Problèmes à fontière libre et arrêt optimal

Damien Lamberton
Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Journée *Problèmes à frontières libres*
IHP, 29 mars 2010

Plan

Plan

Plan

Plan

Arrêt optimal à temps discret

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=0,1,\ldots,N}$. L'horizon N est supposé fini. Soit $Z = (Z_n)_{n=0,1,\ldots,N}$ une suite adaptée de variables aléatoires réelles intégrables, appelée dans la suite processus de gain.

Arrêt optimal à temps discret

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=0,1,\dots,N}$. L'horizon N est supposé fini. Soit $Z = (Z_n)_{n=0,1,\dots,N}$ une suite adaptée de variables aléatoires réelles intégrables, appelée dans la suite processus de gain.
Le problème d'arrêt optimal pour Z consiste à maximiser $\mathbb{E}(Z_\nu)$ sur tous les temps d'arrêt ν. Rappelons qu'un temps d'arrêt est une variable aléatoire ν à valeurs dans l'ensemble des temps $\{0, 1, \dots, N\}$ vérifiant

$$\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n, \text{ pour } n = 0, 1, \dots, N.$$

Arrêt optimal à temps discret

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=0,1,\ldots,N}$. L'horizon N est supposé fini. Soit $Z = (Z_n)_{n=0,1,\ldots,N}$ une suite adaptée de variables aléatoires réelles intégrables, appelée dans la suite processus de gain.
Le problème d'arrêt optimal pour Z consiste à maximiser $\mathbb{E}(Z_\nu)$ sur tous les temps d'arrêt ν. Rappelons qu'un temps d'arrêt est une variable aléatoire ν à valeurs dans l'ensemble des temps $\{0, 1, \ldots, N\}$ vérifiant

$$\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n, \text{ pour } n = 0, 1, \ldots, N.$$

Le problème d'arrêt optimal peut être résolu par le principe de la programmation dynamique.

Algorithme de la programmation dynamique

On introduit la suite $(U_n)_{n=0,1,\ldots,N}$ définie par

$$\begin{cases} U_N = Z_N \\ U_n = \max\left(Z_n, \mathbb{E}(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\right) \text{ pour } n = 0, 1, \ldots, N-1. \end{cases}$$

Algorithme de la programmation dynamique

On introduit la suite $(U_n)_{n=0,1,\dots,N}$ définie par

$$\begin{cases} U_N = Z_N \\ U_n = \max\left(Z_n, \mathbb{E}(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\right) \text{ pour } n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Proposition

La suite $(U_n)_{n=0,\dots,N}$ est la plus petite surmartingale majorant Z.
On l'appelle enveloppe de Snell (d'horizon N) de Z.

Algorithme de la programmation dynamique

On introduit la suite $(U_n)_{n=0,1,\dots,N}$ définie par

$$\begin{cases} U_N = Z_N \\ U_n = \max\left(Z_n, \mathbb{E}(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\right) \text{ pour } n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Proposition

La suite $(U_n)_{n=0,\dots,N}$ est la plus petite surmartingale majorant Z.
On l'appelle enveloppe de Snell (d'horizon N) de Z.

Démonstration : Soit $(V_n)_{n=0,1,\dots,N}$ une surmartingale majorant Z. On montre par récurrence descendante que $V_n \geq U_n$. L'inégalité est en effet évidente pour $n = N$. Si on la suppose vraie pour $n+1$, on peut écrire

$$V_n \geq \mathbb{E}(V_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq \mathbb{E}(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n),$$

et, comme V majore Z, $V_n \geq \max\left(Z_n, \mathbb{E}(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\right) = U_n$.

Décomposition de Doob

La surmartingale $(U_n)_{n=0,\dots,N}$ s'écrit

$$U_n = M_n - A_n,$$

où la suite $(M_n)_{n=0,\dots,N}$ est la martingale définie par $M_0 = U_0$ et

$$M_n = U_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(U_k - \mathbb{E}(U_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) \right), \text{ pour } n = 1, \dots, N.$$

et $(A_n)_{n=0,1,\dots,N}$ est la suite définie par $A_0 = 0$ et

$$A_n = -\sum_{k=1}^{n} \left(\mathbb{E}(U_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - U_{k-1} \right), \text{ pour } n = 1, \dots, N.$$

Le plus petit temps d'arrêt optimal

Notons que la suite $(A_n)_{n=0,1,\dots,N}$ est croissante et que, sur $\{U_n > Z_n\}$, on a $U_n = \mathbb{E}(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$, et par conséquent $A_{n+1} = A_n$.

