TD7 Analyse Numérique et Optimisation

Elements finis 1D

Exercice 1. Eléments finis de Lagrange.

1. Eléments de Lagrange: pour $m > 0$ entier fixé et $h = 1/N$ on considère les espaces

$$V_h := \{f \in C^0([0,1]), \quad f_{|[jh,(j+1)h]} \in \Pi_m\}.$$

où Π_m est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à m. Exhiber une base de cet espace ainsi qu'un opérateur d'interpolation linéaire r_h de H^1 sur V_h tel que pour tout élément v_h de V_h on ait $r_h(v_h) = v_h$.

2. a. Montrer que r_1 est une application linéaire continue sur $H^1([0,1])$.

b. Montrer que pour $1 \leq n \leq m+1$, il existe une constante C telle que pour tout $u \in H^n(]0,1[)$,

$$\|r_1 u - u\|_{H^1} \leq C\|u^{(n)}\|_{L^2}. \tag{1}$$

Indication :

Soit R_{n-1} la projection orthogonale L^2 sur l'ensemble des polynômes de degré au plus $n-1$. Montrer que pour tout $u \in H^n(]0,1[)$, et $n \leq m+1$,

$$u - r_1 u = v - r_1 v, \text{ où } v = u - R_{n-1}u.$$

En supposant que l'inégalité (1) est fausse pour tout C, construire une suite de fonctions $v_k \in H^n(]0,1[)$ orthogonales à l'ensemble des polynômes de degré $n-1$, telles que $\|v_k\|_{H^1} = 1$, $\|v_k^{(n)}\|_{L^2} \to 0$. Munir H^n de la norme $\|u\|_{L^2} + \|u^{(n)}\|_{L^2}$ pour conclure.

c. Montrer que pour $1 \leq n \leq m+1$, il existe une constante C telle que pour tout $u \in H^n(]0,1[)$,

$$\|r_h u - u\|_{L^2} \leq Ch^n\|u^{(n)}\|_{L^2}$$

Montrer de même qu'il existe une constante C telle que pour tout $u \in H^n(]0,1[)$,

$$\|(r_h u)' - u'\|_{L^2} \leq Ch^{n-1}\|u^{(n)}\|_{L^2}$$

3. Quelle est l'image de $H_0^1(]0,1[)$ par l'application r_h ?

4. En déduire une estimation d'erreur pour la méthode de Galerkin sur V_h pour le problème

$$-u'' = f \text{ sur }]0,1[; \quad u(0) = u(1) = 0.$$

suivant la régularité de f. A-t-on a priori intérêt à utiliser $m > 1$ si f est seulement L^2 ?

Exercice 2. Lemme de Aubin-Nitsche.

On considère le problème de la question 4 de l'exercice 1 et sa discrétisation dans l'espace V_h des éléments P_1 de Lagrange. Montrer que l'on a l'estimation

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2\|u''\|_{L^2}.$$

Indication : considérer le problème auxiliaire $-w'' = u - u_h$ avec les mêmes conditions aux limites, et utiliser w et son approximation $r_h w$ dans V_h pour estimer $\|u - u_h\|_{L^2}^2$.

Exercice 3. Methode spectrale.

1. On considère la base orthonormale de Fourier sur $[0, 1]$ définie par

$$e_p(x) = e^{2i\pi px}, \quad p \in \mathbb{Z},$$

et les espaces d'approximation $V_N = \mathrm{Vect}\{e_p, |p| \leq N\}$. Exprimer pour $u \in H^n_{per}$ (espace des fonctions H^n de période 1), $n \geq 1$, les normes L^2 de u et de ses dérivées dans cette base. En déduire le résultat d'approximation, pour tout $k \leq n$, si $u \in H^n_{per}$

$$\inf_{u_N \in V_N} \|u^{(k)} - u_N^{(k)}\|_{L^2} \leq C_{n,k} N^{-(n-k)} \|u^{(n)}\|_{L^2}.$$

2. En déduire des estimations d'erreur pour la méthode de Galerkin dans V_N (restreint aux fonctions à valeurs réelles) appliquée au problème

$$-[au']' + bu = f \;\text{ sur }\;]0, 1[\;\; u(0) = u(1),$$

avec $a(x) > a > 0$ et $b(x) > b > 0$ fonctions continues périodiques, suivant la régularité de la solution. Quelle est la forme de la matrice de rigidité dans le cas où a et b sont constantes ? Quels sont les avantages et les inconvénients de cette méthode dans le cas général ?