TD3 Analyse Numérique et Optimisation

Formulations variationnelles

Exercice I. Laplacien avec conditions aux limites de Neumann.

On considère le problème aux limites de Neumann suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{$P1$}$$

où f et g sont continues sur $\bar{\Omega}$ et Ω est un ouvert borné régulier et connexe.

1. Trouver une formulation variationnelle (V) de ce problème sur l'espace $X = \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ et montrer qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ est solution de $(P1)$ si et seulement si elle est solution de (V).

2. Donner une condition nécessaire d'existence de solution de $(P1)$ portant sur f et g (condition dite de compatibilité).

Indication: Il est utile de ne pas perdre de vue la signification physique de $(P1)$. Cette équation modélise (par exemple) la propagation de la chaleur au sein du solide Ω. L'inconnue u est la température tandis que f et g correspondent respectivement à des flux de chaleur volumique et surfacique.

3. Montrer que u est solution de (V) si et seulement si elle minimise sur X une fonctionnelle $E(v)$ que l'on précisera.

4. Etablir l'unicité à une constante près de la solution de la solution du problème variationnel si elle existe.

Exercice II. Equation des plaques.

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{$P2$}$$

où f est continue sur $\bar{\Omega}$.

1. Trouver une formulation variationnelle (V) de ce problème ne faisant intervenir que des dérivées d'ordre 2. Montrer qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^4(\Omega) \cap \mathcal{C}^3(\bar{\Omega})$ est solution de $(P2)$ si et seulement si elle est solution de (V).

2. Montrer que u est solution de (V) si et seulement si elle minimise sur X une fonctionnelle $E(v)$ que l'on précisera.

3. Etablir l'unicité de la solution du problème variationnel si elle existe.

Exercice III. Conditions de transmission.

On considère l'équation de la chaleur dans un solide Ω de conductivité $k(x)$. Soit Ω_1 un ouvert strictement inclus dans Ω. On note $\Omega_2 = \Omega \backslash \overline{\Omega}_1$. On suppose que la conductivité $k(x)$ est donnée par

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{si } x \in \Omega_1 \\ k_2 & \text{si } x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Le solide est maintenu à la température nulle sur $\partial\Omega$ et chauffé par une source de chaleur volumique $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. La température à l'équilibre

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \\ u_2(x) & \text{si } x \in \Omega_2. \end{cases}$$

est solution de l'équation

$$\left\{\begin{array}{ll} -k_1\Delta u_1 = f & \text{dans } \Omega_1, \\ -k_2\Delta u_2 = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_1 = u_2 & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ k_1\frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2\frac{\partial u_2}{\partial n} & \text{sur } \partial\Omega_1. \end{array}\right. \tag{$P3$}$$

où n est la normale extérieure à Ω_1.

Trouver une formulation variationnelle (V) de ce problème sur l'espace

$$X = \{u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : u|_{\Omega_1} \in \mathcal{C}^1(\Omega_1), u|_{\Omega_2} \in \mathcal{C}^1(\Omega_2) \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

et montrer qu'une fonction u telle que $u|_{\Omega_1} \in \mathcal{C}^2(\Omega_1) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_1)$ et $u|_{\Omega_2} \in \mathcal{C}^2(\Omega_2) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_2)$ est solution de $(P3)$ si et seulement si elle est solution de (V).

Exercice IV. Conditions de Dirichlet non homogènes.

Soit Ω un ouvert borné, régulier. On considère l'équation

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

où $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$.

Montrer que la résolution de ce problème est équivalente à celle d'un problème de Dirichlet homogène à déterminer. En donner la formulation variationnelle associée.

Exercice V. Equation de convection-diffusion.

Soit Ω un ouvert régulier connexe. On considère l'équation de convection-diffusion

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u + (V.\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{$P4$}$$

où $V \in C^1(\overline{\Omega})^2$ est un champ de divergence nulle.

1. Reprendre la question 1 de l'Exercice I. Peut-on associer à ce problème un problème de minimisation comme nous l'avons fait à l'Exercice I?

2. Montrer que $(P4)$ admet au plus une solution. Aurait-on obtenu un résultat identique si la divergence de V admettait des valeurs strictement positives ?