

# Des singularités topologiques à leur évolution par flots géométriques

Fabrice Bethuel

Laboratoire Jacques-Louis Lions,  
Université Pierre et Marie Curie – Paris 6

Rencontres EDP-PROBAS, IHP 17 mars 2011

# Préambule

Les connections entre **équations aux dérivées partielles (EDP)** et **géométrie (différentielle, riemannienne, symplectique)** sont **anciennes** et **profondes** :

- ▶ les objets fondamentaux de la géométrie s'exprime **en coordonnées par des opérateurs de dérivation**.
- ▶ Un grand nombre d'entre eux entre dans le **champ du calcul des variations**.

La description des problèmes est souvent soumise à des **pressions antagonistes** :

- ▶ Un besoin de développer un langage indépendant de toute **référence à un système de coordonnées**.
- ▶ Le besoin d'effectuer des calculs **dans un système de coordonnées**.
- ▶ Un choix très large de **systèmes de coordonnées**.

## Morale

↪ Un choix de coordonnées privilégiées s'impose souvent... mais parfois on arrive à résoudre le problème plus directement, sans faire appel à des coordonnées !

Tout d'abord, je vais essayer de développer ces approches sur deux exemples concrets, à la fois classiques et historiques.

- ▶ le problème isopérimétrique dans le plan
- ▶ le problème de Plateau

Ensuite dans un deuxième temps, j'essayerai de montrer comment les concepts développés apparaissent comme des outils naturels et importants pour traiter des EDP, qui au départ, ne semblent pas liés à la géométrie (ou peu) [problèmes de transition de phase].

# Plan de l'exposé

## Partie I : problèmes classiques

- ▶ Le **problème isopérimétrique** dans le **plan** :
  - graphes
  - symétrisation de Steiner.
- ▶ surfaces minimales et courbure moyenne
- ▶ Le **problème de Plateau** :
  - graphes
  - solution par paramétrisation
  - méthodes de **théorie de la mesure géométrique**
- ▶ Mouvement par courbure moyenne

## Partie II : singularités et leur mouvements dan des EDP

- ▶ Singularités topologiques
- ▶ mouvement lents
- ▶ mouvement par courbure moyenne

## Partie III perspectives

# Deux problèmes historiques

## I. Le problème isopérimétrique dans le plan

Il peut s'énoncer comme suit : soit  $l$  un nombre donné. On considère toutes les courbes  $\Gamma$  du plan  $(Oxy)$  joignant le point  $0 = (0, 0)$  au point  $A = (1, 0)$  dont l'aire, comprise entre l'axe  $Ox$  et le graphe est prescrite et égale à  $l$ .

**Problème** : Trouver la courbe d'aire fixée dont la longueur est minimale.

Pour paramétrer les courbes, on peut tout d'abord se limiter aux courbes  $\Gamma$  qui sont des graphes, au dessus de l'axe  $Ox$ . Elle peuvent s'écrire sous la forme

$$\Gamma = \{(x, v(x)), x \in [0, 1]\}$$

L'inconnue est donc maintenant une fonction  $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . L'aire s'écrit sous la forme

$$A(v) = \int_0^1 v(x) dx$$

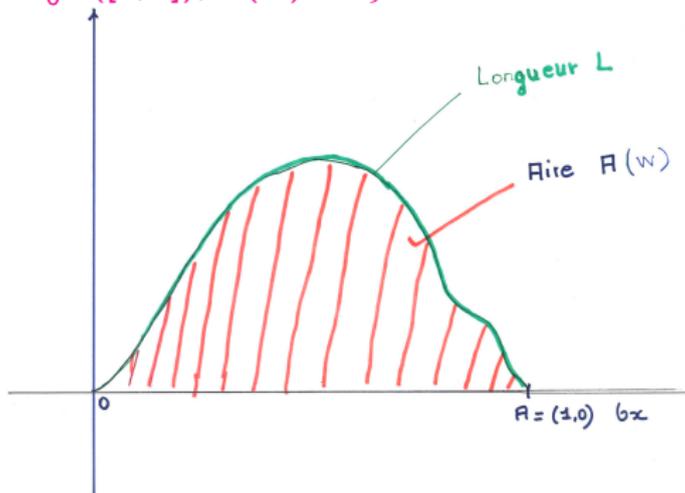
alors que la longueur s'écrit sous la forme

$$L(v) = \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{v}(x)^2} dx$$

Il faut donc résoudre le problème : trouver  $u \in W$  tel que

$$L(u) = \inf\{L(v), v \in W\}$$

où  $W = \{v \in W_0^{1,1}([0,1]), A(w) = I\}$ .



$$L(v) = \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{v}(x)^2} dx, \quad A(v) = \int_0^1 v(x) dx$$

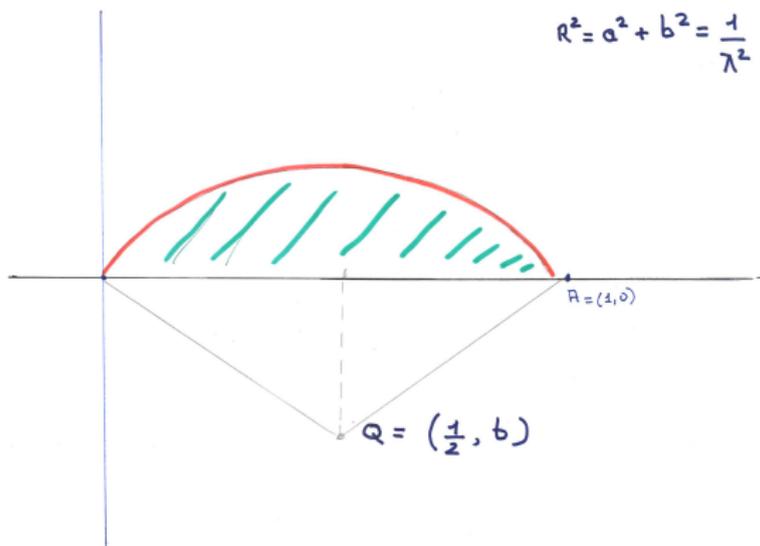
L'équation d'Euler-Lagrange associée est alors

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( \frac{\dot{u}}{\sqrt{1 + \dot{u}^2}} \right) = \lambda \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où  $\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $A = I$ . On vérifie (par convexité) que si une solution existe, elle est unique. L'équation d'Euler-Lagrange s'intègre explicitement pour donner la relation, pour deux constantes  $a, b$

$$(v - b)^2 + (x - a)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

La courbe est donc un arc de cercle de rayon  $R = \frac{1}{\lambda}$ , si  $\lambda \leq \frac{1}{2}$ .



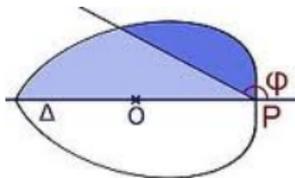
**Remarque** Dans d'autres problèmes classiques (geodésiques, etc..) à une dimension, on utilise des paramétrages à vitesse constante. Ceux-ci sont en fait souvent directement donnés par la **formulation variationnelle** choisie.

# la méthode de symétrisation de Steiner

A l'opposé des méthodes **analytiques précédentes**, 19<sup>ème</sup> siècle, **Jakob Steiner** s'est attaqué au problème classique de l'isopérimétrie par des méthodes géométriques très suggestives et instructives et qui ont conduit à de nombreux développements ultérieurs.

Cependant, sa méthode suppose **connue l'existence d'une solution**.

- ▶ Il est donc nécessaire de développer des techniques de type "analyse fonctionnelle" en particulier des **notions de compacité** pour des objets **purement géométriques**. C'est l'un des buts poursuivis par la **théorie de la mesure géométrique**.



# Surfaces minimales

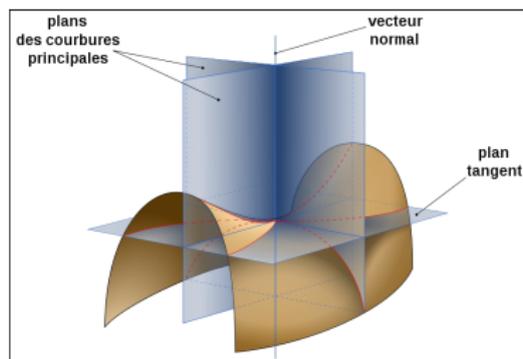
Considérons de manière générale une sous-variété  $\Sigma$  de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^N$ .