Théorème

Le temps d'arrêt ν_0 défini par

$$\nu_0 = \inf\{n \geq 0 \mid U_n = Z_n\}$$

vérifie $\mathbb{E}(U_0) = \mathbb{E}(Z_{\nu_0}) = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}(Z_\nu)$*, où* $\mathcal{T}_{0,N}$ *est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans* $\{0, \dots, N\}$*. C'est le* plus petit temps d'arrêt optimal.

Démonstration

On remarque que $A_{\nu_0} = 0$, donc $U_{\nu_0} = M_{\nu_0}$ et, par le théorème d'arrêt,

$$\mathbb{E}(M_{\nu_0}) = \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(U_0).$$

Mais on a aussi, par définition de ν_0, $U_{\nu_0} = Z_{\nu_0}$. D'où

$$\mathbb{E}(U_0) = \mathbb{E}(Z_{\nu_0}).$$

Par ailleurs, pour un temps d'arrêt ν quelconque, on a

$$\mathbb{E}(Z_\nu) \leq \mathbb{E}(U_\nu) \leq \mathbb{E}(U_0).$$

On en déduit que ν_0 est optimal, puis qu'un temps d'arrêt est optimal si et seulement si il vérifie (presque sûrement)

$$Z_\nu = U_\nu \quad \text{et} \quad A_\nu = 0.$$

Cadre markovien

Rappelons qu'un *noyau de transition* sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, est une famille $(P(x, \cdot))_{x \in E}$ de mesures de probabilités sur $(E, \mathcal{E})$ vérifiant que, pour tout $A \in \mathcal{E}$, l'application $x \mapsto P(x, A)$ est mesurable.

Si $P = (P(x, \cdot))_{x \in E}$ est un noyau de transition sur $(E, \mathcal{E})$ et si f est une fonction borélienne positive sur E,la fonction Pf, définie par

$$Pf(x) = \int_E P(x, dy) f(y)$$

est mesurable et positive.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré et* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de noyaux de transition sur un espace mesurable* $(E, \mathcal{E})$. *Une suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de variables aléatoires à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$ *est une* $\mathbb{F}$*-chaîne de Markov de noyaux de transition* (P_n) *si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* $\mathbb{F}$*-adaptée et, pour toute fonction borélienne positive* f *on* $(E, \mathcal{E})$, *on a*

$$\mathbb{E}\left(f(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right) = P_n f(X_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

La mesure de probabilité $P_n(x, \cdot)$ peut être vue comme la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $\{X_n = x\}$. Si le noyau P_n ne dépend pas de n ($P_n = P$ pour $n \in \mathbb{N}$), la chaîne de Markov est dite *homogène*.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une $\mathbb{F}$-chaîne de Markov de noyaux de transition (P_n) et un processus de gain Z_n donné par

$$Z_n = F(n, X_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

où, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $F(n, .)$ est une fonction borélienne positive telle que la variable aléatoire $F(n, X_n)$ soit intégrable.

Proposition

Sous les hypothèses ci-dessus, l'enveloppe de Snell d'horizon N de la suite $(Z_n)_{n=0,1,\ldots,N}$ est donnée par

$$U_n = V(n, X_n) \quad a.s.$$

où les fonctions $V(n,\cdot)$ $(n = 0, \ldots, N)$ sont déterminées par l'algorithme suivant de programmation dynamique

$$\begin{cases} V(N,x) = F(N,x) \\ V(n,x) = \max\{F(n,x), P_n[V(n+1,\cdot)](x)\}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

Proposition

Sous les hypothèses ci-dessus, l'enveloppe de Snell d'horizon N de la suite $(Z_n)_{n=0,1,\ldots,N}$ est donnée par

$$U_n = V(n, X_n) \quad a.s.$$

où les fonctions $V(n,\cdot)$ ($n = 0, \ldots, N$) sont déterminées par l'algorithme suivant de programmation dynamique

$$\begin{cases} V(N,x) = F(N,x) \\ V(n,x) = \max\{F(n,x), P_n[V(n+1,\cdot)](x)\}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

La denière équation s'écrit aussi

$$\max\{F(n,x) - V(n,\cdot), V_{n+1} - V_n + L_n[V(n+1,\cdot)](x)\} = 0,$$

où L_n est l'opérateur $P_n - I$.

