

Contrôle classant. Durée : 3 heures.

Mardi 27 février 2024, 14h-17h.

Sujet proposé par Lucas Chesnel.

Informations.

Ce sujet comprend six pages. Dans la correction, il sera notamment tenu compte de la qualité de la rédaction et de l'honnêteté des raisonnements. Il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour obtenir la note maximale. Le photocopié ainsi que les notes de cours et de petites classes sont autorisés. Les autres documents et les appareils électroniques sont proscrits.

Étude de problèmes de transmission non coercifs

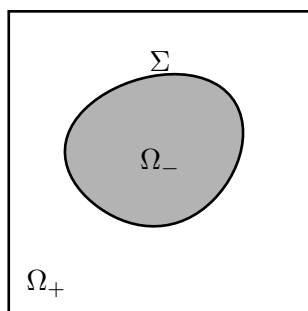


FIGURE 1 – Domaine Ω .

Certains métaux, pour des régimes de fréquences bien choisis, présentent une permittivité diélectrique ε qui peut être en première approximation considérée réelle négative. L'étude de la propagation d'ondes électromagnétiques dans des milieux hétérogènes constitués de tels métaux et de matériaux classiques à ε positif conduit à travailler sur des problèmes de transmission originaux en raison du changement de signe de ε . En pratique, des phénomènes inhabituels se produisent à l'interface entre les deux matériaux que les physiciens cherchent à exploiter pour les applications.

Dans ce sujet, nous nous intéressons à quelques aspects liés à l'analyse de ces problèmes. Considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné connexe partitionné en deux sous domaines Ω_+ , Ω_- tels que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_+} \cup \overline{\Omega_-}$ et $\Omega_+ \cap \Omega_- = \emptyset$ (voir Figure 1). Nous supposons que Ω , Ω_+ , Ω_- sont des ouverts non vides à bords $\partial\Omega$, $\partial\Omega_+$, $\partial\Omega_-$ Lipschitziens. Pour modéliser les deux matériaux, séparés par l'interface $\Sigma := \partial\Omega_+ \cap \partial\Omega_-$, nous introduisons la fonction $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sigma = \sigma_+$ sur Ω_+ et $\sigma = \sigma_-$ sur Ω_- . Ici, σ_+ , σ_- sont deux constantes telles que $\sigma_+ > 0$, $\sigma_- < 0$. Nous admettrons que les résultats concernant les formules de Green, les inégalités de Poincaré et les théorèmes de trace énoncés dans le cours pour des ouverts réguliers demeurent vrais dans des ouverts à bords Lipschitziens.

Définissons l'espace

$$H_0^1(\Omega) := \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Nous le munissons de la norme $\|u\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$ où $dx = dx dy$. Nous nous intéressons d'abord au problème

$$(\mathcal{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Ici $f \in L^2(\Omega)$ désigne le terme source, c'est une donnée. Nous appelons *contraste* la quantité

$$\kappa_{\sigma} = \sigma_- / \sigma_+.$$

Pour $D = \Omega$, Ω_+ ou Ω_- , nous admettrons la formule de Green

$$\int_D v \operatorname{div} \vec{w} dx + \int_D \nabla v \cdot \vec{w} dx = \int_{\partial D} \vec{w} \cdot \vec{n} v ds$$

avec $v \in \mathbf{H}^1(D)$, $\vec{w} \in (\mathbf{L}^2(D))^2$ tel que $\operatorname{div} \vec{w} \in L^2(D)$. Dans cette formule, \vec{n} désigne le vecteur unitaire normal à ∂D dirigé vers l'extérieur de D . Le terme sur ∂D est en réalité un crochet de dualité qui généralise l'intégrale. Par la suite on ne cherchera pas à détailler ce dernier point.

1 Mise en route

Question 1. Montrer que si u vérifie le problème (\mathcal{P}) alors u est solution du problème variationnel

$$(\text{FV}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{array} \right.$$

où $a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v dx$ et $\ell(v) = \int_{\Omega} f v dx$. Réciproquement, établir que si u vérifie (FV) avec $\operatorname{div}(\sigma \nabla u) \in L^2(\Omega)$ alors u est solution de (\mathcal{P}) .

Dans la suite nous dirons que le problème (FV) est *bien posé* si pour toute forme linéaire continue $\ell(\cdot)$ sur $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, (FV) admet une unique solution.

Question 2. Pour cette question uniquement, supposons que la constante σ_- vérifie $\sigma_- > 0$. Montrer que le problème (FV) est bien posé pour tout contraste $\kappa_{\sigma} > 0$.

Question 3. En travaillant avec des fonctions à supports bien choisis, prouver que les formes $a(\cdot, \cdot)$ et $-a(\cdot, \cdot)$ ne sont pas coercives sur $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ quand $\kappa_{\sigma} < 0$.