**Definition.** Nous dirons que  $\Sigma$  est une sous-variété minimale, si, localement elle minimise le  $k$ -volume.

Il en résulte que les sous-variété de dimension 1 sont des droites, mais pour la dimension  $k = 2$ , on sait construire une large classe de surface minimales dans  $\mathbb{R}^3$  (construction de Weierstrass).

La notion précédente est directement liée à celle de courbure moyenne.

**Proposition** Une sous-variété est minimale si et seulement si sa courbure moyenne est nulle.



# La courbure moyenne

Le **vecteur courbure-moyenne** en un point  $x$  de  $\Sigma$  correspond au vecteur de l'espace orthogonal  $(T_x \Sigma^0)^\perp$  donné par

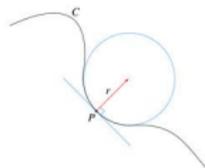
$$\vec{H}_\Sigma(x) = - \sum_{\alpha=1}^{N-k} \left( \sum_{j=1}^k (\tau_j \cdot \frac{\partial \nu^\alpha}{\partial \tau_j}) \nu^\alpha \right) = - \sum_{\alpha=1}^{N-k} (\operatorname{div}_{T_x \Sigma} \nu^\alpha) \nu^\alpha,$$

où  $(\tau_1, \dots, \tau_k)$  désigne un repère orthogonal mobile sur  $T_x \Sigma$ ,  $(\nu^1, \dots, \nu^{N-k})$  sur  $(T_x \Sigma)^\perp$ . La **formulation intégrale** s'écrit

$$\int_\Sigma \operatorname{div}_{T_x \Sigma} \vec{X} \, d\mathcal{H}^k = - \int_\Sigma \vec{H}_\Sigma \cdot \vec{X} \, d\mathcal{H}^k,$$

pour tout  $\vec{X} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ .

**Remarque** En dimension 1 on retrouve la notion usuelle de **vecteur courbure** à une courbe.

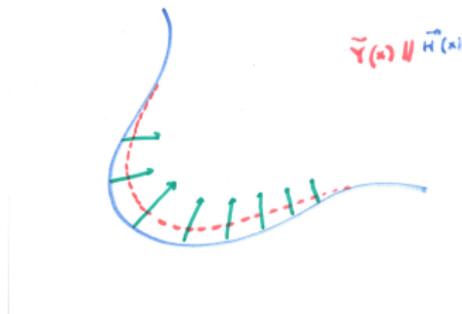


Pour faire le lien avec les surfaces minimales, on considère une famille de déformations  $\{\gamma_t\}_{t \in I}$  de plongement de  $\Sigma$  dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $I$  un intervalle contenant 0. On pose  $\Sigma^t = \gamma_t(\Sigma)$ .

Si  $\chi$  est à support compact dans  $\mathbb{R}^N$ , un calcul donne

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma^t} \chi(x) d\mathcal{H}^k = \int_{\Sigma^t} \left( -\chi(x) \vec{H}_{\Sigma^t}(x) + P(\nabla \chi(x)) \right) \cdot \vec{Y}(x) d\mathcal{H}^k,$$

où  $\vec{Y}(x) = \frac{d}{ds} \gamma_s(\gamma_t^{-1}(x))$  is la vitesse au point  $x$ , et  $P$  désigne la projection orthogonale sur  $(T_x \Sigma^t)^\perp$ .



# Le problème de Plateau

On se donne une courbe  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}^3$  et on cherche, parmi toutes les surfaces qui bordent  $\gamma$  s'il en existe une  $\Sigma$  de **surface minimale**.



**Une image physique** : un **fil** que l'on trempe dans une **eau savonneuse**. Lorsque  $\gamma$  est un **graphe**, on peut chercher la solution sous forme de **graphe**. Dans le cas général, voyons deux approches <sup>1</sup>.

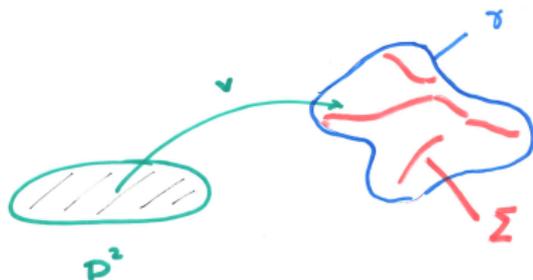
---

<sup>1</sup>il existe bien d'autres approches (fonctions BV, etc ..) que je n'évoquerai pas

# l'approche paramétrique au problème de plateau

Une idée naturelle est d'introduire un paramétrage  $v : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tel que  $v|_{\partial D^2}$  soit un paramétrage du bord imposé  $\gamma$  des surfaces recherchées.

**Inconvenient** : Une même surface donnée possède trop de paramétrage ! en effet  $w = v \circ \phi$  est un autre paramétrage, pour  $\phi$  difféomorphisme de  $D^2$ .



**Idée (Douglas et Rado)** : se limiter à des paramétrages conformes, c'est à dire qui vérifient la condition supplémentaire :

$$(Conforme) \quad |v_x|^2 = |v_y|^2 \text{ et } v_x \cdot v_y = 0.$$

Notons qu'alors  $w = u \circ \phi$  est conforme ssi  $\Phi$  est un difféomorphisme conforme de  $D^2 \rightarrow D^2$  donc holomorphe ou anti-holomorphe  $\rightsquigarrow$  un groupe à trois paramètres d'invariance.

Pour un paramétrage conforme, la courbure moyenne s'écrit alors

$$H(v(x)) = \frac{\Delta v(x) \cdot \vec{n}(x)}{|v_x|^2},$$

et le problème de surface minimale revient donc à trouver  $u : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(Plateau) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans } D^2 \\ |u_x|^2 = |u_y|^2 \text{ et } u_x \cdot u_y = 0 \\ u \text{ est un paramétrage monotone de } \gamma. \end{cases}$$

## Approche variationnelle

Introduisons l'espace

$$W = \{v \in H^1(D^2, \mathbb{R}^3), v|_{\partial D^2} \text{ est une paramétrisation continue de } \gamma\}$$

et l'énergie de Dirichlet traditionnelle

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{D^2} |\nabla u|^2$$

Notons que  $E(u) = A(u)$  pour une application conforme. On montre alors :

**Si  $u \in W$  minimise  $E$  sur  $W$  alors  $u$  est une solution du problème de Plateau.**

La partie la plus surprenante de cette assertion étant que la conformalité de  $u$  est une partie de l'équation d'Euler-Lagrange. Le problème est donc maintenant un problème plus classique de minimisation de fonctions.

## Compacité

Il résulte de l'invariance conforme que  $W$  n'est pas fermé pour la convergence faible, on ne peut donc pas conclure directement . Pour éliminer l'invariance conforme, on remplace  $W$  par

$$W^* = \left\{ v \in W, v\left(\exp \frac{2ik\pi}{3}\right) = g\left(\exp \frac{2ik\pi}{3}\right), k = 1, 2, 3 \right\}$$

où  $g$  est un paramétrage monotone fixé.  
On arrive alors au résultat souhaité.

## Critique de la méthode paramétrique

### Avantages

- ▶ simplicité conceptuelle
- ▶ Régularité immédiate, obtenue par régularité elliptique.
- ▶ permet d'utiliser des méthodes de type min-max pour des problèmes similaires (e. g. courbure moyenne prescrite).

### Inconvénients

- ▶ méthode deux-dimensionnelle
- ▶ certaines solutions ne sont pas accessibles : la paramétrisation fixe la topologie.

# Approche par GMT

Pour remédier aux inconvénients mentionnés, une **approche plus directe** est proposée par la théorie de la mesure géométrique (**GMT**) . Elle introduit des **notions faibles de sous-variétés**, avec des **topologies adéquates** et des propriétés de **compacités**.