Arrêt optimal en temps continu et inéquation variationnelle

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration à temps continu, d'horizon fini T, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. On suppose que les *conditions habituelles* sont vérifiées, c'est-à-dire que la filtration est continue à droite et complète. Pour $t \in [0, T]$, on note $\mathcal{T}_{t,T}$ l'ensemble des $\mathbb{F}$-temps d'arrêt à valeurs dans l'intervalle $[t, T]$.

Définition

Un processus adapté continu à droite $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit

- régulier *si, pour tout $\tau \in \mathcal{T}_{0,T}$, X_τ est intégrable et, pour toute suite croissante $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt vérifiant $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{\tau_n}) = \mathbb{E}(X_\tau)$;*
- de classe D *si la famille $(X_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}_{0,T}}$ est uniformément intégrable.*

Un processus régulier peut être discontinu. Exemple: si $(N_t)_{0\leq t\leq T}$ est un $\mathbb{F}$-processus de Poisson d'intensité λ, on a $\mathbb{E}N_\tau = \lambda\mathbb{E}\tau$.

L'enveloppe de Snell en temps continu

Soit $Z = (Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus continu à droite adapté, vérifiant

$$\forall t \in [0, T], \quad Z_t \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} Z_t\right) < \infty.$$

Théorème

Pour $t \in [0, T]$, on pose

$$U_t = \sup \text{ess}_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}(Z_\tau \mid \mathcal{F}_t).$$

1. *The process $(U_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une surmartingale.*
2. *Pour tout $t \in [0, T]$, $\mathbb{E}(U_t) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}(Z_\tau)$.*
3. *U a une modification continue à droite.*

La modification continue à droite de U est appelée enveloppe de Snell de Z et encore notée U.

La décomposition de Doob-Meyer

Théorème

Soit $U = (U_t)_{0 \leq t \leq T}$ *une surmartingale continue à droite de classe* D. *Si le processus* U *est régulier, il existe une martingale* $(M_t)_{t \geq 0}$ *et un processus continu adapté* $A = (A_t)_{t \geq 0}$, *tel que* $A_0 = 0$, *uniques à l'indistingabilité près, uniformément intégrables, tels que*

$$U_t = M_t - A_t, \quad \textit{pour } t \in [0, T].$$

Théorème

On suppose le processus de gain $(Z_t)_{0\leq t\leq T}$ *régulier. Soit* $\hat{U} = (\hat{U}_t)_{0\leq t\leq T}$ *une surmartingale continue à droite régulière de la classe D, de décomposition de Doob-Meyer* $\hat{U} = \hat{M} - \hat{A}$*. Le processus* $\hat{U}$ *est l'enveloppe de Snell (d'horizon T) de Z si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.*

1. $\hat{U} \geq Z$,
2. $\hat{U}_T = Z_T$, *p.s.*,
3. *pour tout* $t \in [0, T]$, $\hat{A}_t = \hat{A}_{\hat{\tau}_t}$ *où* $\hat{\tau}_t = \inf\{s \geq t \mid \hat{U}_s = Z_s\}$.

Cadre markovien

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré et* $(P_{s,t})_{0\leq s\leq t}$ *une famille de noyaux de transition sur un espace mesurable* $(E, \mathcal{E})$. *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$ *est un* $\mathbb{F}$*-processus de Markov de noyaux de transition* $(P_{s,t})$ *si* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est* $\mathbb{F}$*-adapté et, pour toute fonction borélienne positive* f *on* $(E, \mathcal{E})$, *on a, pour tous réels* s *et* t *vérifiant* $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left(f(X_t) \mid \mathcal{F}_s\right) = P_{s,t}f(X_s), \quad n \in \mathbb{N}.$$

La mesure de probabilité $P_{s,t}(x, \cdot)$ peut être vue comme la loi conditionnelle de X_t sachant $\{X_s = x\}$. Si le noyau $P_{s,t}$ ne dépend que de $t - s$, on dit que le processus de Markov est *homogène*. On a alors $P_{s,t} = P_{t-s}$ où $(P_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe.

