Mathématiques de la Modélisation
Ecole Polytechnique - UPMC

Introduction aux EDP Stochastiques

Epreuve du 5 janvier 2017
Corrigé

- I -

1 - On sait que l'opérateur A est autoadjoint, i.e. $A^* = A$, et en particulier, $D(A^*) = D(A)$. Or le domaine de A^2 est défini par

$$D(A^2) = \{u \in D(A),\ Au \in D(A)\}$$

on a donc $D((A^2) = D((A^*)^2)$, et comme A^2 est clairement symétrique, on en déduit que A^2 est autoadjoint. Par ailleurs, il est dissipatif : pour $u \in H$,

$$(-A^2u, u) = -(Au, Au) = -|Au|_H^2 \leq 0.$$

Comme de plus $C_0^\infty(]0,1[) \subset D(A^2)$, le domaine de A^2 est dense dans H et on en déduit par le Corollaire 2 du Théorème de Lumer-Philips (chapitre III, §1 du cours) que A^2 engendre un C^0 semi-groupe de contraction sur H.
On peut également définir le semi-groupe C^0 en décomposant A^2 sur la base des (e_k).

2 - On applique la Proposition 1 (chapitre III, §2) du cours, avec $S(t) = e^{-A^2t}$ et $\Phi = Id$. Il faut donc juste vérifier que pour tout $t > 0$,

$$\int_0^t \|e^{-A^2s}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)} ds < +\infty$$

où $\mathcal{L}_2(H)$ est l'espace des opérateurs linéaires Hilbert-Schmidt sur H. On calcule donc

$$\begin{aligned}\int_0^t \|e^{-A^2s}\|^2_{\mathcal{L}_2(H)} &= \int_0^t \sum_{k\geq 1} |e^{-A^2s}e_k|_H^2 ds &= \sum_{k\geq 1}\int_0^t |e^{-\lambda_k^2 s}e_k|_H^2 ds \\ &= \int_0^t e^{-2k^4\pi^4 s} ds &= \frac{1}{2k^4\pi^4}(1 - e^{-2k^4\pi^4 t}) \quad ,\end{aligned}$$

où $\lambda_k = -k^2\pi^2$ est la kième valeur propre de l'opérateur A. Ainsi, la série converge et l'intégrale stochastique est bien définie; de plus la Proposition mentionnée ci-dessus implique que Z_A est un processus gaussien et que c'est l'unique solution faible de (1) valant 0 en $t = 0$.
Par ailleurs, toujours d'après la même proposition, et en utilisant le fait que e^{-A^2t} est autoadjoint pour tout t, l'opérateur de covariance de Z_A est donné par

$$\mathrm{Cov}(Z_A(t)) = \int_0^t (e^{-A^2s})(e^{-A^2s})^* ds = \int_0^t e^{-2A^2s} ds$$

et un calcul similaire au précédent donne donc

$$\mathrm{Cov}(Z_A(t))e_k = \frac{1-e^{-2k^4\pi^4 t}}{2k^4\pi^4}e_k.$$

3 - On procède comme dans la preuve de la Proposition 2 (chapitre III, §2) du cours, i.e. on applique le critère de Kolmogorov. On commence par estimer pour $0 < s < t$ et $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(|Z_A(t,x) - Z_A(s,x)|^2) \\ = \ & \sum_k [\int_0^s (e^{-\lambda_k^2(t-\sigma)} - e^{-\lambda_k^2(s-\sigma)})^2 e_k^2(x)d\sigma + \int_s^t e^{-2\lambda_k^2(t-\sigma)}e_k^2(x)d\sigma] \\ \leq \ & 2\sum_k [\int_0^s e^{-2\lambda_k^2(s-\sigma)}(e^{-\lambda_k^2(t-s)}-1)^2 d\sigma + \int_s^t e^{-2\lambda_k^2(t-\sigma)}d\sigma], \end{aligned}$$