**Ensembles rectifiables.** C'est probablement la **notion centrale** : Un ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^N$  est dit  **$m$ -rectifiable** s'il existe une famille dénombrable  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^m$  vers  $\mathbb{R}^N$  telles que

$$\mathcal{H}^m \left( E - \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^m) \right) = 0,$$

où  $\mathcal{H}^m$  désigne la **mesure de Hausdorff de dimension  $m$** .  
On peut alors définir un **espace tangent** pour  $\mathcal{H}^m$  presque tout point de  $E$ .

**Courants.** Cette notion, inspirée de la **théorie des distributions** correspond aux **formes linéaires continues sur l'ensembles des formes différentielles de degré  $m$** . On peut identifier une **sous-variété de dimension  $m$**  à un courant par **intégration** des  $m$ -formes différentielles. Par dualité, chaque courant à un **bord (Stokes)**.

**Courants rectifiables entiers** Ils sont portés par un ensemble rectifiable, ont une densité entière  $\theta$ , dont l'intégrale (masse) est bornée.

**Courants intégraux** Courant rectifiable entiers dont le **bord** est également rectifiable entier.

Le **théorème fondamental** de **Federer et Fleming** affirme que, pour une **topologie adéquate**, l'ensemble des **courants intégraux** dont la **masse** ainsi que celle du **bord** sont bornées par une constante forment des **ensembles compacts**.

~> **solution directe au problème de plateau !**

## Critique de la méthode GMT

### Avantages

- ▶ résultat direct par compacité
- ▶ Valable en toutes dimensions
- ▶ Beaucoup de solutions accessibles.

### Inconvénients

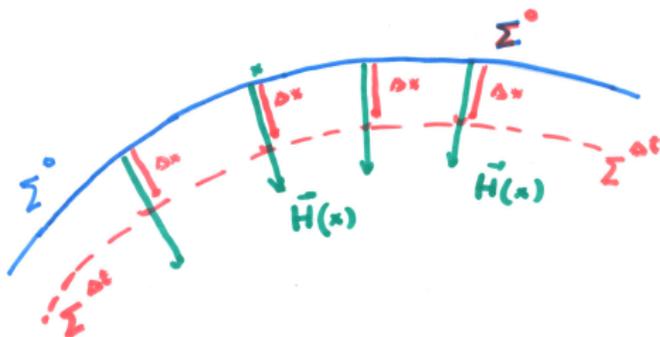
- ▶ Nécessite une conceptualisation assez ardue.
- ▶ Ne fournit pas la régularité
- ▶ Ne permet pas d'utiliser directement des méthodes de type min-max pour des problèmes similaires

# Le mouvement par courbure moyenne

Il consiste à faire évoluer **des sous-variétés** dans la direction du **vecteur courbure moyenne**.

De manière plus précise, soit une famille de plongement  $\{\gamma_t\}_{t \in I}$  d'une variété de référence  $\Sigma$  in  $\mathbb{R}^N$ ,  $\Sigma^t = \gamma_t(\Sigma)$ . la famille  $(\Sigma^t)_{t \in I}$  se déplace par **courbure moyenne (MCM)** ssi

$$\frac{d}{dt}\gamma_t(m) = \vec{H}_{\Sigma^t}(\gamma_t(m)), \quad \text{for all } m \in \Sigma \text{ et } t \in I.$$



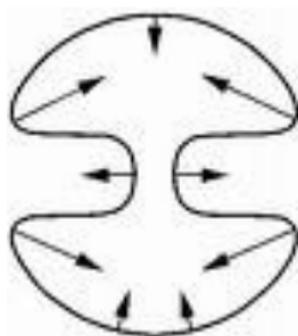
## Premières propriétés

Le mouvement par courbure moyenne (MCM) a un caractère parabolique, car il peut se formuler comme

$$\frac{d}{dt}\gamma_t = \Delta_{g(t)}\gamma$$

où  $g(t)$  est une métrique "pull-back" sur la variété de référence.

- ▶ existence locale (Huisken, Ecker, ...)
- ▶ propriétés régularisantes (locales)

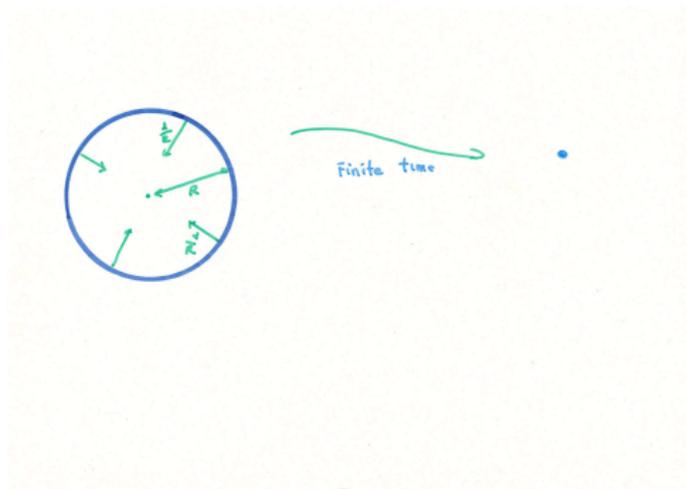


## Singularités

Des **singularités** apparaissent en général en **temps fini**.

**Exemple** :  $N = 2$ , et au temps initial  $\Sigma_0 = S^1$ , . alors  $\Sigma_t = S^1_{R(t)}$ ,  
 $\forall t > 0$ , avec  $R(t)$  vérifiant

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{1}{R} \implies R(t) = \sqrt{1 - 2t}.$$



**Principe de comparaison**  $\implies$  toutes les solutions présentent des singularités en temps fini.

## Le MCM est un flot gradient

Il peut être interprété comme le **flot gradient** pour la fonctionnelle **"Aire"** En effet

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}^k(\Sigma^t) = - \int_{\Sigma^t} |\vec{H}_{\Sigma^t}(x)|^2 d\mathcal{H}^k,$$

donc, il diminue l'aire, et de manière plus générale

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma^t} \chi(x) d\mathcal{H}^k = - \int_{\Sigma^t} \chi(x) |\vec{H}_{\Sigma^t}(x)|^2 d\mathcal{H}^k + \int_{\Sigma^t} \nabla \chi(x) \cdot \vec{H}_{\Sigma^t}(x) d\mathcal{H}^k,$$

for toute fonction **régulière à support compact**.  $\chi$  de  $\mathbb{R}^N$ . La dernière équation est d'ailleurs **une formulation équivalente** à l'équation de départ.

# La formulation faible de Brakke

Afin de pouvoir traiter des **données initiales moins régulières**, et surtout de pouvoir donner un sens aux solutions après l'apparition de singularités, **Kenneth Brakke** a proposé de relaxer l'égalité précédente et de considérer des sous-solutions

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma^t} \chi(x) d\mathcal{H}^k \leq - \int_{\Sigma^t} \chi(x) |\vec{H}_{\Sigma^t}(x)|^2 d\mathcal{H}^k + \int_{\Sigma^t} \nabla \chi(x) \cdot \vec{H}_{\Sigma^t}(x) d\mathcal{H}^k,$$

pour tout  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  positif. Tout naturellement, les **concepts de la GMT** fournissent un **cadre tout trouvé** pour une telle approche.