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov homogène de semi-groupe de transition $(P_t)_{t\geq 0}$. Si $u : (t,x) \mapsto u(t,x)$ est une fonction *régulière* sur $[0,T] \times E$ (dans la pratique, $E = \mathbb{R}^d$ et $u \in C_b^{1,2}([0,T] \times E)$, on peut écrire, pour $t \in [0,T]$,

$$u(t,X_t) = M_t + \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u \right)(s,X_s)ds,$$

où M est une martingale et $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$. Si le processus de gain est donné par $Z_t = f(t,X_t)$, on cherche l'enveloppe de Snell sous la forme $U_t = u(t,X_t)$. La propriété de surmartingale conduit à imposer

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u \leq 0$$

Les autres conditions à imposer sur u sont

1. $u \geq f$ (pour avoir $U \geq Z$),
2. $u(T, x) = f(T, x)$ (pour avoir $U_T = Z_T$),
3. $\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = 0$ sur l'ensemble $\{u > f\}$.

Les autres conditions à imposer sur u sont

1. $u \geq f$ (pour avoir $U \geq Z$),
2. $u(T,x) = f(T,x)$ (pour avoir $U_T = Z_T$),
3. $\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = 0$ sur l'ensemble $\{u > f\}$.

En résumé la fonction u doit résoudre l'inéquation variationnelle

$$\max\left(f - u, \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u\right) = 0,$$

avec la condition terminale

$$u(T,\cdot) = f(T,\cdot).$$

Dans l'ensemble $C = \{(t,x) \in]0,T[\times E \mid u(t,x) > f(t,x)\}$ (appelé région de continuation), on a $\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = 0$. La frontière de C est appelée *frontière libre*, le complémentaire de C est appelé région d'arrêt.

Processus de Lévy

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$, un processus de Lévy d-dimensionnel, c'est-à-dire un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, à trajectoires continues à droite et à accroissements indépendants et stationnaires.

Processus de Lévy

Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$, un processus de Lévy d-dimensionnel, c'est-à-dire un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, à trajectoires continues à droite et à accroissements indépendants et stationnaires.
Un processus de Lévy est un processus de Markov homogène, dont le générateur in finitésimal s'écrit sous la forme $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, où, pour $g \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathcal{A}g(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} A_{i,j}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{d}\gamma_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(x),$$

et

$$\mathcal{B}g(x) = \int \nu(dy)\left(g(x+y) - g(x) - y.\nabla g(x)\mathbf{1}_{\{|y|\leq 1\}}\right),$$

où ∇g désigne le gradient de g et ν est une mesure positive sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vérifiant $\int(|x|^2 \wedge 1)\nu(dx) < \infty$.

Le triplet (A, γ, ν) est appelé triplet caractéristique du processus X. La matrice symétrique positive A s'interprète comme la matrice de covariance de la partie brownienne de X. La mesure ν est la mesure de Lévy de X, elle permet de décrire les sauts du processus.

Le triplet (A, γ, ν) est appelé triplet caractéristique du processus X. La matrice symétrique positive A s'interprète comme la matrice de covariance de la partie brownienne de X. La mesure ν est la mesure de Lévy de X, elle permet de décrire les sauts du processus.

Théorème

Soit $T > 0$ et f une fonction continue bornée sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$. L'enveloppe de Snell du processus $(Z_t = f(t, X_t))_{0 \leq t \leq T}$ est donnée par $U_t = u(t, X_t)$, où la fonction u est l'unique fonction continue bornée sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ vérifiant les conditions suivantes

1. $u(T, .) = f(T, .)$,
2. $u \geq f$,
3. *Sur* $]0, T[\times\mathbb{R}^d$, $\partial_t u + \mathcal{L}u \leq 0$,
4. *Sur l'ouvert* $\{(t, x) \in]0, T[\times\mathbb{R}^d \mid u(t, x) > f(x)\}$, $\partial_t u + \mathcal{L}u = 0$.

Dans cet énoncé, $\partial_t u + \mathcal{L}u$ est défini au sens des distributions (cf. D.L., M. Mikou, 2008). Pour des résultats récents sur les solutions de viscosité voir Barles et Imbert (*Ann. IHP* 2008).

