Exercice 1. Discrétisation en temps

Soit a un réel positif. On considère l'équation différentielle

$$u'(t) = -au(t), \tag{1}$$

avec condition initiale $u(0) = u_0$. On cherche à résoudre numériquement cette équation. Cet exemple précis n'a évidemment aucun intérêt pratique puisqu'on connait explicitement la solution. Cependant, il permet d'illustrer les trois notions essentielles liées à l'étude des schémas numériques: consistance, stabilité et convergence.

On considère les deux schémas suivants : Un schéma dit explicite

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = -au_n \tag{2}$$

et un schéma dit implicite

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = -au_{n+1}. \tag{3}$$

1. Consistance.

Montrer que les schémas (2) et (3) sont consistants d'ordre 1, c'est à dire que si u est solution de (1), il existe une constante $C(T, u)$ telle que

$$\left| \frac{u((n+1)\Delta t) - u(n\Delta t)}{\Delta t} + au(n\Delta t) \right| \leq C(T, u)\Delta t$$

et

$$\left| \frac{u((n+1)\Delta t) - u(n\Delta t)}{\Delta t} + au((n+1)\Delta t) \right| \leq C(T, u)\Delta t$$

pour tout n tel que $(n + 1)\Delta t < T$ (on n'utilisera pas la connaissance explicite de la solution, mais uniquement le fait que u est de classe $\mathcal{C}^2$).

2. Stabilité.

Un schéma d'approximation de l'équation (1) est dit inconditionnellement stable par rapport à a et Δt s'il existe une constante K telle que pour tout $a > 0$ et tout $\Delta t > 0$,

$$|u_n| \leq K|u_0| \text{ pour tout } n \geq 0. \tag{4}$$

a. Les schémas (2) et (3) sont-ils inconditionnellement stables ?

b. Montrer que le schéma explicite (2) est conditionnellement stable, c'est à dire que sous une certaine condition portant sur a et Δt, il existe une constante K telle que (4) soit vérifiée.

3. Convergence.

Montrer que les deux schémas sont convergents, c'est à dire que

$$\sup_{n\Delta t \leq T} |u_n - u(n\Delta t)| \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0.$$

Montrer que la convergence est au moins d'ordre un, c'est à dire qu'il existe une constante $C(T,u)$ (dépendant de la solution de l'équation différentielle (1) et du temps final T) telle que

$$\sup_{n\Delta t \leq T} |u_n - u(n\Delta t)| \leq C(T,u)\Delta t.$$

4. Cas vectoriel.

Soit $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ une matrice symétrique positive. On considère l'équation différentielle

$$u'(t) = -Au(t)$$

avec $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^k$.

a. Définir les schémas explicite et implicite associés à cette équation différentielle.

b. Etudier la consistance, la stabilité et la convergence des schémas introduits. L'un des schéma est conditionnellement stable. Quelle est la condition de stabilité ?

Exercice 2. Discrétisation du Laplacien.

On souhaite discrétiser l'opérateur "Laplacien" $u \mapsto -u''$ agissant sur les fonctions périodiques de période 1.

1. Montrer que l'opérateur "Laplacien" est symétrique, positif. En d'autres termes prouver que

$$-\int_0^1 u''v\,dx = -\int v''u\,dx \text{ et que } -\int_0^1 u''u\,dx \geq 0,$$

pour toutes fonctions u et v régulières, périodiques de période 1.

2. Montrer que pour u suffisamment régulière, on a

$$\left| -u''(x_j) - \frac{-u(x_{j+1}) + 2u(x_j) - u(x_{j-1})}{(\Delta x)^2} \right| \leq C(u)(\Delta x)^2,$$

où $x_j = j(\Delta x)$.

3. On propose de discrétiser l'espace des fonctions 1-périodique par les vecteurs N-périodiques: On associe à une fonction u le vecteur de $\mathbb{R}^N$ donné par $u_i = u(x_i)$, où $x_i = i/N$, $1 \leq i \leq N$. D'après la question précédente, il est naturel d'approcher l'opérateur "Laplacien" par l'application linéaire A

$$(u_i)_{i=1,\ldots,N} \mapsto \left(\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{(\Delta x)^2} \right)_{i=1,\ldots,N},$$

où $\Delta x = 1/N$, $u_0 = u_N$ et $u_{N+1} = u_1$.

Montrer que l'application linéaire $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est symétrique, positive.

4. Calcul des valeurs propres

a. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur "Laplacien". En d'autres termes, déterminer les fonction u 1-périodiques telles que $-u'' = \lambda u$.

b. Faire de même pour l'application linéaire A (on pourra s'inspirer des fonctions propres de la question précédente).

5. En vous inspirant de l'Exercice 1, proposez deux schémas numériques permettant de résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \text{ pour tout } t > 0 \text{ et tout } x \in]0,1[\\ u(t,0) = u(t,1) \\ u'(t,0) = u'(t,1) \\ u(t=0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

Les deux schémas introduits sont-ils inconditionnellement stables ?

Exercice 3. Principe du maximum.

On considère le problème : étant donnée une fonction f, trouver u telle que

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

1. On suppose que pour tout f, le système (5) admet une solution unique. Démontrer le principe du maximum: si $f \geq 0$, on a $u \geq 0$

2. On considère l'approximation par différences finies

$$\frac{-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1}}{(\Delta x)^2} = f(x_j), \text{ pour tout } j = 1, \dots N \tag{6}$$

avec $x_j = j\Delta x = j/(N+1)$ et $u_0 = u_{N+1} = 0$. Montrer qu'il existe une solution unique au système (6) et que celle-ci vérifie un principe du maximum discret: Si $f \geq 0$, alors $u_j \geq 0$.

3. Déterminer les solutions de l'équation (5) et du schéma (6) pour $f = 1$. En déduire que pour toute donnée f, on a $|u_j| \leq \|f\|_\infty/8$ pour tout $j = 1, \dots, N$.

4. Montrer que pour u suffisamment régulière, on a

$$\left| -u''(x_j) - \frac{-u(x_{j+1}) + 2u(x_j) - u(x_{j-1})}{(\Delta x)^2} \right| \leq C(u)(\Delta x)^2.$$

Ecrire un système d'équations vérifié par l'erreur $e_j = u(x_j) - u_j$ et prouver une estimation d'erreur en $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$ pour u suffisamment régulière.