TD8 Analyse Numérique et Optimisation

Théorie spectrale

Exercice I. Valeurs propres du Laplacien dans un rectangle

1. Déterminer les solutions du problème de valeurs propres suivant :

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u \quad \text{dans }]0, L[, \quad u(0) = u(L) = 0. \tag{1}$$

Utiliser les coefficients d'une décomposition d'une fonction u sur cette base pour caractériser l'appartenance aux espaces $L^2(]0, L[)$, $H_0^1(]0, L[)$, $H^2(]0, L[) \cap H_0^1(]0, L[)$.

2. Calculer les vecteurs et valeurs propres en utilisant les conditions aux limites suivantes: $u'(0) = u'(L) = 0$; $u(0) = 0, u'(L) = 0$; $u'(0) = 0, u(L) = 0$.

3. On pose $\Omega =]0, L_1[\times]0, L_2[$. Utiliser les résultats de la question 1 pour résoudre le problème de valeurs propres :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

On justifiera avec soin le fait que l'on a obtenu toutes les valeurs propres. En déduire une caractérisation des espaces $L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

4. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres du Laplacien lorsque l'on change les conditions aux limites en remplaçant la condition de Dirichlet homogène par la condition de Neumann homogène sur un ou plusieurs des côtés du rectangle Ω.

Exercice II. Application du principe du min-max

1. Soit λ_1 la plus petite valeur propre du Laplacien avec conditions aux bords de Dirichlet. Montrer que λ_1^{-1} est la plus petite constante C possible dans l'inégalité de Poincaré : $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega |v|^2 \leq C \int_\Omega |\nabla v|^2$$

Indication: On pourra utiliser la Proposition **7.3.4** de Courant-Fisher du cours.

2. Soit $\Omega_1 \subset \Omega_2$ deux ouverts bornés régulier de $\mathbb{R}^N$, et λ_n^1 (resp. λ_n^2), $n \geq 1$, les valeurs propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet homogène dans le domaine Ω_1 (resp. Ω_2). On suppose ses valeurs propres rangées par ordre croissant et répétées autant de fois que leur multiplicité.

Montrer que

$$\forall k \geq 1, \quad \lambda_k^1 \geq \lambda_k^2. \tag{3}$$

Pourquoi les petits tambours produisent-ils des sont plus aigus que les gros (indépendamment de leur forme) ?

3. Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de $\mathbb{R}^N$ et Γ une portion de $\partial\Omega$ de mesure > 0. On considère, pour $\rho > 0$, les valeurs propres $\lambda_k(\rho)$ du Laplacien avec les conditions aux limites mêlées : $u = 0$ sur Γ, et $\nabla u \cdot n + \rho u = 0$ sur $\partial\Omega \setminus \Gamma$.

Montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda_k(\rho) \leq \lambda_k. \tag{4}$$

Montrer que l'application $\rho \mapsto \lambda_k(\rho) \in \mathbb{R}_+$ est une fonction croissante de $\rho > 0$.

Exercice III. Approximation variationnelle des problèmes spectraux

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On considère une suite $\mathcal{T}_h$ de maillages triangulaires réguliers de Ω. Soit V_{0h} le sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ défini par la méthode des éléments finis P_1. Soit (λ_i, u_i) les valeurs et vecteurs propres (orthonormés $L^2(\Omega)$) du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes, les valeurs propres étant rangées par ordre croissant :

$$\left.\begin{array}{ll} -\Delta u_i = \lambda_i u_i & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega. & \end{array}\right\} \tag{5}$$

1. Quelle est l'approximation variationnelle dans V_{0h} associée au problème (**??**).

2. On cherche à prouver la convergence des valeurs propres $\lambda_{i,h}$ de l'approximation variationnelle vers λ_i. On note W_i l'espace vectoriel engendré par les i premiers vecteurs propres du Laplacien.

A l'aide du principe de min-max, montrer que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n_{dl}$,

$$\lambda_i \leq \lambda_{i,h}.$$

(n_{dl} est la dimension de V_{0h}).

3. Il nous reste à majorer $\lambda_{i,h}$. A cet effet, on note que pour tout W_h sous espace de V_{0h} de dimension i, on a

$$\lambda_{i,h} \leq \max_{v_h \in W_h \setminus \{0\}} \left(R(v_h) = \frac{a(v_h, v_h)}{\|v_h\|^2_{L^2(\Omega)}} \right). \tag{6}$$

$(a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx)$. En choisissant convenablement W_h, on obtiendra dans les questions qui suivent l'estimation recherchée.

On note Π_h la projection orthogonale de H_0^1 sur V_{0h}:

$$\forall v_h \in V_{0h}, \qquad \int_\Omega \nabla(\Pi_h u - u) \cdot \nabla v_h dx = 0,$$

et $\Pi_h u \in V_{0h}$.

a. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} \|\Pi_h u - u\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

b. Montrer que pour tout $u \in W_i$,

$$\|\Pi_h u - u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \left(\sum_{l=1}^{i} \|\Pi_h u_l - u_l\|^2_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

En déduire que

$$\lim_{h \to 0} \sup_{u \in W_i \setminus \{0\}} \frac{\|\Pi_h u - u\|_{H^1(\Omega)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} = 0.$$

c. Montrer que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(\Pi_h u, \Pi_h u) \leq a(u, u).$$

d. En choisissant $W_h = \Pi_h(W_i)$ dans (**??**), montrer que pour h assez petit

$$\lambda_{i,h} \leq \lambda_i \max_{u \in W_i} \frac{\|u\|_{L^2}^2}{\|\Pi_h u\|_{L^2}^2}.$$

En déduire que $\lambda_{i,h} \to \lambda_i$ lorsque $h \to 0$.

Exercice IV. Schéma implicite pour l'équation de la chaleur

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit un temps final $T > 0$ et une donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$. Soit $u \in L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega))$ la solution de l'équation de la chaleur suivante

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, t = 0. \end{array} \tag{7}$$

1. Montrer que pour $0 \leq t \leq T$,

$$||u(t)||_{L^2(\Omega)} \leq ||u_0||_{L^2(\Omega)} e^{-\lambda_1 t}$$

où λ_1 est la plus petite valeur propre du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

2. On introduit le schéma suivant, continu en espace et discrétisé en temps :

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{\Delta t}(u^{n+1} - u^n) - \Delta u^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega \\ u^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \tag{8}$$

Proposer une formulation variationnelle du problème (**??**).

3. Quel est l'ordre en temps du schéma (**??**) ?

4. Montrer que $\int_\Omega (u^n)^2 dx$ décroît avec n, ce pour tout $\Delta t > 0$.

5. Proposer un plan de travail pour la résolution numérique du problème (**??**) sur ordinateur.