Le put américain dans un modèle exponentiel de Lévy

Dans un modèle exponentiel de Lévy, le prix de l'actif financier $(S_t)_{t\in[0,T]}$ est donné par

$$S_t = S_0 e^{(r-\delta)t+X_t},$$

où $r > 0$ est le taux d'intérêt, $\delta \geq 0$ est le taux de dividende, et $X = (X_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus de Lévy réel (issu de 0), de triplet caractéristique (σ^2, γ, ν), vérifiant $\int_{\{|x|\geq 1\}} e^x \nu(dx) < \infty$ et

$$\frac{\sigma^2}{2} + \gamma + \int \left(e^x - 1 - x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right) \nu(dx) = 0.$$

Ces conditions assurent que le processus $(e^{-(r-\delta)t} S_t)$ est une martingale.

Le put américain d'échéance T est une option donnant à son détenteur le droit de vendre à une date de son choix entre 0 et T l'actif financier à un prix fixé d'avance K, appelé prix d'exercice. Le prix de cette option à l'instant t s'écrit

$$P_t = \sup\ \mathrm{ess}_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}\left(e^{-r(\tau - t)}(K - S_\tau)_+ \mid \mathcal{F}_t \right).$$

On montre que

$$P_t = P(t, S_t),$$

avec,

$$P(t,x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T-t}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} f(S_\tau^x)), \tag{1}$$

où $S_t^x = xe^{\tilde{X}_t} = xe^{(r-\delta)t + X_t}$ et $f(x) = (K - x)_+$.
Il résulte de (1) que $x \mapsto P(t,x)$ est convexe et que $t \mapsto P(t,x)$ est décroissante.

Le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ du processus $(\tilde{X}_t = \log(S_t/S_0))$ s'écrit de la façon suivante. Pour $g \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R})$, on a

$$\mathcal{L}g(x) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x) + \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial g}{\partial x}(x) + \mathcal{B}g(x),$$

où

$$\mathcal{B}g(x) = \int \nu(dy)\left(g(x+y) - g(x) - (e^y - 1)\frac{\partial g}{\partial x}(x)\right).$$

Notons que $\mathcal{B}g$ peut être défini au sens des distributions si $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Posons

$$\tilde{P}(t,x) = P(t,e^x), \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}.$$

On a

$$\tilde{P}(t,x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T-t}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} \tilde{f}(x + \tilde{X}_\tau)),$$

où $\tilde{f}(x) = f(e^x) = (K - e^x)_+$.

Théorème

La fonction $\tilde{P}$ est l'unique fonction continue bornée solution (au sens des distributions) de l'inéquation variationnelle

$$\max\left(\tilde{f} - \tilde{P}, (\partial_t + \mathcal{L} - r)\tilde{P}\right) = 0,$$

avec condition terminale $\tilde{P}(T,.) = \tilde{f}$.

La frontière libre

On suppose que l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée

$$\sigma \neq 0, \quad \nu((-\infty,0)) > 0 \quad \text{ou} \quad \int_{(0,+\infty)} (x \wedge 1)\nu(dx) = +\infty.$$

On peut alors montrer que

$$\forall t \in [0,T), \quad \forall x \in [0,+\infty), \quad P(t,x) > 0.$$

On définit le *prix critique* à l'instant $t \in [0,T)$ par

$$b(t) = \inf\{x \geq 0 \mid P(t,x) > f(x)\}.$$

La frontière libre

On suppose que l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée

$$\sigma \neq 0, \quad \nu((-\infty, 0)) > 0 \quad \text{ou} \quad \int_{(0,+\infty)} (x \wedge 1)\nu(dx) = +\infty.$$

On peut alors montrer que

$$\forall t \in [0, T), \quad \forall x \in [0, +\infty), \quad P(t, x) > 0.$$

On définit le *prix critique* à l'instant $t \in [0, T)$ par

$$b(t) = \inf\{x \geq 0 \mid P(t, x) > f(x)\}.$$

Notons que $b(t) \in [0, K)$. On peut montrer que $b(t) > 0$.