## MCM au sens de Brakke (suite)

Le concept **central** est celui de **mesure k-rectifiable** : une mesure  $\nu$  sur  $\mathbb{R}^N$  est dite k-rectifiable si il existe un ensemble k-rectifiable  $s\Sigma$ , et une fonction densité  $\Theta \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{H}^k \llcorner \Sigma)$  telle que

$$\nu = \Theta(\cdot) \mathcal{H}^k \llcorner \Sigma.$$

La variation première de  $\nu$  au sens des distributions

$$\delta\nu(\vec{X}) = \int_{\Sigma} \text{div}_{T_x\Sigma} \vec{X} d\nu \quad \text{for all } \vec{X} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N).$$

permet alors, dans le cas où elle est absolument continue par rapport à  $\nu$  de définir la courbure moyenne (**au sens faible**)

$$\delta\nu = \vec{H}\nu.$$

Soit alors  $(\nu_t)_{t \geq 0}$  une famille de mesures de Radon sur  $\mathbb{R}^N$ . Posons

$$\bar{D}_t \nu_0^t(\chi) = \limsup_{t \rightarrow t_0} \frac{\nu^t(\chi) - \nu^{t_0}(\chi)}{t - t_0}, \text{ pour } \chi \in C_c^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+).$$

Si  $\nu^t$  est  $k$ -rectifiable et si  $\chi |\vec{H}|^2 \in L^1(\nu^t)$ , alors on pose

$$\mathcal{B}(\nu^t, \chi) = - \int \chi |\vec{H}|^2 d\nu^t + \int \nabla \chi \cdot P(\vec{H}) d\nu^t,$$

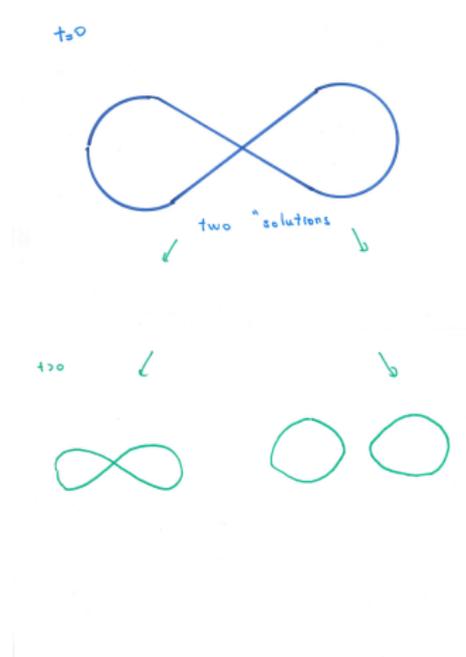
Sinon  $\mathcal{B}(\nu^t, \chi) = -\infty$ .

**Definition.** On dira que  $(\nu_t)_{t \geq 0}$  est un MCM  $k$ -dimensionnel au sens faible de Brakke ssi

$$\bar{D}_t \nu^t(\chi) \leq \mathcal{B}(\nu^t, \chi), \forall \chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+), \forall t \geq 0.$$

## Remarques.

- ▶ Si  $(\mu^t)_{t \geq 0}$  est un flot de Brakke, il en est de même pour  $(g(t)\mu^t)_{t \geq 0}$ , où  $g$  est une fonction arbitraire décroissante.
- ▶ En particulier la solution triviale donnée par  $\nu^0 = \mu^0$  and  $m\nu^t \equiv 0$  for  $t > 0$  est un flot de Brakke.
- ▶ Brakke construit une solution non triviale au problème.
- ▶ Il y a aussi des exemples de non-unicité essentielle



# MCM au sens de Ilmanen

afin d'éliminer les solutions non intéressantes, **Ilmanen** a introduit une nouvelle notion de MCM qui combine les propriétés de **sous-solutions** avec une propriété de **sur solution**. La classe de données initiale est plus réduite, la solution **triviale est exclue**.

Lorsqu'une solution régulière existe elle coïncide avec celle d'Ilmanen.

**Remarque** Notons que les concepts utilisés dans la construction d'Ilmanen se rapproche de ceux utilisés pour le problème de plateau en particulier :

- ▶ **densité entière** "minimale"
  - ▶ La notion de **bord** joue un rôle important
- ↪ idée de **minimalité** des courants ...

## Partie II : des singularités à leur mouvement par MCM

De nombreux modèles en **physique de la matière condensées** conduisent à considérer des applications à **valeurs vectorielles**, dont les valeurs sont **contraintes** à appartenir à une **sous-variété  $\mathcal{N}$** . Dans les modèles les plus simples la variété d'arrivée est une sphère de dimension  $k$

$$\mathcal{N} = S^k, \text{ with } k \in \mathbb{N}.$$

une énergie souvent utilisée pour décrire les états stationnaires est alors souvent la suivante

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2, \quad \Omega \text{ tant le domaine } (\subset \mathbb{R}^N), N \in \mathbb{N}^*$$

De sorte que l'on est conduit à étudier l'ensemble

$$H^1(\Omega, S^k) = \{u : \Omega \rightarrow S^k, E(v) < +\infty\}.$$

Le gradient étant définie aux sens des **distributions**. Au delà des singularités induites par la définition même, d'autres ont un caractère plus essentiel et sont de **nature topologique**.

# Singularités topologiques

Notre point de départ est une **observation classique**.

## Proposition (Brouwer)

Il n'existe pas de **fonction continue**  $v$  de  $\mathbb{B}^{k+1}$  vers  $\mathbb{S}^k$  telle que

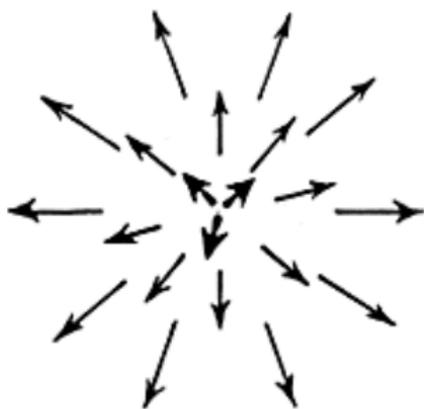
$$v|_{\mathbb{S}^k} = Id_{\mathbb{S}^k}.$$

En revanche l'application ("**herisson**" ou **hedgehog en anglais**) définie par

$$u(x) = \frac{x}{|x|} \text{ for } x \in B^{k+1}$$

vérifie bien  $v|_{\mathbb{S}^k} = Id_{\mathbb{S}^k}$ , est singulière à l'origine, et de plus

$$u \in H^1(B^{k+1}, \mathbb{S}^k), \text{ ds que } k \geq 2.$$



la singularité hérisson pour  $k = 2$

# Un modèle simplifié pour les cristaux liquides

L'orientation des **molécules de cristaux liquides** contenues dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est représentée par une application  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Les configurations stables **minimisent** l'énergie de **Dirichlet**  $E(u)$ , avec la condition au bord  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Dans certains cas

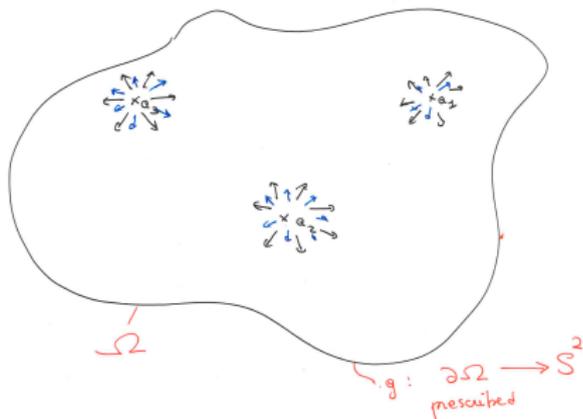
$$C_g^0(\Omega, \mathbb{S}^2) = \{v \in C^0(\Omega, \mathbb{S}^2), v = g \text{ on } \partial\Omega\} = \emptyset,$$

de sorte que les minima pour  $E$  on  $H_g^1(\Omega, \mathbb{S}^2)$  **qui n'est jamais vide doivent** avoir des **singularités**.

L'étude mathématique montre : (**Schoen-Uhlenbeck, Brezis-Coron-Lieb, 80's**)

- ▶ Les minima sont réguliers, excepté en un nombre fini de points  $a_i$
- ▶ Près des singularités  $a_i$ , comportement en "**hérisson**"

$$u(x) \underset{x \rightarrow a_i}{\sim} \pm R \frac{x - a_i}{|x - a_i|}, R \text{ a rotation.}$$



## singularités pour des cristaux liquides

### Remarques :

- ▶ Plus réaliste de remplacer  $S^2$  par  $\mathbb{R}P^2$  ( $u \sim -u$ ).
- ▶ Quelques résultats pour les modèles dynamiques (Struwe, etc..., loin d'être complet. Pas de loi dynamique pour les singularités.