et en utilisant le fait que pour tout $\gamma \in [0,1]$, et tout $x \geq 0$, $(e^{-x}-1)^2 \leq x^\gamma$, et $1-e^{-x} \leq x^\gamma$, le terme ci-dessus est majoré par $C_\gamma |t-s|^\gamma \sum_k \lambda_k^{2(\gamma-1)}$; la série converge ssi $4(\gamma-1) < -1$, i.e. $\gamma < 3/4$.
Par ailleurs, pour $t > 0$ et $x, y \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|Z_A(t,x) - Z_A(t,y)|^2) &= \sum_k \int_0^t e^{-2\lambda_k^2(t-s)}|e_k(x)-e_k(y)|^2 ds \\ &\leq \sum_k \frac{2^{3-2\gamma}}{2\lambda_k^2}(k\pi)^{2\gamma}|x-y|^{2\gamma} \leq C_\gamma |x-y|^{2\gamma}\sum_k k^{2(\gamma-2)} \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $|\sin a - \sin b| \leq 2^{1-\gamma}|a-b|^\gamma$. La série converge ssi $\gamma < 3/2$.
Au final, on obtient pour tout $\gamma < 3/4$:

$$\mathbb{E}(|Z_A(t,x) - Z_A(s,y)|^2) \leq C_\gamma(|x-y| + |t-s|)^\gamma,$$

et comme $Z_A(t,x) - Z_A(s,y)$ est une v.a. gaussienne, on a de même pour tout p entier :

$$\mathbb{E}(|Z_A(t,x) - Z_A(s,y)|^{2p}) \leq C_\gamma(|x-y| + |t-s|)^{\gamma p},$$

et le critère de Kolmogorov implique que Z_A admet une version C^α pour tout $\alpha < \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{p}$, donc puisque $\gamma < 3/4$, pour tout $\alpha < 3/8$ en prenant p assez grand.

4 - On écrit

$$\partial_x Z_A(t,x) = \sum_k \int_0^t e^{-\lambda_k^2(t-\sigma)}dW_k(\sigma)\ e_k'(x)$$

et on procède ensuite comme à la question précédente. En utilisant le fait que $|e_k'(x)|^2 \leq 2k^2\pi^2$, pour tout $x \in [0,1]$, on obtient pour $0 < s < t$ et $x \in [0,1]$:

$$\mathbb{E}(|\partial_x Z_A(t,x) - \partial_x Z_A(s,x)|^2) \leq C_\gamma |t-s|^\gamma \sum_k k^{4\gamma-2},$$

et la série converge ssi $\gamma < 1/4$. Par ailleurs, en utilisant le fait que

$$|e_k'(x) - e_k'(y)|^2 \leq 2(k\pi)^{2(1+\gamma)}|x-y|^{2\gamma}$$

pour tout $\gamma \in [0,1]$, on obtient pour $x, y \in]0,1[$, et $t > 0$,

$$\mathbb{E}(|\partial_x Z_A(t,x) - \partial_x Z_A(t,y)|^2) \leq C_\gamma |x-y|^{2\gamma} \sum_k k^{2\gamma - 2}$$

et la série converge ssi $\gamma < 1/2$. On conclut par le critère de Kolmogorov comme précédemment que $\partial_x Z_A$ possède une version à trajectoires C^α en (t,x) pour tout $\alpha < 1/8$.

- II -

1 - On réécrit l'équation pour u sous la forme

$$du + A^2 u dt + Af(u)dt = dW$$

de sorte que si $u = v + Z_A$ et Z_A vérifie l'équation (1), alors v vérifie

$$\frac{dv}{dt} + A^2 v + Af(v + Z_A) = 0$$

dont la formulation mild s'écrit :

$$v(t) = e^{-A^2 t} u_0 + \int_0^t e^{-A^2(t-s)} Af(v + Z_A). \tag{1}$$

2 - Pour $\varphi \in C_0^\infty(]0,1[)$, et $t \geq 0$, $e^{-A^2 t} A\varphi$ est bien défini et il suffit de montrer l'inégalité annoncée pour que montrer que l'opérateur $e^{-A^2 t} A$ est continu de H dans H pour $t > 0$. Pour cela, on procède comme dans la preuve du lemme 1, chapitre III, §4 du cours : on écrit que $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (\varphi, e_k)_H e_k$ et donc

$$e^{-A^2 t} A\varphi = \sum_{k=1}^{+\infty} (\varphi, e_k)_H e^{-A^2 t} A e_k = \sum_{k=1}^{+\infty} (\varphi, e_k)_H e^{-\lambda_k^2 t} \lambda_k e_k,$$

de telle sorte qu'en utilisant le théorème de Parseval :

$$|e^{-A^2 t} A\varphi|_H^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} (\varphi, e_k)_H^2 e^{-2\lambda_k^2 t} \lambda_k^2 \leq \sup_{\alpha > 0} (\alpha e^{-2\alpha t}) |\varphi|_H^2 \leq \frac{C}{t} |\varphi|_H^2,$$

ce qui donne l'inégalité annoncée.