2 Une configuration pour laquelle (FV) n'est pas bien posé

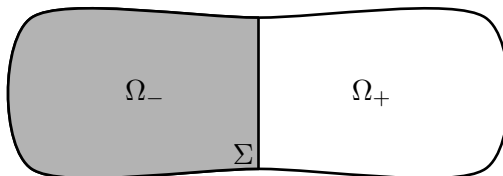


FIGURE 2 – Configuration symétrique par rapport à l'axe (Oy) .

Dans toute cette partie, nous supposons Ω symétrique par rapport à l'axe (Oy) , *i.e.* tel que $\Omega = \{(-x, y) \mid (x, y) \in \Omega\}$ (voir Figure 2). Définissons $\Omega_+ := \{(x, y) \in \Omega \mid x > 0\}$ et $\Omega_- := \{(x, y) \in \Omega \mid x < 0\}$. Dans cette configuration, que nous qualifierons dans la suite de *symétrique*, l'interface Σ vérifie $\Sigma = \{(x, y) \in \Omega \mid x = 0\}$. Si φ est une fonction définie sur Ω , nous notons $\varphi_+ := \varphi|_{\Omega_+}$ et $\varphi_- := \varphi|_{\Omega_-}$.

Question 4. Soit g une fonction définie sur Σ telle qu'il existe un relèvement $u_g \in H^1(\Omega_+)$ satisfaisant $u_g = g$ sur Σ et $u_g = 0$ sur $\partial\Omega_+ \setminus \bar{\Sigma}$. Montrer, sans détailler l'application du théorème de Lax-Milgram, que le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega_+) \text{ tel que} \\ -\sigma_+ \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega_+ \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_+ \setminus \bar{\Sigma} \\ u = g \quad \text{sur } \Sigma \end{array} \right.$$

possède une unique solution notée v_+ .

Question 5. À partir du v_+ introduit à la question précédente, définissons sur Ω_- la fonction v_- telle que $v_-(x, y) = v_+(-x, y)$. Expliquer pourquoi lorsque $\kappa_\sigma = -1$ le couple (v_+, v_-) constitue une solution du problème de transmission

$$(\mathcal{P}_{\text{tr}}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_+, u_-) \in H^1(\Omega_+) \times H^1(\Omega_-) \text{ tel que} \\ -\sigma_+ \Delta u_+ = 0 \quad \text{dans } \Omega_+ \\ -\sigma_- \Delta u_- = 0 \quad \text{dans } \Omega_- \\ u_+ - u_- = 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ \sigma_+ \partial_x u_+ - \sigma_- \partial_x u_- = 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ u_+ = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_+ \\ u_- = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_- \end{array} \right.$$

Question 6. Établir que si le couple (u_+, u_-) vérifie le problème $(\mathcal{P}_{\text{tr}})$ alors la fonction u , telle que $u = u_+$ dans Ω_+ et $u = u_-$ dans Ω_- , est solution du problème (FV) avec $\ell(\cdot) \equiv 0$. On montrera en particulier que u est bien dans $H^1(\Omega)$. En déduire que pour la géométrie considérée, avec un contraste $\kappa_\sigma = -1$, le problème (FV) n'est pas bien posé.

3 Obtention de critères assurant que (FV) est bien posé

Dans cette section, nous proposons une méthode permettant d'obtenir un critère portant sur la géométrie et le contraste assurant que le problème (FV) est bien posé. Dans la suite, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 1. Soient X, Y deux espaces de Banach et $L : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire continu. Nous dirons que L est un isomorphisme si L est bijectif et d'inverse continu.

Le théorème de Banach permet de montrer que si L est bijectif alors il est nécessairement d'inverse continu et c'est donc un isomorphisme.

Question 7. Supposons qu'il existe un isomorphisme $T : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ tel que la forme

$$(u, v) \mapsto a_T(u, v) := a(u, Tv)$$

soit coercive sur $H_0^1(\Omega)$. Montrer qu'alors le problème (FV) est bien posé. Indice : on choisira bien les fonctions test dans (FV) ...

Question 8. Dans cette approche, nous souhaitons utiliser l'opérateur T pour compenser le changement de signe de σ . Nous serions ainsi très heureux de pouvoir prendre T tel que $Tu = u$ dans Ω_+ et $Tu = -u$ dans Ω_- . En effet, nous pourrions alors écrire, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$a_T(u, u) = \int_{\Omega} |\sigma| |\nabla u|^2 dx \geq \min(\sigma_+, |\sigma_-|) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Ce choix n'est cependant pas satisfaisant. Expliquer pourquoi.

Jusqu'à la fin de cette section, nous considérons la configuration symétrique introduite en Section 2.