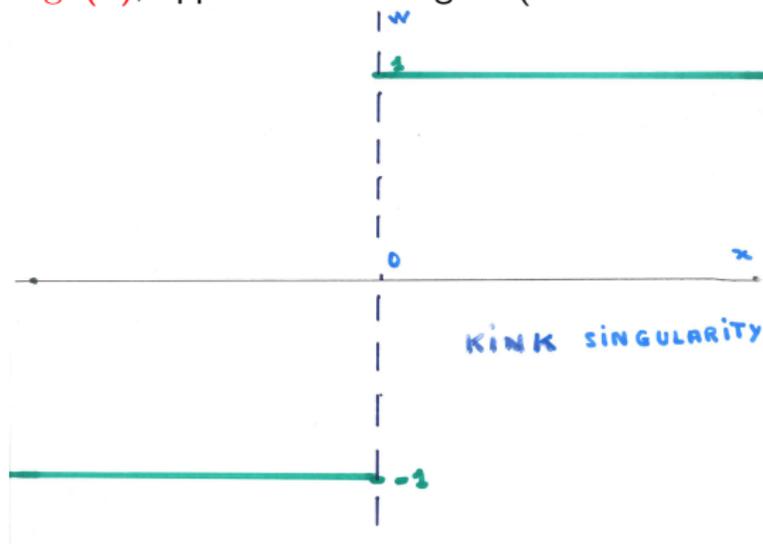
# Singularités d'énergie infinie

Pour  $k = 0$  and  $k = 1$ , on vérifie que

$$w(x) = \frac{x}{|x|} \notin H^1(B^{k+1}, \mathbb{S}^k),$$

et donc à une énergie de Dirichlet  $E$  infinie.

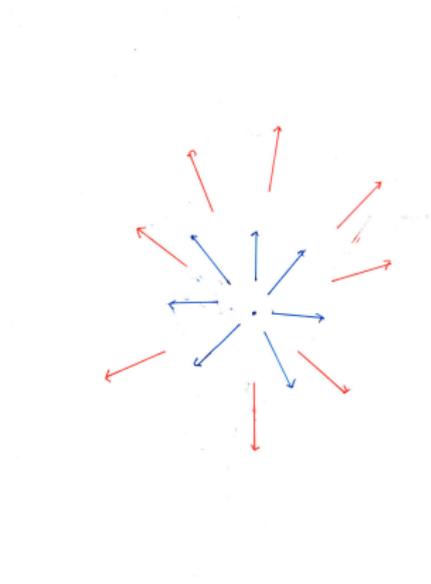
-  $k = 0$ ,  $w = \text{sgn}(x)$ , appelé **kink** en anglais ("entortillement")



- Pour  $k = 1$  la singularité

$$w(x) = \frac{x}{|x|} = \exp i\theta, \quad \text{où } (r, \theta) \text{ désigne les coordonnées polaires}$$

est appelée **tourbillon** ou **vortex**.

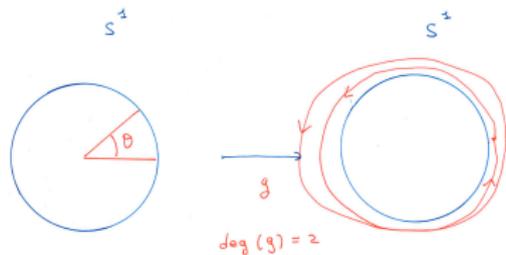


Nous nous concentrons dorénavant sur le cas  $k = 1$  des vortex.

# Les tourbillons et leur degré topologique ( $k=1$ )

**Le contexte topologique** : les applications continues du cercle  $\mathbb{S}^1$  vers  $\mathbb{S}^1$  peuvent être classifiées en fonction de leur nombre d'enlacement (ou degré) :

Si  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  continue, alors  $g = \exp if(\theta)$ ,  $f$  continue de  $[0, 2\pi]$  dans  $\mathbb{R}$  et  $f(2\pi) - f(0) = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k$  est alors le degré  $\deg(g)$ .



**Proposition.**  $C_g^0(B^2, \mathbb{S}^1)$  (resp.  $H_g^1(B^2, \mathbb{S}^1)$ ) =  $\emptyset$  ssi  $\deg(g) = 0$ .

Singularités de degré multiple (energy infinie si  $d \neq 0$ )

$$w_d(z) = \exp id\theta = \left(\frac{z}{|z|}\right)^d, \quad \deg(w_d) = d.$$

# Régularisation de Ginzburg-Landau

Afin de régulariser les singularités, on peut remplacer le fonctionnelle de Dirichlet par celle dite de Ginzburg-Landau

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u) = \int_{\Omega} e_\varepsilon(u) = \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{V(u)}{\varepsilon^2} \quad \text{for } u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}.$$

où  $\varepsilon > 0$  désigne un petit paramètre, et le potentiel  $V$  est donné par

$$V(u) = \frac{(1 - |u|^2)^2}{4},$$

de sorte que

$$\Sigma \equiv \{y \in \mathbb{R}^{k+1}, V(y) = 0\} = \mathbb{S}^1, \text{ for } k = 1.$$

Lorsque  $\varepsilon$  est petit, le potentiel oblige alors les valeurs des applications à être proches de  $\mathbb{S}^1$ .

L'énergie  $\mathcal{E}_\varepsilon$  a été introduite dans les années 50 par Ginzburg et Landau pour décrire des transitions de phase en physique de la matière condensée (basse températures, supraconductivité, superfluidité, condensation de Bose).

La nature des singularités ou défauts (e.g. points, lignes, parois) depend de manière cruciale de  $k$  et  $V$ .

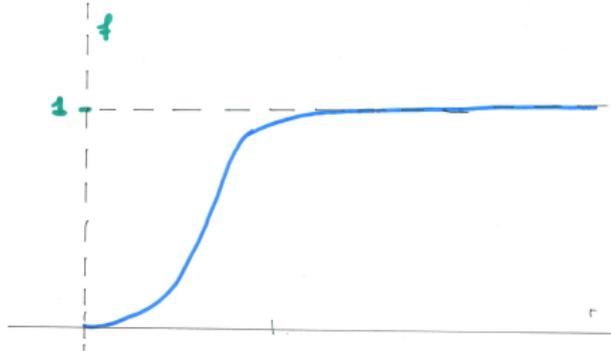
Il ya des modèles similaires développées en physique des particules, comme la théorie de Yang-Mills-Higgs ).

## tourbillons [régularisés] $N = 2$

On peut chercher à "désingulariser" le vortex  $w(r, \theta) = \exp i\theta$  en l'approchant par des solutions

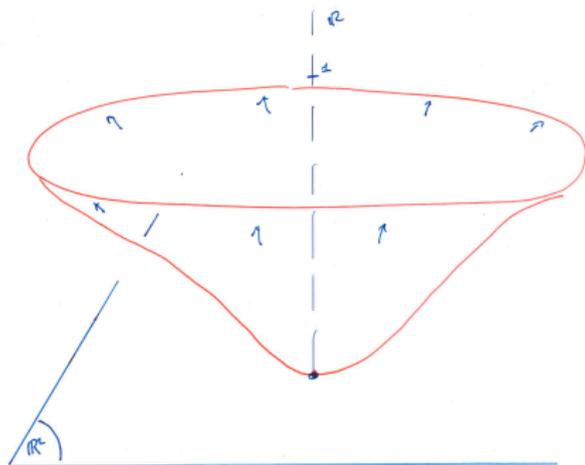
$$w_\varepsilon(r, \theta) = f_\varepsilon(r) \exp i\theta, \quad z = r \exp i\theta \in \mathbb{R}^2.$$

où la fonction  $f_\varepsilon$  prend la forme  $f_\varepsilon(r) = f\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)$  avec  $f$  telle que  $f(0) = 0$  et ayant un **graphe** du type



Comme  $|w_\varepsilon| \leq \frac{1}{r}$  pour  $r \geq \alpha\varepsilon$ , un rapide calcul montre que

$$\frac{1}{2} \int_{B(1)} |\nabla w_\varepsilon|^2 = \pi |\log \varepsilon| + C + O_\varepsilon(1).$$



## Remarques

- ▶ Il s'avère que l'estimation précédente a un caractère optimal, (B-Brézis-Hélén, Jerrard-Soner), c'est à dire on ne peut pas créer des "tourbillons" avec une énergie d'ordre inférieur : Le régime  $E(u) \leq M_0 |\log \varepsilon|$  est donc adapté pour décrire les tourbillons.