3 - On montre que presque sûrement en ω, l'application $\mathcal{T}_\omega$ envoie $C(\mathbb{R}^+; H)$ dans $C(\mathbb{R}^+; H)$, et qu'elle est strictement contractante sur $C([0,T]; H)$ si T est choisi assez petit (mais ne dépendant que de L_f).
Soit donc $v \in C(\mathbb{R}^+; H)$. Tout d'abord, puisque $e^{-A^2 t}$ est un C^0 semi-groupe, l'application $t \mapsto e^{-A^2 t} u_0$ est continue à valeurs dans H. Par ailleurs, d'après la question I-3, il existe $\Omega_0 \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et $Z_A(\cdot, \omega) \in C(\mathbb{R}^+; L^\infty(0,T)) \subset C(\mathbb{R}^+; H)$, pour tout $\omega \in \Omega_0$. Par la suite, on se restreindra à $\omega \in \Omega_0$. Comme f est lipschitzienne, f est continue sur $\mathbb{R}$, et puisque $f(0) = 0$, on a $|f(x)| \leq L_f |x|$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ de sorte que $|f(v(s) + Z_A(s))|_H \leq L_f |v(s) + Z_A(s)|_H$; on en déduit

que $s \mapsto f(v(s) + Z_A(s))$ est également continue à valeurs dans H. Montrons alors que si $g \in C([0,T];H)$, alors

$$t \mapsto \int_0^t e^{-A^2(t-s)} Ag(s)ds \in C([0,T];H).$$

Soit $t_1 < t_2$, alors

$$\begin{aligned}&\Big| \int_0^{t_2} e^{-A^2(t_2-s)} Ag(s)ds - \int_0^{t_1} e^{-A^2(t_1-s)} Ag(s) \Big|_H \\ &\leq \int_0^{t_1} \big|(e^{-A^2(t_2-s)} - e^{-A^2(t_1-s)})Ag(s)\big|_H ds + \int_{t_1}^{t_2} \big|e^{-A^2(t_2-s)} Ag(s)\big|_H ds.\end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite ci-dessus tend vers 0 lorsque $t_2 - t_1$ tend vers 0 grace à l'estimation ci-dessous (qui utilise le fait que A et $e^{-A^2(t-s)}$ commutent, et la question II-2), et au théorème de convergence dominée (on rappelle que $e^{-A^2 t}$ est un semi-groupe continu) :

$$\begin{aligned}\big|(e^{-A^2(t_2-s)} - e^{-A^2(t_1-s)})Ag(s)\big|_H &= \big|e^{-A^2(t_1-s)} A(e^{-A^2(t_2-t_1)} - Id)g(s)\big|_H \\ &\leq 2C \sup_{t\in[0,T]} |g(t)|_H \frac{1}{\sqrt{t_1 - s}}.\end{aligned}$$

Le second terme est également facilement majoré grâce à l'estimation de la question II-2. On en déduit que l'application $\mathcal{T}_\omega$ envoie $C(\mathbb{R}^+;H)$ dans lui-même, pour tout $\omega \in \Omega_0$.
Par ailleurs, toujours en utilisant la question II-2, pour v_1 et v_2 dans $C([0,T];H)$, et $\omega \in \Omega_0$, on a pour $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}|(\mathcal{T}_\omega v_1)(t) - (\mathcal{T}_\omega v_2)(t)|_H &\leq \int_0^t \big|e^{-A^2(t-s)} A[f(v_1(s) + Z_A(s)) - f(v_2(s) + Z_A(s)]\big|_H ds \\ &\leq CL_f \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} |v_1(s) - v_2(s)|_H ds \\ &\leq \leq 2CL_f \sup_{t\in[0,T]} |v_1 - v_2|_H \sqrt{T},\end{aligned}$$

dont on déduit facilement que $\mathcal{T}_\omega$ est strictement contractante sur $C([0,T];H)$ dès que $T < (2CL_f)^{-2}$. Le théorème de point fixe de Picard implique alors l'existence d'une unique solution de (1), continue sur $[0,T]$ à valeurs dans H, pour tout $\omega \in \Omega_0$. En réitérant l'argument sur $[T, 2T]$, etc, on obtient l'existence et l'unicité d'une solution à trajectoires presque sûrement continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans H.