Question 9. Introduisons l'application R telle que $(R\varphi)(x, y) = \varphi(-x, y)$ pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Définissons l'opérateur T tel que

$$T\varphi = \begin{cases} \varphi & \text{dans } \Omega_+ \\ -\varphi + 2R\varphi & \text{dans } \Omega_- \end{cases} \quad (1)$$

Démontrer que T constitue un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$.

Question 10. Prouver que le problème (FV) est bien posé lorsque le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_-/\sigma_+$ vérifie $-1 < \kappa_\sigma < 0$. Pour cela, on pourra utiliser l'inégalité de Young $2ab \leq \eta a^2 + \eta^{-1}b^2$, $\forall a, b \geq 0$, $\forall \eta > 0$ en choisissant un bon η ...

Question 11. Montrer, en modifiant la définition de l'isomorphisme T introduite en (1) que (FV) est également bien posé lorsque le contraste $\kappa_\sigma = \sigma_-/\sigma_+$ vérifie $\kappa_\sigma < -1$.

Ainsi pour la configuration symétrique, seul le cas du contraste égal à -1 pose problème. Plus précisément, nous venons de montrer le résultat suivant.

Théorème 1. *Pour la configuration symétrique telle que décrite en début de Section 2, le problème (FV) est bien posé si et seulement si le contraste $\kappa_\sigma < 0$ vérifie $\kappa_\sigma \neq -1$.*

Les trois sections suivantes sont indépendantes les unes des autres. Vous pouvez donc les aborder dans l'ordre que vous souhaitez.

4 Approximation numérique

Nous souhaitons calculer une approximation de la solution du problème (FV) lorsque celui-ci est bien posé. Pour cela, nous allons utiliser une méthode d'éléments finis. Pour simplifier, supposons Ω à bord polygonal et symétrique par rapport à l'axe (Oy) comme en Section 2. Introduisons \mathcal{T}_h une partition (un maillage) de $\bar{\Omega}$ par des triangles. Nous imposons que les triangles $T_h \in \mathcal{T}_h$ vérifient $T_h \in \bar{\Omega}_+$ ou $T_h \in \bar{\Omega}_-$ (nous interdisons les triangles à cheval sur l'interface Σ). Ici h fait référence au pas du maillage. Définissons l'espace

$$X_h := \{\varphi_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \mid \varphi_h|_{T_h} \in \mathbb{P}_1(T_h), \forall T_h \in \mathcal{T}_h, \text{ et } \varphi_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Ci-dessus, $\mathbb{P}_1(T_h)$ désigne l'espace des fonctions affines sur le triangle T_h . Considérons le nouveau problème, posé en dimension finie,

$$(FV_h) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in X_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in X_h \end{cases}$$

où les formes $a(\cdot, \cdot)$ et $\ell(\cdot)$ ont été définies après (FV).

Question 12. En adaptant ce qui a été fait à la question 7, donner une condition sur le contraste $\kappa_\sigma < 0$ et sur le maillage \mathcal{T}_h garantissant que le problème (FV_h) possède une unique solution u_h . Montrer alors l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{H_0^1(\Omega)},$$

où C est une constante indépendante de h et où u est la solution de (FV).

Sans hypothèse sur le maillage, même lorsque (FV) est bien posé, on ne sait pas dire que (FV_h) admet une unique solution pour h suffisamment petit. Dans la suite, nous étudions une autre méthode pour approcher la solution du problème (FV) lorsque ce dernier est bien posé.

Pour $\delta > 0$, définissons $\sigma^\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\sigma^\delta = \sigma + i\delta$ où σ est la fonction introduite au début du sujet. Considérons le problème

$$(FV^\delta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\delta \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a^\delta(u^\delta, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right.$$

où $a^\delta(u^\delta, v) = \int_{\Omega} (\sigma + i\delta) \nabla u^\delta \cdot \nabla \bar{v} \, dx$ et $L(v) = \int_{\Omega} f \bar{v} \, dx$. Précisons que jusqu'à la fin de la section, les fonctions sont à valeurs complexes et que \bar{v} désigne comme habituellement le conjugué de v . On rappelle le résultat suivant :

Théorème 2 (de Lax-Milgram complexe).

- Soit X un espace de Hilbert de fonctions à valeurs complexes.
- Soit $l(\cdot)$ une forme antilinéaire, i.e. telle que $l(\lambda u + u') = \bar{\lambda} l(u) + l(u')$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall u, u' \in X$, continue sur X .
- Soit $b(\cdot, \cdot)$ une forme sesquilinéaire, i.e. telle que $b(\lambda u + u', \gamma v + v') = \lambda \bar{\gamma} b(u, v) + \lambda b(u, v') + \bar{\gamma} b(u', v) + b(u', v')$, $\forall \lambda, \gamma \in \mathbb{C}, \forall u, u', v, v' \in X$, continue sur $X \times X$. Supposons $\Re(e^{i\theta} b(\cdot, \cdot))$ coercive sur X pour un $\theta \in]-\pi; \pi]$. Autrement dit, supposons qu'il existe $\theta \in]-\pi; \pi]$, $\beta > 0$ tels que

$$\Re(e^{i\theta} b(u, u)) \geq \beta \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Alors il existe un unique $u \in X$ vérifiant $b(u, v) = l(v)$ pour tout $v \in X$.