## Remarques

- ▶ Il s'avère que l'estimation précédente a un **caractère optimal**, (B-Brézis-Hélén, Jerrard-Soner), c'est à dire on ne peut pas créer des "tourbillons" avec une énergie d'ordre inférieur : Le régime  $E(u) \leq M_0 |\log \varepsilon|$  est donc adapté pour décrire les tourbillons.
- ▶ Pour des vortex de degré multiple  $d \in \mathbb{Z}$

$$w_{\varepsilon,d}(r, \theta) = f_\varepsilon(r) \exp i\theta, \quad z = r \exp i\theta \in \mathbb{R}^2.$$

on obtient

$$\frac{1}{2} \int_{B(1)} |\nabla w_{\varepsilon,d}|^2 = \pi d^2 |\log \varepsilon| + C_d + O_{\varepsilon \rightarrow 0}(1).$$

Ils sont **instables** pour  $\varepsilon > 0$ , petit. Il est **énergétiquement** favorable de les éclater en  $d$  vortex de degré  $\pm 1$ .

# Decomposition phase-tourbillon

On montre ( B-Brezis Hélein, B-Almeida, Jerrard-Soner ), que si  $v_\varepsilon$  satisfait une borne sur l'énergie de la forme

$$\mathcal{E}_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq M_0 |\log \varepsilon|,$$

alors on a

$$v_\varepsilon(\cdot) \simeq \exp(i\varphi_\varepsilon(\cdot)) \prod_{i=1}^{\ell} \left( \frac{z - a_i}{|z - a_i|} \right)^{d_i},$$

avec

$$\int |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 \leq C(M_0) |\log \varepsilon|,$$

et des bornes uniformes par rapport à  $M_0$ , indépendantes de  $\varepsilon$  pour les degrés  $d_i$  et le nombre total de tourbillons.

**Conclusion** . Ainsi **tourbillons** et **phase** sont bien définis dans le régime énergétique précédent.

# Evolution parabolique

L'étape suivante consiste à décrire la **dynamique des tourbillons** et aussi de la **phase** pour l'équation parabolique associée

$$(PGL)_\varepsilon \quad \begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - |u_\varepsilon|^2) & \text{on } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_*^+, \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_\varepsilon^0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

où la donnée initiale  $u_\varepsilon^0$  vérifie la **borne d'énergie**

$$(H_0) \quad \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon^0) = \int_{\mathbb{R}^N} e_\varepsilon(u_\varepsilon^0) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u_\varepsilon^0|^2}{2} + \frac{1}{4\varepsilon^2} (1 - |u_\varepsilon^0|^2)^2 \leq M_0 |\log \varepsilon|$$

$M_0$  fixée. Rappelons l'**identité d'énergie** pour  $0 \leq T_1 \leq T_2$

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon(\cdot, T_2)) + \int_{T_1}^{T_2} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t u_\varepsilon|^2 dx dt = \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon(\cdot, T_1)).$$

# Equation d'évolution pour la phase

Un argument heuristique simple montre que l' **évolution de la phase** est liée à l'**équation de la chaleur**. a cet effet, considérons des solutions de  $(\text{PGL})_\varepsilon$  de la forme

$$u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \exp(i\varphi_\varepsilon),$$

c'est à dire **sans tourbillons**. le système pour  $\rho_\varepsilon$  et  $\varphi_\varepsilon$  s'écrit alors

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon^2 \partial_t \varphi_\varepsilon - \operatorname{div}(\rho_\varepsilon^2 \nabla \varphi_\varepsilon) & = 0 \\ \partial_t \rho_\varepsilon^2 - \Delta \rho_\varepsilon^2 + 2|\nabla u_\varepsilon|^2 & = \frac{2\rho_\varepsilon^2(1-\rho_\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}. \end{cases}$$

La seconde équation suggère que  $\rho_\varepsilon^2 \simeq 1$ , de sorte que la première donne alors

$$\partial_t \varphi_\varepsilon - \Delta \varphi_\varepsilon \simeq 0.$$

Ce raisonnement peut se **justifier rigoureusement** ( **B-Orlandi-Smets, Jerrard-Soner, Lin,** ).

## N=2. Evolution des tourbillons

En dimension  $N = 2$ , les tourbillons qui d'après ce qui précède se concentrent sur un nombre fini de points  $\{a_i\}$  se déplacent à une échelle de temps lente ("slow motion").

Il convient alors d'accélérer le temps par un facteur  $|\log \varepsilon|$ , c'est à dire on considère l'application

$$u_\varepsilon(z, s) = u_\varepsilon(z, s|\log \varepsilon|), \quad z = x + iy \equiv (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$s = \frac{|\log \varepsilon|}{t}.$$



On montre alors que pour une sous-suite  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  on a la convergence

$$u_{\varepsilon_n}(z, s) \rightarrow u_*(z, s) = \prod_{i=1}^{\ell(s)} \left( \frac{z - a_i(s)}{|z - a_i(s)|} \right)^{d_i(s)} \exp[i(\vec{c}(s), z) + b(s)],$$

où pour  $i = 1, \dots, \ell(s)$

- ▶  $a_i(s) \in \mathbb{R}^2$
- ▶  $d_i(s) \in \mathbb{Z}$ ,  $b(s) \in [0, 2\pi)$
- ▶  $\vec{c} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une application lipschitz .

La convergence est uniforme sur les compacts de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \setminus \Sigma_0$ , où  $\Sigma_0$  désigne l'ensemble des trajectoires

$$\Sigma_0 = \cup_{s>0} \cup_{i=1}^{\ell(s)} \{(a_i(s), s)\}.$$

De plus pour une mesure  $\sigma_*$  dependant de la donnée initial

$$\vec{c}(s) = \frac{1}{4\pi s} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4s}\right) \vec{\sigma}_*(x) dx .$$

"fantome de la phase".

## Description des trajectoires

Il existe un nombre fini de temps  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_q < \tau_{q+1} = +\infty$  tels que :

- ▶ The nombre de tourbillons  $\ell(s) \equiv \ell_k$  est **constant** sur  $(\tau_k, \tau_{k+1})$ .
- ▶ Les degrés  $d_i(s) = d_i$  sont **constants** sur  $(\tau_k, \tau_{k+1})$ , et les trajectoires s'intègrent par l'équation ordinaire

$$d_i^2 \frac{da_i}{ds}(s) = -\nabla_{a_i} W(a_1, \dots, a_{\ell_k}) + d_i c(s)^\perp, \quad i = 1, \dots, \ell_k,$$

où  $W$  désigne la fonction de Kirchhoff-Onsager définie par

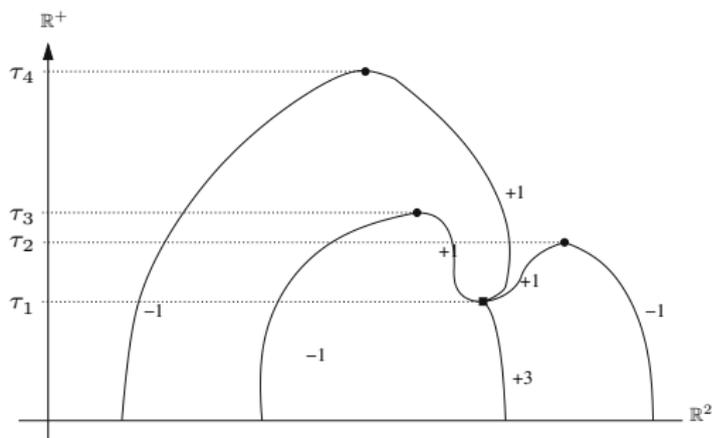
$$W(a_1, \dots, a_{\ell_k}) = -2 \sum_{i \neq j=1}^{\ell_k} d_i d_j \log |a_i - a_j|.$$

- ▶ l'énergie se concentre comme

$$\frac{1}{|\log \varepsilon_n|} e_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}) \rightarrow \pi \sum d_i^2 \delta_{a_i(s)}$$

Les temps  $\tau_1, \dots, \tau_q$  correspondent à des temps de **pertes d'énergie**.