Comme $t \mapsto P(t, x)$ est décroissante, la fonction $t \mapsto b(t)$ est croissante.
On a évidemment $P(t, x) = f(x)$ pour $x \in [0, b(t)[$ et aussi pour $x = b(t)$, par continuité. On déduit aussi de la convexité de $x \mapsto P(t, x)$ et du fait que $P(t, x) > 0$ que

$$\forall t \in [0, T), \quad \forall x > b(t), \quad P(t, x) > f(x).$$

Comme $t \mapsto P(t,x)$ est décroissante, la fonction $t \mapsto b(t)$ est croissante.
On a évidemment $P(t,x) = f(x)$ pour $x \in [0, b(t)[$ et aussi pour $x = b(t)$, par continuité. On déduit aussi de la convexité de $x \mapsto P(t,x)$ et du fait que $P(t,x) > 0$ que

$$\forall t \in [0,T), \quad \forall x > b(t), \quad P(t,x) > f(x).$$

La région de continuation C sécrit donc

$$C = \{(t,x) \in [0,T) \times [0,+\infty) \mid x > b(t)\}.$$

Le graphe de b est appelé *frontière d'exercice* ou *frontière libre*.

On peut montrer que la fonction b est continue sur $[0, T[$ et caractériser sa limite en T. Pour des travaux récents sur ces questions voir Levendorski (2004), Yang, Jiang and Bian (2006), Bayraktar, Xing (2008). Le résultat suivant est tiré d'un article avec M. Mikou (2008).

Théorème

Si $\int (e^x - 1)_+ \nu(dx) \leq r - \delta$, *on a*

$$\lim_{t \to T} b(t) = K.$$

Si $\int (e^x - 1)_+ \nu(dx) > r - \delta$, *on a* $\lim_{t \to T} b(t) = \xi$, *où* ξ *est l'unique solution dans* $]0, K[$ *de l'équation* $\varphi(\xi) = rK$, *et* φ *est la fonction definie par*

$$\varphi(x) = \delta x + \int (xe^y - K)_+ \nu(dy), \quad x \in]0, K[.$$

Vitesse de convergence vers K

Vitesse de convergence vers K

On s'intéresse au cas

$$\int (e^x - 1)_+ \nu(dx) \leq r - \delta, \text{ dans lequel } \lim_{t \to T} b(t) = K.$$

Dans ce cas, si $\nu = 0$ (cas Black-Scholes, cf. Barles et al (1993), Lamberton (1995))

$$\lim_{t \to T} \frac{K - b(t)}{\sqrt{(T - t)|\ln(T - t)|}} = K\sigma.$$

Cette propriété reste vraie dans le cas ν finie, cf. Pham(1997).

Theorem

Si le processus X est à variation finie et $\int (e^x - 1)_+ \nu(dx) < r - \delta$, *on a*

$$\lim_{t \to T} \frac{K - b(t)}{T - t} = \int (e^y - 1)_- \nu(dy) = K \int_{(-\infty,0)} (1 - e^y) \nu(dy).$$

Si le processus X est à variation infinie, on a

$$\lim_{t \to T} \frac{K - b(t)}{T - t} = +\infty.$$

La propriété de *smooth fit*

La continuité de la dérivée (par rapport au prix du sous-jacent) de la valeur du put Américan est une propriété bien connue dans le modèle de the Black-Scholes model, appelée propriété de *smooth fit* (voir aussi Zhang (1994) et Bayraktar (2007) pour le cas d'une mesure ν finie). Dans le cas de modèles exponentiels de Lévy généraux,cette propriété peut ne plus être vérifiée.

La propriété de *smooth fit*

La continuité de la dérivée (par rapport au prix du sous-jacent) de la valeur du put Américan est une propriété bien connue dans le modèle de the Black-Scholes model, appelée propriété de *smooth fit* (voir aussi Zhang (1994) et Bayraktar (2007) pour le cas d'une mesure ν finie). Dans le cas de modèles exponentiels de Lévy généraux,cette propriété peut ne plus être vérifiée. Dans le cas du put *perpétuel*, Alili et Kyprianou (2004) montrent qu'une condition nécessaire et suffisante pour le smooth fit est que le point 0 soit *régulier* par rapport à l'ensemble $]-\infty, 0[$ pour le processus $\tilde{X}_t := (r-\delta)t + X_t$, ce qui signifie que $\mathbb{P}(\tau_0 = 0) = 1$, où

$$\tau_0 = \inf\{t > 0 \mid \tilde{X}_t < 0\}.$$

Dans le cas de l'horizon fini, on peut montrer que la régularité implique le smooth fit (G. Peskir). Il en résulte qu'on a smooth fit dans le modèle exponentiel de Lévy, si le processus de Lévy X est à variation infinie ($\sigma \neq 0$ ou $\int_{\mathbb{R}}(|x| \wedge 1)\nu(dx) = \infty$).