4 - L'existence d'une unique solution de l'équation mild

$$u(t) = e^{-A^2 t} u_0 + \int_0^t e^{-A^2(t-s)} Af(u(s))ds + \int_0^t e^{-A^2(t-s)} AdW(s)$$

découle directement de la question précédente, puisque clairement, u est solution de l'équation ci-dessus ssi $v = u - Z_A$ est solution de l'équation (1). De plus, la construction de v montre que pour tout t tel que $0 < t \leq T$, il existe une fonction borélienne $F : C([0,t];H) \to C([0,t];H)$ telle que pour tout $\omega \in \Omega_0$, $v(\cdot,\omega)|_{[0,t]} = F(Z_A(\cdot,\omega)|_{[0,t]})$. Comme Z_A est adapté, $Z_A|_{[0,t]}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, donc $v|_{[0,t]}$ l'est aussi et donc v est adapté, et $u = v + Z_A$ l'est également.

- III -

1 - On rappelle (cf question I - 2) que $Q_t e_k = \frac{1-e^{-2k^4\pi^4 t}}{2k^4\pi^4} e_k$. Clairement, $Q_t e_k$ converge dans H, pour tout $k \geq 1$, lorsque t tend vers l'infini, vers $Q_\infty e_k := \frac{1}{2k^4\pi^4} e_k$. De plus, la convergence de Q_t vers Q_∞ a lieu au sens des opérateurs de trace finie, par théorème de convergence dominée pour les séries, puisque

$$\sum_k \left| \big((Q_\infty - Q_t) e_k, e_k \big)_H \right| = \sum_k \frac{e^{-2k^4\pi^4 t}}{2k^4\pi^4},$$

et la série converge uniformément pour $t \geq 0$. Il est évident que l'opérateur Q_∞ ainsi construit, qui est diagonal dans la base $(e_k)_{k\geq 1}$ est symétrique, défini positif.

2 - Soit $u_0 \in H$, alors la solution de (1) valant u_0 en $t = 0$ est donnée par

$$u(t, u_0) = e^{-A^2 t} u_0 + \int_0^t e^{-A^2(t-s)} dW(s) = e^{-A^2 t} u_0 + Z_A(t),$$

et $u_0 \mapsto u(t, u_0)$ est clairement continu sur H puisque $e^{-A^2 t}$ est un opérateur linéaire continu sur H; si $\varphi \in C_b(H)$, alors $\mathbb{E}(\varphi(\cdot)) = P_t\varphi(\cdot)$ est bornée sur H et la continuité par rapport à u_0 découle du théorème de convergence dominée.

3 - La définition de $P_t^* \delta_{u_0}$ implique que pour toute $\varphi \in C_b(H)$,

$$\langle \varphi, P_t^* \delta_{u_0} \rangle = (P_t \varphi)(u_0) = \mathbb{E}(\varphi(u(t, u_0))).$$

Ainsi $P_t^* \delta_{u_0}$ est la loi de $u(t, u_0)$; or $u(t, u_0) = e^{-A^2 t} u_0 + Z_A(t)$ et $Z_A(t)$ est une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, Q_t)$, donc $u(t, u_0)$ est une v.a. de loi $\mathcal{N}(e^{-A^2 t} u_0, Q_t)$.
Lorsque t tend vers l'infini, $\mathbb{E}(u(t, u_0) = e^{-A^2 t} u_0$ tend vers 0 dans H puisque

$$|e^{-A^2 t} u_0|_H \leq e^{-\lambda_1^2 t} |u_0|_H = e^{-\pi^2 t} |u_0|_H.$$

Par ailleurs, d'après la question III-1, Q_t converge vers Q_∞ dans l'espace des opérateurs à trace finie, donc $u(t, u_0)$ converge en loi vers une $\mathcal{N}(0, Q_\infty)$. Ainsi, $P_t^* u_0$ converge faiblement vers une mesure gaussienne centrée d'opérateur de covariance Q_∞.

