TD4 Analyse Numérique et Optimisation

Espaces de Sobolev

Exercice I. Espaces de Sobolev 1D.

1. Trouver une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que φ soit dérivable presque partout, telle que la fonction g définie presque partout par

$$g(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t}$$

appartienne à $L^2(\mathbb{R})$ et telle que $\varphi \notin H^1(\mathbb{R})$.

2. Soit $I =]-1, 1[$, montrer que la fonction

$$u(x) = (x + |x|)/2$$

appartient à $H^1(I)$ et déterminer sa dérivée faible. Montrer plus généralement que toute fonction continue, continûment différentiable par morceaux sur $\overline{I}$ appartient à $H^1(I)$.

3. Soit I un intervalle ouvert, borné ou non borné, montrer que tout élément $u \in H^1(I)$ est continu, uniformément borné (considérer dans un premier temps le cas $I = \mathbb{R}$ et utiliser la densité des fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $H^1(\mathbb{R})$).

4. Soit I un intervalle ouvert quelconque de $\mathbb{R}$. Montrer que les fonctions de $H^1(I)$ sont Hölderiennes d'exposant $1/2$, c'est à dire que pour tout $u \in H^1(I)$, il existe une constante C telle que pour tout x, $y \in I$,

$$|u(x) - u(y)| \leq C\,|x - y|^{1/2}.$$

En admettant le Théorème d'Ascoli rappelé ci-après, montrer que si I est borné, $H^1(I)$ s'injecte de manière compacte dans $\mathcal{C}(\overline{I})$, c'est à dire que toute suite bornée dans $H^1(I)$ admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}^0(\overline{I})$.

Théorème. *Soit K un espace métrique compact et soit $\mathcal{H}$ un sous-ensemble borné de $\mathcal{C}(K)$. On suppose que $\mathcal{H}$ est uniformément équicontinu, i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{H}$,*

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{H},$$

alors $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(K)$, c'est à dire que toute suite d'éléments de $\mathcal{H}$ admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}(K)$.

Dans le cas où I est non borné, l'injection est de $H^1(I)$ dans $\mathcal{C}^0(\overline{I})$ est elle compacte ?

Exercice II. Transformée de Fourier.

Soit $I =]-\pi, \pi[$. On note $H^1_p(I)$ le sous-espace des fonctions u de $H^1(I)$ avec conditions aux bords de périodicité, c'est à dire telles que

$$u(\pi) = u(-\pi).$$

1. Montrer que pour toutes fonctions v et $u \in H^1_p(I)$,

$$\int_I v'(x) u(x) dx = - \int_I v(x) u'(x) dx.$$

2. Donner l'expression des normes $H^1(I)$ et $L^2(I)$ des éléments de $H^1_p(I)$ en fonction de leurs coefficients de Fourier.

3. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $u \in H^1_p(I)$ tel que $\int_I u(x)dx = 0$,

$$\int_I |u|^2 dx \leq C \int_I |u'|^2 dx.$$

Déterminer la meilleure constante C possible.

Exercice III. Inégalités de type Poincaré.

Soit Ω un ouvert borné, connexe et régulier de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in H^1(\Omega)$,

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \|f - c\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Indication: On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le Théorème de Rellich.

2. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in H^1(\Omega)$,

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma(f)\|_{L^2(\partial\Omega)}),$$

où $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ désigne l'application trace.

Exercice IV. Caractérisation par différences finies.

1. Montrer que si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, il existe une constante C telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^N$,

$$\|u - \tau_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C|h|, \tag{1}$$

où $\tau_h : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ est défini par $\tau_h u(x) = u(x - h)$.

2. Prouver la réciproque: Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tel qu'il existe $C > 0$ tel que l'estimation (1) soit vérifiée pour tout $h \in \mathbb{R}^N$, montrer que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

3. Généraliser ces résultats à l'espace $H^1(\Omega)$ où Ω est un ouvert régulier.

Exercice V. Convergence faible.

1. Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. Montrer qu'il existe une suite bornée dont on ne peut extraire aucune sous-suite convergente. Exhiber une telle suite dans le cas $H = L^2(]-\pi, \pi[)$.

2. On dit que la suite x_n converge faiblement dans H vers x si et seulement si pour tout $y \in H$, $\langle x_n, y\rangle$ converge vers $\langle x, y\rangle$. Montrer que la limite faible si elle existe est unique, et qu'elle coïncide avec la limite classique (ou limite forte) en dimension finie. Donner un exemple de suite qui converge faiblement mais pas fortement. Montrer que x_n converge fortement vers x si et seulement si elle converge faiblement et $\|x_n\| \to \|x\|$.

3. Montrer que la limite faible x d'une suite x_n vérifie $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$. En supposant que H est séparable (et par conséquent muni d'une base orthonormée dénombrable), montrer que toute suite x_n bornée admet une sous-suite faiblement convergente.

4. Soit Ω est un ouvert borné régulier.

a. Soit $\psi \in L^2(\Omega)$, en utilisant le Théorème de Lax-Milgram, montrer qu'il existe un unique élément $\varphi \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi + u\varphi dx = \int_\Omega u\psi dx$$

pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

b. D'après le Théorème de Rellich, on sait que si u_n est une suite bornée de $H^1(\Omega)$, il existe une sous-suite (que nous noterons à nouveau u_n par commodité) telle que

$$u_n \to u \text{ dans } L^2(\Omega),$$

où $u \in L^2(\Omega)$. Montrer que, quitte à extraire une sous-suite, u_n converge faiblement vers u dans $H^1(\Omega)$ (utiliser la question **a.**). Montrer que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \liminf \|u_n\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2}$$

et que si $u_n \in H_0^1(\Omega)$ alors $u \in H_0^1(\Omega)$.
5. Exhiber un exemple pour lequel l'inégalité (2) est stricte.

Exercice VI. Inégalités de Sobolev.
1. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$\|f\|_{L^6} \leq C\|\nabla f\|_{L^2}.$$

Indication: On pourra utiliser l'identité $|f(x)|^4 = \int_{-\infty}^{x} 4f^3 \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$, et montrer qu'il existe $F_1(x_2, x_3)$, $F_2(x_1, x_3)$ et $F_3(x_1, x_2)$ telles que

$$|f(x)|^6 \leq F_1(x_2, x_3)F_2(x_1, x_3)F_3(x_1, x_2).$$

En déduire que l'inégalité reste vraie pour toute fonction $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$.
2. Montrer qu'une propriété de ce type pour les fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telle que $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, n'est possible que sous la relation $p = 2n/(n-2)$. On admettra cette inégalité pour $n > 3$.
3. Montrer que $H^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^p(\Omega)$ avec $p = 2n/(n-2)$, pour Ω ouvert régulier (on pourra utiliser le théorème de prolongement).
4. Montrer que ces injections ne sont pas compactes (indication: on pourra considérer une suite de fonctions du type $k^{-n/p} f(\cdot/k)$).