Question 13. Justifier brièvement pourquoi (FV^δ) admet une unique solution u^δ pour tout $\delta > 0$ et tout $\kappa_\sigma < 0$.

Question 14. Supposons $\kappa_\sigma < 0$ avec $\kappa_\sigma \neq -1$. En utilisant les opérateurs T introduits dans les questions 10 et 11, prouver qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle qu'on ait

$$\|u - u^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1 \delta \|u^\delta\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \delta > 0.$$

En déduire l'existence de constantes $C > 0$, $\delta_0 > 0$ telles qu'on ait

$$\|u - u^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \delta \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \delta \in]0; \delta_0].$$

Considérons le problème

$$(FV_h^\delta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h^\delta \in X_h \text{ tel que} \\ a^\delta(u_h^\delta, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in X_h. \end{array} \right.$$

Question 15. Supposons $\kappa_\sigma < 0$ avec $\kappa_\sigma \neq -1$. Après avoir justifié pourquoi u_h^δ est bien définie pour $\delta > 0$, montrer l'estimation

$$\|u - u_h^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1 \delta \|f\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C_2}{\delta} \inf_{v_h \in X_h} \|u^\delta - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (2)$$

où $C_1, C_2 > 0$ sont des constantes indépendantes de δ, h .

En travaillant un peu plus, on peut montrer que $u^\delta \in H^2(\Omega \setminus \Sigma)$ avec l'estimation

$$\|u^\delta\|_{H^2(\Omega \setminus \Sigma)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où C est indépendante de δ .

Question 16. Qu'en déduit-on pour $\inf_{v_h \in X_h} \|u^\delta - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}$? Comment choisir δ en fonction de h de façon à avoir la meilleure estimation d'erreur dans (2)?

5 Autre condition aux limites

Dans l'étude des équations de Maxwell, on est amené également à travailler sur le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_{\Sigma}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_{\Sigma}^1(\Omega), \end{array} \right. \quad (3)$$

où $H_{\Sigma}^1(\Omega) := \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Sigma} \varphi \, ds = 0\}$ et $f \in L^2(\Omega)$ satisfait $\int_{\Omega} f \, dx = 0$. On rappelle que $\Sigma = \partial\Omega_+ \cap \partial\Omega_-$ désigne l'interface entre les deux matériaux.

Question 17. Supposons u solution de (3) telle que $\operatorname{div}(\sigma \nabla u) \in L^2(\Omega)$. Donner le problème fort satisfait par u . Justifier. On acceptera que si $\vec{w} \in (L^2(\Omega))^2$ tel que $\operatorname{div} \vec{w} \in L^2(\Omega)$ vérifie

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div} \vec{w} \, dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \vec{w} \, dx = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

alors on a $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Question 18. Montrer que $H_{\Sigma}^1(\Omega)$ muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Question 19. Établir, en raisonnant par l'absurde, l'existence d'une constante $C_{\Sigma} > 0$, telle que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Sigma} \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^2}, \quad \forall v \in H_{\Sigma}^1(\Omega).$$

Question 20. Considérons la configuration symétrique comme introduite en Section 2. Discuter le caractère bien posé du problème (3) en fonction de $\kappa_{\sigma} < 0$.

6 Un problème de bilaplacien

Dans d'autres domaines de la physique non directement liés à l'électromagnétisme, on peut être amené à considérer le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \sigma \Delta u \Delta v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (4)$$

De nouveau f désigne un terme source de $L^2(\Omega)$ à valeur réelles. Nous supposons que Ω est régulier (de classe \mathcal{C}^2) ou convexe, ce qui permet de montrer que l'opérateur $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ définit un isomorphisme. Dans ce cas de figure, il existe une constante $C > 0$ telle qu'on ait

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Question 21. Montrer que $(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H^2(\Omega)})$ est un espace de Hilbert. Établir que (4) admet une unique solution u quand $\kappa_{\sigma} > 0$.

Question 22. Pour $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, notons Tu l'élément de $H_0^1(\Omega)$ satisfaisant $\Delta(Tu) = \sigma^{-1} \Delta u$ dans Ω . Ceci définit un opérateur T . En travaillant avec ce T , prouver que le problème (4) admet une unique solution pour tout $\kappa_{\sigma} < 0$.