4 - Soit $h \in H$. Calculons d'abord, pour $u_0 \in H$, et $t > 0$,

$$(P_t \varphi_h)(u_0) = \mathbb{E}(\varphi_h(u(t, u_0))) = \mathbb{E}\big(e^{i(h, u(t, u_0))_H}\big);$$

en utilisant le fait que $u(t, u_0) = e^{-A^2 t} u_0 + Z_A(t)$, on obtient

$$(P_t \varphi_h)(u_0) = e^{i(h, e^{-A^2 t} u_0)_H} \mathbb{E}\big(e^{i(h, Z_A(t))_H}\big) = e^{i(e^{-A^2 t} h, u_0)_H} \mathbb{E}\big(e^{i(h, Z_A(t))_H}\big).$$

Par ailleurs, $Z_A(t) \sim \mathcal{N}(0, Q_t)$ et on sait d'après le cours (chapitre I §5) que

$$\mathbb{E}\big(e^{i(h, Z_A(t))_H}\big) = \widehat{\mathcal{N}(0, Q_t)}(h) = e^{-\frac{1}{2}(Q_t h, h)_H}.$$

Ainsi, pour tout $u_0 \in H$,

$$(P_t \varphi_h)(u_0) = e^{-\frac{1}{2}(Q_t h, h)_H} e^{i(e^{-A^2 t} h, u_0)_H},$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{P_t^*\mu}(h) &= \langle \varphi_h, P_t^*\mu\rangle = \langle P_t\varphi_h, \mu\rangle = e^{-\frac{1}{2}(Q_t h,h)_H}\langle e^{i(e^{-A^2t}h,\cdot)_H}, \mu\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}(Q_t h,h)_H}\hat{\mu}(e^{-A^2t}h).\end{aligned}$$

5 - Soit maintenant μ une mesure invariante pour le semi-groupe P_t, alors $P_t^*\mu = \mu$ pour tout $t \geq 0$, donc d'après la question précédente, pour tout $h \in H$,

$$\hat{\mu}(h) = e^{-\frac{1}{2}(Q_t h,h)_H}\hat{\mu}(e^{-A^2t}h).$$

Lorsque t tend vers l'infini, $e^{-A^2t}h$ converge vers 0 dans H (cf question 3) et par convergence dominée, $\hat{\mu}(e^{-A^2t}h)$ converge vers $\hat{\mu}(0) = 1$. Par ailleurs, d'après la question 1, $(Q_t h, h)_H$ converge vers $(Q_\infty h, h)_H$ et l'égalité ci-dessus implique alors, pour tout $h \in H$,

$$\hat{\mu}(h) = e^{-\frac{1}{2}(Q_\infty h,h)_H}.$$

Comme la transformée de Fourier d'une mesure caractérise cette mesure (i.e. la fonction caractéristique d'une v.a. caractérise sa loi) on en déduit que μ est une mesure gaussienne centrée sur H d'opérateur de covariance Q_∞. Le fait que cette mesure est bien une mesure invariante découle facilement de la convergence montrée dans la question 3.

6 - Soit $u \in H$, alors $u \in \mathrm{Im}\ (e^{-A^2t})$ ssi il existe $v \in H$ tel que $e^{-A^2t}v = u$ et alors pour tout $k \geq 1$, $(u, e_k)_H = (e^{-A^2t}v, e_k)_H = e^{-\lambda^2 t}(v, e_k)_H$. Par Parseval, $v \in H$ ssi $\sum_k (v, e_k)_H^2 < +\infty$ donc $u \in \mathrm{Im}(e^{-A^2t})$ ssi $\sum_k e^{2\lambda^2 t}(u, e_k)_H^2 < +\infty$.
De la même façon, en utilisant l'expression de $Q_t^{1/2}$ sur la base $(e_k)_k$, on obtient pour $u \in H$, $u \in \mathrm{Im}\ Q_t^{1/2}$ ssi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\lambda_k^2}{1 - e^{-2\lambda_k^2 t}}(u, e_k)_H^2 < +\infty.$$

Ainsi pour montrer l'inclusion annoncée, il suffit de montrer que pour tout $t > 0$, il existe une constante $C_t > 0$ telle que pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{2\lambda_k^2}{1 - e^{-2\lambda_k^2 t}} \leq C_t\, e^{2\lambda^2 t}.$$

Mais ceci découle directement de l'inégalité $x \leq e^x - 1$ pour $x \geq 0$, en prenant $C_t = \frac{1}{t}$.

7 - Il suffit d'appliquer le théorème de l'énoncé, pour obtenir que puisque pour tout $u_0 \in H$, et tout $t > 0$, $e^{-A^2t}u_0 \in \mathrm{Im}\ Q_t^{1/2}$, la mesure $\mathcal{N}(e^{-A^2t}u_0, Q_t)$, qui par la question 3 est égale à $P_t^*\delta_{u_0}$ est équivalente à la mesure $\mathcal{N}(0, Q_t)$, puis d'utiliser la transitivité de la relation d'équivalence des mesures.