Différences finies

Exercice 1. θ-schéma.

On considère l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \quad , x \in \mathbb{R},\, t > 0, \tag{1}$$

avec la donnée initiale $u(0,x) = u_0(x)$, où $u(t,.)$ et u_0 sont supposées périodiques de période 1.

1. On étudie le θ-schéma défini par

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} - (1-\theta)\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0, \tag{2}$$

θ désignant un réel entre 0 et 1.

a. Montrer que le $\theta-$schéma est au moins d'ordre 1 en temps et deux en espace.

b. On note $\hat{u}(k,t)$ la transformée de Fourier de la solution u de l'équation (1),

$$u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k x} \hat{u}(k,t).$$

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\hat{u}(k,t)$.

c. On fixe $\Delta x = 1/N$ et on munit $\mathbb{R}^N$ de la norme

$$\|u\| = \left(\sum_{j=1}^{N} |u_j|^2 \Delta x \right)^{1/2}.$$

Etudier la stabilité du schéma pour cette norme.

d. Eudier la convergence du schéma.

2. On considère maintenant l'équation de diffusion à coefficients variables

$$\sigma(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0. \tag{3}$$

On suppose que les fonctions σ et a sont régulières, périodiques de période 1 et vérifient $0 < \sigma_* \leq \sigma(x) \leq \sigma^*$ et $0 \leq a(x)$ pour tout x. On généralise le θ-schéma de la manière suivante :

$$\sigma_j \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \theta \frac{a_j u_{j+1}^{n+1} - (a_j + a_{j-1}) u_j^{n+1} + a_{j-1} u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} - (1-\theta) \frac{a_j u_{j+1}^n - (a_j + a_{j-1}) u_j^n + a_{j-1} u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0,$$

où $\sigma_j = \sigma(j\Delta x)$ et $a_j = a(j\Delta x)$.

a. Montrer que pour toute fonction v périodique de période un (et suffisament régulière)

$$\int_0^1 \sigma(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) v(x) dx + \int_0^1 a(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \frac{\partial v}{\partial x}(x) dx = 0.$$

b. Montrer que si u désigne la solution du schéma numérique, on a alors pour tout $v \in \mathbb{R}^N$,

$$\left(\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}, v\right)_\sigma + a_h\left(\theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n, v\right) = 0,$$

où $(.,.)_\sigma$ et $a_h(.,.)$ sont des formes bilinéaires symétriques positives sur $\mathbb{R}^N$.
c. Montrer que la solution u de l'équation (3) est telle que

$$\int_0^1 \sigma(x)|u(x,t)|^2 dx \leq \int_0^1 \sigma(x)|u(x,0)|^2 dx.$$

d. En s'inspirant de la propriété de décroissance établie à la question précédente dans le cas continu, montrer que le schéma est L^2-stable pour $\theta \geq 1/2$.
e. Montrer que le schéma est au moins d'ordre un en espace et en temps. En déduire la convergence du schéma pour $\theta \geq 1/2$ ainsi que son ordre de convergence.

Exercice 2. Equation de convection-diffusion
On considère l'équation de convection-diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{4}$$

avec $u(x,0) = u^0$, u et u^0 périodiques de période 1.

1. Schéma décentré amont.
On considère le schéma

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} - \nu\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0.$$

a. Montrer que le schéma est au moins d'ordre un en temps et en espace.
b. Donner des conditions suffisantes de stabilité L^∞ du schéma lorsque $V > 0$ et $V < 0$. Montrer que ces conditions sont nécessaires dans le cas $V > 0$. Que se passe t'il lorsque ν tend vers 0 ?
c. Montrer que le schéma est convergent sous la condition CFL introduite précédemment.

2. Schéma centré.
On considère maintenant le schéma

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + V\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\nu}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}\right) = 0.$$

a. Etudier la stabilité L^2 du schéma. Que se passe-t-il lorsque ν tend vers 0?
b. Montrer que le schéma est consistant, déterminer son ordre.
c. Etablir un résultat de convergence.