L'étape suivante consiste à analyser les trajectoires aux temps singuliers  $\tau_k$ .



**Fig. 1.** An example of trajectory set

Exemples d'éclatements de tourbillons **de degré multiple** et **annihilations** annihilations de tourbillons de degré opposés.

## Remarques additionnelles

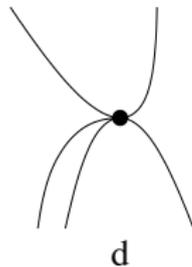
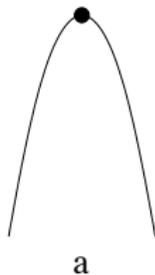
- ▶ Les tourbillons et la phase interagissent par le t term  $d_i c(s)^\perp$ .
- ▶ Si un point  $(a_i(\tau_k), \tau_k)$  est un point de branchement, laors on a les relations

$$\sum_{j=1}^{l_i^-} d_j^- = d_i(\tau_k) = \sum_{j=1}^{l_i^+} d_j^+$$

et

$$\sum_{j=1}^{l_i^-} (d_j^-)^2 \geq d_i^2(\tau_k) \geq \sum_{j=1}^{l_i^+} (d_j^+)^2$$

où la première (resp. seconde) inégalité est stricte lorsque  $l_i^- \geq 2$  (resp.  $l_i^+ \geq 2$ ).



## Evolution en dimension $N \geq 3$

Considérons de nouveau l'équation d'évolution, mais maintenant pour  $N \geq 3$

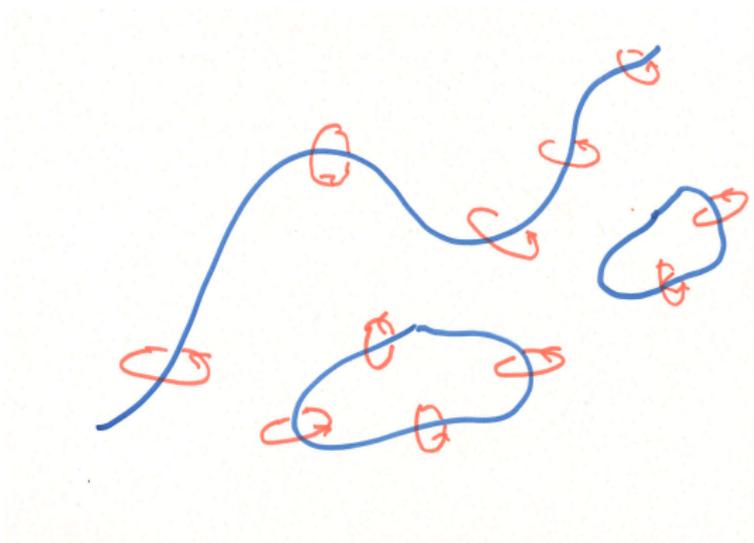
$$(PGL)_\varepsilon \quad \begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (1 - |u_\varepsilon|^2) & \text{on } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_*^+, \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_\varepsilon^0(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

en supposant que

$$(H_0) \quad \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon^0) \leq M_0 |\log \varepsilon|.$$

Pour une telle borne, la **vorticité** se concentre sur des **sous-variétés de codimension 2**, e.g. **lignes de tourbillons** en dimension **3**.

# Lignes de tourbillons



cout énergétique minimal d'une ligne de tourbillons  $= \pi |d| L |\log \varepsilon|$   
 $d$  le degré topologique,  $L$  la longueur.

Reciproquement la borne

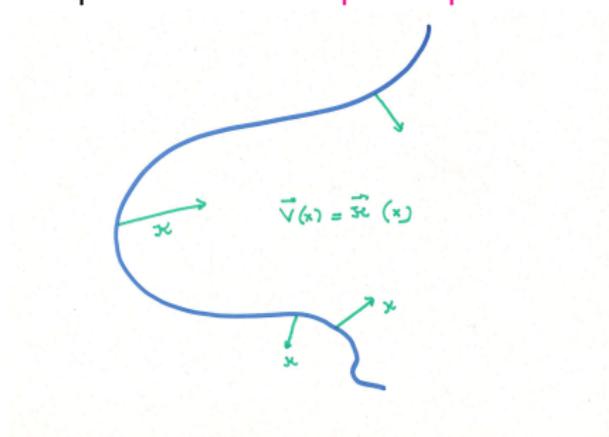
$$\mathcal{E}_\varepsilon(v) \leq M_0 |\log \varepsilon|$$

permet de définir une structure de lignes de tourbillons (Jerrard-Soner, Alberti-Baldo-Orlandi).

# Lien avec le mouvement par courbure moyenne

## Heuristique

- ▶ L'équation parabolique est le **flot gradient** pour l'énergie  $\mathcal{E}_\varepsilon$ , qu'elle a donc **envie de diminuer** le plus possible.
  - ▶ Cette dernière se concentre sur des ensembles  $\Sigma$  de **dimension  $N - 2$** .
  - ▶ Nécessité de diminuer la mesure  $\mathcal{H}^{N-2}(\Sigma)$  du support de l'énergie.
- ↪ les ensembles en questions sont **déplacés par courbure moyenne**.



## Remarque

Au vu des considérations précédentes, ce déplacement, contrairement au cas de la dimension  $N = 2$ , se passe dans l'échelle de temps de départ.



# Les outils mathématiques

L'outil principal, c'est la **mesure de Radon**  $\mu_\varepsilon$  définie sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$  par

$$\mu_\varepsilon(x, t) = \frac{e_\varepsilon(u_\varepsilon(x, t))}{|\log \varepsilon|} dx dt,$$

et les tranches temporelles correspondantes  $\mu_\varepsilon^t$  définies par

$$\mu_\varepsilon^t(x) = \frac{e_\varepsilon(u_\varepsilon(x, t))}{|\log \varepsilon|} dx,$$

de sorte que  $\mu_\varepsilon = \mu_\varepsilon^t dt$ . pour une sous-suite  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , il existe une mesure de Radon  $\mu_*$  définie sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$  telle que

$$\mu_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \mu_* \quad \text{au sens des mesures,}$$

et

$$\mu_{\varepsilon_n}^t \rightharpoonup \mu_*^t \quad \text{au sens des mesures } \mathbb{R}^N \times \{t\}, \quad \text{for all } t \geq 0.$$

## convergence vers le flot de Brakke-Ilmanen

Les résultats de (B-Orlandi-Smets, *Annals of Maths* 2006) décrivent les propriétés de la mesure  $\mu_*^t$  : ils affirment qu'il existe un sous-ensemble ferme **subset**  $\Sigma_\mu$  in  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_*^+$ , et une **fonction régulière**  $\Phi_*$  defined on  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_*^+$  tels que :

- ▶  $\mathcal{H}^{N-2}(\Sigma_\mu^t) \leq KM_0$ , for any  $t > 0$ .
- ▶ L'ensemble  $\Sigma_\mu^t$  est **(N-2)-rectifiable** et il existe une fonction strictement positive  $\eta$  sur  $\mathbb{R}_*^+$  telle que **pour p.t**  $t > 0$ ,

$$\Theta_*(x, t) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_*^t(B(x, r))}{\omega_{N-2} r^{N-2}} \geq \eta(t), \quad x \in \Sigma_\mu^t$$

- ▶ The function  $\Phi_*$  satisfies the **heat equation** on  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_*^+$ .
- ▶ For each  $t > 0$ , the measure  $\mu_*^t$  can be exactly decomposed as

$$\mu_*^t = \frac{|\nabla \Phi_*|^2}{2} \mathcal{H}^N + \Theta_*(x, t) \mathcal{H}^{N-2} \llcorner \Sigma_\mu^t,$$

where  $\Theta_*(\cdot, t)$  is a bounded function.