Proposition

On considère un modèle exponentiel de Lévy de triplet caractéristique (σ^2, ν, γ). *On suppose* $\sigma^2 = 0$, *and* $\int(|x| \wedge 1)\nu(dx) < \infty$.

- *Si* $r - \delta - \int(e^y - 1)\nu(dy) < 0$, *on a smooth fit pour le put américain d'échéance finie.*
- *If* $r - \delta - \int(e^y - 1)_+\nu(dy) > 0$, *on n'a pas smooth fit.*

Notons que $\gamma_0 := r - \delta - \int(e^y - 1)\nu(dy)$ est le coefficient de dérive du processus de Lévy $\tilde{X}_t = \log(S_t/S_0)$.

Démonstration de la seconde partie de la Proposition

On déduit de l'inéquation variationnelle que, pour $x > b(t)$,

$$\gamma_0 x \frac{\partial P}{\partial x}(t,x) + \int \left(P(t, xe^y) - P(t,x)\right) \nu(dy) - rP(t,x) = -\frac{\partial P}{\partial t}(t,x).$$

Donc, en $x = b(t)$,

$$\begin{aligned}
\gamma_0 x \frac{\partial P}{\partial x}(t,x) &\geq r(K-x) - \int \left(P(t, xe^y) - P(t,x)\right) \nu(dy) \\
&= r(K-x) - \int_{(-\infty,0)} x(1-e^y)\nu(dy) \\
&\quad - \int_{(0,+\infty)} \left(P(t, xe^y) - P(t,x)\right) \nu(dy).
\end{aligned}$$

Rappelons que $P(t,\cdot)$ est décroissante et
$\gamma_0 = r - \delta - \int (e^y - 1)\nu(dy)$

D'où (pour $x = b(t)$)

$$\left(r - \delta - \int (e^y - 1)\nu(dy)\right) \frac{\partial P}{\partial x}(t,x) + \int_{(-\infty,0)} (1 - e^y)\nu(dy) \quad \geq \quad 0,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(t,x) \quad &\geq \quad -\frac{\int_{(-\infty,0)}(1-e^y)\nu(dy)}{r - \delta - \int (e^y - 1)_+ \nu(dy) + \int_{(-\infty,0)}(1-e^y)\nu(dy)} \\ &> \quad -1, \end{aligned}$$

si $r - \delta - \int (e^y - 1)_+ \nu(dy) > 0$.

Méthodes numériques

Les approches numériques sont très variées.

Méthodes numériques

Les approches numériques sont très variées.
Beaucoup d'algorithmes sont implémentés dans le logiciel *Premia*, qui peut être téléchargé gratuitement à l'adresse

`http://www-rocq.inria.fr/mathfi/Premia/index.html`

Méthodes numériques

Les approches numériques sont très variées.
Beaucoup d'algorithmes sont implémentés dans le logiciel *Premia*, qui peut être téléchargé gratuitement à l'adresse

`http://www-rocq.inria.fr/mathfi/Premia/index.html`

Pour les méthodes d'EDP, voir *Encyclopedia of Quantitative Finance*, Wiley (2010), et le livre récent d'Achdou et Pironneau

Méthodes numériques

Les approches numériques sont très variées.
Beaucoup d'algorithmes sont implémentés dans le logiciel *Premia*, qui peut être téléchargé gratuitement à l'adresse

`http://www-rocq.inria.fr/mathfi/Premia/index.html`

Pour les méthodes d'EDP, voir *Encyclopedia of Quantitative Finance*, Wiley (2010), et le livre récent d'Achdou et Pironneau
Pour les méthodes de quantification, voir

`http://www.quantification.finance-mathematique.com/`

Méthodes numériques

Les approches numériques sont très variées.

Beaucoup d'algorithmes sont implémentés dans le logiciel *Premia*, qui peut être téléchargé gratuitement à l'adresse

`http://www-rocq.inria.fr/mathfi/Premia/index.html`

Pour les méthodes d'EDP, voir *Encyclopedia of Quantitative Finance*, Wiley (2010), et le livre récent d'Achdou et Pironneau

Pour les méthodes de quantification, voir

`http://www.quantification.finance-mathematique.com/`

Méthodes de Monte-Carlo : dualité (Rogers, Haugh-Kogan), calcul de Malliavin, techniques de régression (Longstaff-Schwartz...), livre de Glasserman.