TD9 Analyse Numérique et Optimisation
Equations d'évolution

Exercice I. Approximation implicite des équations paraboliques

1. On considère l'approximation implicite suivante de l'équation de la chaleur (dans Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$): $u^0 = u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n \in H_0^1(\Omega)$ est donnée par:

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} \; = \; \Delta u^n \, + \, f \tag{1}$$

où $\tau > 0$ est un pas de temps, et $f \in L^2(\Omega)$ est un terme source (indépendant du temps, pour simplifier). Justifier l'existence de u^n.

2.a. En prenant comme fonction test $u^n - u^{n-1}$ dans le problème variationnel, montrer que

$$\int_\Omega \frac{\left(u^n - u^{n-1}\right)^2}{\tau} \, dx \; + \; \mathcal{E}(u^n) \; \leq \; \mathcal{E}(u^{n-1}) \tag{2}$$

où l'énergie $\mathcal{E}(u)$ est donnée par $\int_\Omega |\nabla u|^2/2 - fu \, dx$.

b. En déduire que l'énergie $\mathcal{E}(u^n)$ est bornée, uniformément en n.

3.a On introduit les fonctions (respectivement, constante et affine par morceaux en temps)

$$u_\tau(x,t) = u^n(x)$$

lorsque $t \in ((n-1)\tau, n\tau]$ et

$$\hat{u}_\tau(x,t) \; = \; u^{n-1}(x)(1-\theta) + u^n(x)\theta$$

lorsque $t = ((n-1)+\theta)\tau$, $0 \leq \theta \leq 1$, définies pour $t \geq 0$. Montrer (à partir de la question précédente) que $\|u^{n-1} - u^n\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\tau}$. En déduire que $\|u_\tau(t) - \hat{u}_\tau(t)\|_{L^2(\Omega)} \to 0$, uniformément en temps, lorsque $\tau \to 0$.

b. Que vaut $\partial \hat{u}_\tau / \partial t$? On se fixe $T > 0$. Montrer que $\hat{u}_\tau$ est uniformément bornée dans $H^1(\Omega \times]0,T[)$ (On montrera séparément que $\hat{u}_\tau$ est bornée dans $L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega))$, et que $\partial \hat{u}_\tau / \partial t$ est bornée dans $L^2(]0,T[; L^2(\Omega)))$.

4. En déduire l'existence d'une suite $\tau_k \to 0$ telle que $\hat{u}_{\tau_k}$ converge dans $L^2(\Omega \times]0,T[)$ vers une fonction $u(x,t)$. On rappelle qu'on a dans ce cas $u \in H^1(\Omega \times]0,T[)$. Que peut-on dire de u_{τ_k} ?

5. Montrer que si $\phi \in C_c^\infty(\Omega \times [0,T[)$, on a

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \hat{u}_\tau}{\partial t} \phi + \nabla u_\tau \cdot \nabla \phi - f\phi \, dxdt \; = \; 0.$$

En déduire qu'au sens variationnel, u résout

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} \; = \; \Delta u \, + \, f \quad \text{dans } \Omega \times]0,T[\,, \\ u(t=0) = u_0 \end{cases} \tag{3}$$

6. Si u est une solution régulière de (3), montrer que pour tout temps t,

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt \; = \; \mathcal{E}(u(0)) - \mathcal{E}(u(t))\,.$$

L'estimation ci-dessus (avec $\leq$ à la place de $=$) est ce qu'on appelle une "estimation *a priori*": on sait qu'elle est vraie pour des solutions assez régulières de (3), avant de savoir si de telles solutions existent. La technique utilisée dans cet exercice, consistant à chercher un problème approché qu'on sait résoudre, et dont les solutions vont vérifier une estimation *a priori* du problème limite, puis à utiliser cette estimation pour passer à la limite, est une des méthodes les plus importantes de démonstration d'existence pour des EDPs.

Exercice II. Soit Ω un ouvert régulier, borné de $\mathbb{R}^n$. On étudie l'équation des plaques

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \Delta(\Delta u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u(t,x) = \partial_n u(t,x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0, & \\ \partial_t u(0,x) = u_1 & \end{cases}$$

1. Déterminer la formulation variationnelle associée à ce problème d'évolution.

2. Prouver l'existence de solution à ce problème variationnel (préciser notamment dans quels espaces on choisit f, u_0 et u_1).

3. Montrer qu'une solution régulière du problème variationnel est solution du problème initial.

Exercice III. Equations de Maxwell.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert régulier borné. On considère les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \partial_t E + \mathrm{rot}\ H = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_t H - \mathrm{rot}\ E = 0 & \text{dans } \Omega \\ E \wedge n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ E(0,x) = E_0(x) & H(0,x) = H_0(x). \end{cases}$$

E et H désignent respectivement le champ électrique et magnétique. On suppose de plus que $\mathrm{div}(E_0) = 0$.

On rappelle que

$$\mathrm{rot}\ (E) = (\partial_y E_z - \partial_z E_y, \partial_z E_x - \partial_x E_z, \partial_x E_y - \partial_y E_x)$$

ainsi que la formule d'intégration par partie

$$\int_\Omega (\mathrm{rot}\ F \cdot G - F \cdot \mathrm{rot}\ G) dx = \int_{\partial\Omega} (n \wedge F) \cdot G d\sigma.$$

On introduit enfin les espaces

$$H(\mathrm{rot}\ ) = \{F \in L^2(\Omega)^3 : \mathrm{rot}\ F \in L^2(\Omega)^3\}$$
$$H(\mathrm{div}; 0) = \{F \in L^2(\Omega)^3 : \mathrm{div}\, F = 0\},$$

munis des normes

$$\|F\|^2_{H(\mathrm{rot}\ )} = \|F\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|\mathrm{rot}\ F\|^2_{L^2(\Omega)^3}$$
$$\|F\|_{H(\mathrm{div};0)} = \|F\|_{L^2(\Omega)^3}$$

On définit l'application γ de $H(\text{rot })$ dans son dual, par

$$\langle \gamma(F), G \rangle_{H(\text{rot })', H(\text{rot })} = \int_\Omega (\text{rot } F \cdot G - F \cdot \text{rot } G) dx.$$

Enfin, on pose

$$H_0(\text{rot }) = \gamma^{-1}(0).$$

1. On suppose que (E, H) est une solution régulière des équations de Maxwell. Montrer que E est solution du problème variationnel consistant à déterminer

$$E(t) \in V = H_0(\text{rot }) \cap H(\text{div}; 0)$$

tel que

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} < E(t), F >_H + a(E(t), F) = 0 \text{ pour tout } F \in V \\ E(0) = E_0, \qquad \partial_t E(0) = -\text{rot } H_0, \end{cases}$$

où $H = H(\text{div}; 0)$ et $a(E, F) = \int_\Omega \text{rot } E \cdot \text{rot } F dx$.

2. Donner un sens au rotationnel faible L^2 et montrer que V et H sont des espaces de Hilbert.

3. Montrer qu'il existe ν tel que pour tout $F \in V$,

$$a(F, F) + \nu \|F\|_H^2 \geq \|F\|_V^2.$$

4. On admettra que V s'injecte continûment dans $H^1(\Omega)^3$ et que V est dense dans H. Montrer que la formulation variationnelle est bien posée.