- ▶  $|u_{\varepsilon_n}(x, t)| \rightarrow 1$  unif. sur tout compact  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_*^+ \setminus \Sigma_\mu$ .

Au vu de la discussion précédente  $\mu_*^t$  peut être décomposée en deux parties :

- ▶ Une partie diffuse  $|\nabla\Phi_*|^2/2$ ,
- ▶ Une partie concentrée

$$\nu_*^t = \Theta_*(x, t)\mathcal{H}^{N-2} \llcorner \Sigma_\mu^t.$$

Nous avons vu que la partie diffuse est gouvernée par l'équation de la chaleur. En ce qui concerne la partie concentrée, nous avons

### Theorem

La famille  $(\nu_*^t)_{t>0}$  est déplacée par *courbure moyenne* au sens de *Brakke*.

## le lien entre $(\text{PGL})_\varepsilon$ et le MCM

Le point de départ (Ilmanen, Jerrard-Soner) est une analogie formelle entre l'identité déjà rencontrée pour le MCM

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma^t} \chi(x) d\mathcal{H}^k = - \int_{\Sigma^t} \chi(x) |\vec{H}_{\Sigma^t}(x)|^2 d\mathcal{H}^k + \int_{\Sigma^t} \nabla \chi(x) \cdot \vec{H}_{\Sigma^t}(x) d\mathcal{H}^k,$$

avec la formule d'évolution locale de l'énergie pour  $(\text{PGL})_\varepsilon$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \chi(x) d\mu_\varepsilon^t = - \int_{\mathbb{R}^N \times \{t\}} \chi(x) \frac{|\partial_t u_\varepsilon|^2}{|\log \varepsilon|}(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N \times \{t\}} \nabla \chi(x) \cdot \frac{-\partial_t u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon}{|\log \varepsilon|}(x) dx.$$

Or lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\mu_\varepsilon^t \rightarrow \mu_*^t$ . ceci suggère les convergences

$$\omega_\varepsilon^t \equiv \frac{|\partial_t u_\varepsilon|^2}{|\log \varepsilon|}(x) dx \rightarrow |\vec{H}|^2 d\mu_*^t,$$

et

$$\sigma_\varepsilon^t \equiv \frac{-\partial_t u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon}{|\log \varepsilon|}(x) dx \rightarrow \vec{H} d\mu_*^t.$$

il reste à identifier la courbure moyenne.. en utilisant sa formulation faible. Au niveau de l'équation parabolique, on utilise la formule du tenseur énergie-impulsion , à savoir  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int_{\mathbb{R}^N \times \{t\}} \left( e_\varepsilon(u_\varepsilon) \delta_{ij} - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) \frac{\partial X^i}{\partial x_j} dx &= \int_{\mathbb{R}^N \times \{t\}} \vec{X} \cdot \frac{\partial_t u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon}{|\log \varepsilon|} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N \times \{t\}} \vec{X} \cdot \sigma_\varepsilon^t. \end{aligned}$$

....

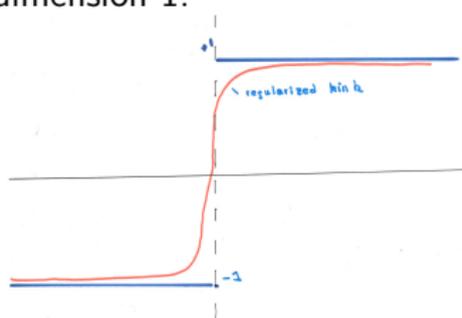
# Conclusion

Nous avons porté l'attention sur de "singularités d'énergie infinie " en nous focalisant sur les **vortex**, qui sont des points en dimension 2, mais qui servent en dimension supérieure d'élément de base pour construire des singularités de codimension 2. Il donnent lieu à

- Mouvement lent** pour la dimension critique  $N = 2$
- Mouvement par Courbure Moyenne** en dimension plus grandes  $N \geq 3$ .

Des propriétés similaires peuvent être démontré pour d'e-autres types de singularités, par exemple le **kink** :

- Mouvement (exponentiellement) lent** en dimension critique  $N = 1$
- MCM** en dimension  $N \geq 2$  (les singularités sont alors portées par des sous-ensembles de codimension 1).



Le problème lié au **kink** a d'ailleurs été étudié en premier (**Ilmanen**). Les parties "EDP" sont très différentes dans les argument, le **principe du maximum** est central dans le travail d'Ilmanen, mais les partie GMT se ressemble beaucoup.

Il serait intéressant d'étendre la théorie d'**Ilmanen** au cas multi-dimensionnel **multi-puits** :

$$\partial_t v^\varepsilon - \Delta v^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2} \nabla V(v^\varepsilon). \quad (RDG_\varepsilon)$$

où  $V$  est un **est un multi-puits**, i. e. verifie :

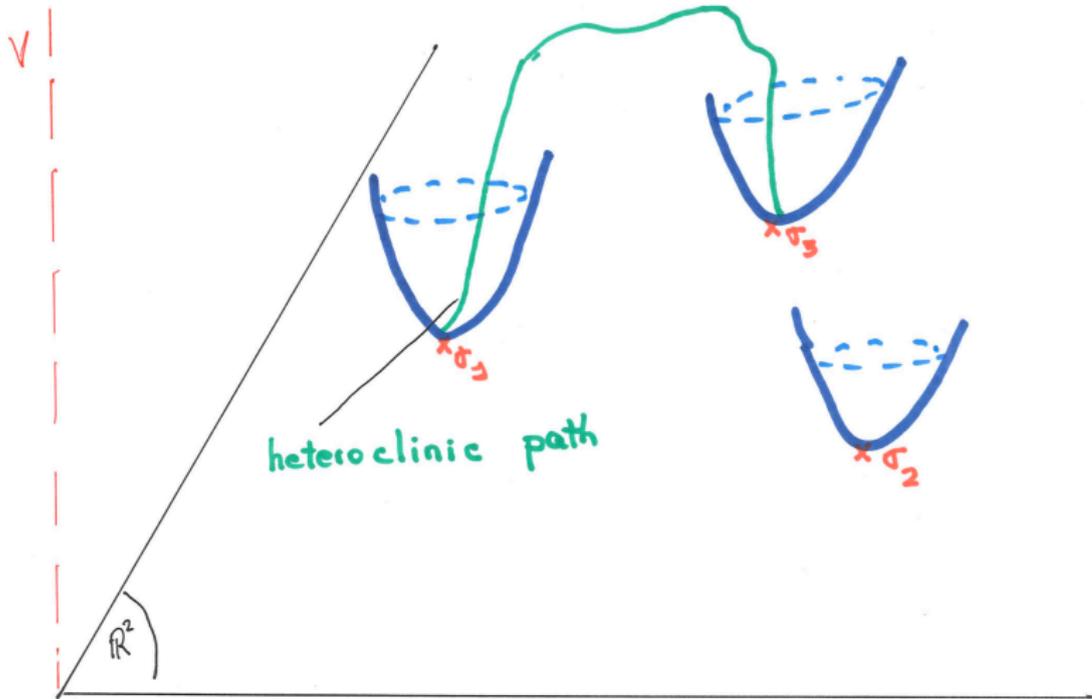
(H<sub>1</sub>)

$\inf V = 0$  et l'ensemble des minimiseurs  $\Sigma \equiv \{y \in \mathbb{R}^k, V(y) = 0\}$

est fini, de **cardinal supérieur à 2**, c'est à dire

$$\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_q\}, q \geq 2, \sigma_i \in \mathbb{R}^k, \forall i = 1, \dots, q.$$

(H<sub>2</sub>) la matrice  $\nabla^2 V(\sigma_i)$  est **définie positive** en chaque point  $\sigma_i$  de  $\Sigma$ , c'est à dire si  $\lambda_i$  représente la **plus petite valeur propre**, alors  $\lambda_i > 0$ .



**Merci pour votre attention !**

