CORRECTION

Exercice 1. **1.** Consistance.

Il suffit d'utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale qui implique que pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$,

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq h^2 \sup_{y \in [x, x+h]} |f''|.$$

Appliquée à $f = u$, $x = n\Delta t$ et $h = \Delta t$, on en déduit la consistance du schéma explicite avec $C(T, u) = \max_{t \in [0,T]} |u''(t)|$. On obtient le même résultat pour le schéma implicite en appliquant la formule de Taylor à $f = u$, $x = (n+1)\Delta t$ et $h = -\Delta t$.

2. Stabilité.

a. Considérons tout d'abord le schéma implicite. Pour ce dernier,

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 + a\Delta t} u_n.$$

Ainsi,

$$|u_{n+1}| = |1 + a\Delta t|^{-n} |u_0| \leq |u_0|.$$

Le schéma implicite est donc inconditionnellement stable.

Considérons le schéma explicite. On a

$$u_{n+1} = (1 - a\Delta t) u_n.$$

Ainsi, le schéma n'est pas inconditionnellement stable: pour $\Delta t > 2a^{-1}$, $(1 - a\Delta t) < -1$ et $|u_{n+1}|$ n'est pas borné.

b. Le schéma explicite est stable sous la condition $\Delta t \leq 2a^{-1}$.

3. Convergence.

On pose $e_n = u_n - u(n\Delta t)$. On considère tout d'abord le schéma implicite. D'après le résultat de consistance, pour tout n tel que $n\Delta t < T$,

$$|(1 + a\Delta t)u((n+1)\Delta t) - u(n\Delta t)| \leq C(T, u)(\Delta t)^2,$$

ou encore

$$|u((n+1)\Delta t) - \alpha u(n\Delta t)| \leq \alpha C(T, u)(\Delta t)^2,$$

où $\alpha = (1 + a\Delta t)^{-1}$. Comme $u_{n+1} = \alpha u_n$, on a $e_{n+1} - \alpha e_n = u((n+1)\Delta t) - \alpha u(n\Delta t)$. Ainsi,

$$e_{n+1} = \alpha e_n + \epsilon_n,$$

avec $|\epsilon_n| \leq \alpha C(T, u)(\Delta t)^2$. Par récurrence, on en déduit que

$$e_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i \epsilon_{n-i}.$$

Comme $\alpha < 1$ (pour tout Δt), on déduit de l'estimation portant sur ϵ_n que

$$|e_{n+1}| \leq C(T, u) n (\Delta t)^2 = C(T, u) T \Delta t.$$

En suivant un raisonnement analogue, on obtient le même résultat pour le schéma explicite. La convergence dans les deux cas est d'ordre 1 en temps.

4. Cas vectoriel.

a. On introduit le schéma explicite

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = -Au_n,$$

et le schéma implicite

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = -Au_{n+1}.$$

Le premier schéma est de explicite, car u_{n+1} est déterminer à partir de u_n en effectuent un simple produit matrice vecteur. Le deuxième schéma est dit implicite, car le calcul de u_{n+1} nécessite la résolution du système linéaire

$$(\mathrm{Id} + (\Delta t)A)u_{n+1} = u_n.$$

b. Tous les résultat obtenus précédemment se transposent à cette situation. En effet, il existe une base pour laquelle A est diagonalisable en une matrice dont la diagonale n'est constituée que de termes positifs. En décomposant u dans cette base, on obtient que l'équation différentielle initiale est équivalente à la résolution de N équations scalaires indépendantes similaires à l'équation étudiée aux questions 1 à 3. De même, les schémas implicite et explicite sont chacun équivalent à N schémas indépendants respectivement implicites et explicites. La condition de stabilité sur du schéma explicite est

$$\lambda_i \Delta t \leq 2,$$

pour toute valeur propre λ_i de A.

Exercice 2.

1. Soit u et v deux fonctions régulières, 1-périodiques. Par intégration par partie,

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - [u'v]_0^1.$$

Comme u et v sont 1-périodiques, $[u'v]_0^1 = 0$ et

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx.$$

Ainsi, l'opérateur $u \mapsto -u''$ est symétrique et positif, en effet

$$-\int_0^1 u''(x)u(x)dx = \int_0^1 |u'(x)|^2\,dx \geq 0.$$

2. Il suffit d'effectuer un développement de Taylor à l'ordre 2 en x_i de $u(x_i - \Delta x)$ et de $u(x_i + \Delta x)$.

3. On s'inspire de l'étude effectuée dans le cas continue. Soit U et V des vecteurs N-périodiques,

$$\begin{aligned}
AU.V &= \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{-U_{j+1} + 2U_j - U_{j-1}}{(\Delta x)^2} \right) V_j \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x} \right) \frac{V_j}{\Delta x} - \left(\frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta x} \right) \frac{V_j}{\Delta x} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x} \right) \frac{V_j}{\Delta x} - \sum_{j=2}^{N+1} \left(\frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x} \right) \frac{V_{j-1}}{\Delta x} \\
&= \sum_{j=2}^{N} \left(\frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{V_j - V_{j-1}}{\Delta x} \right) \\
&\quad + \left(\frac{U_1 - U_N}{\Delta x} \right) \frac{V_1}{\Delta x} - \left(\frac{U_1 - U_N}{\Delta x} \right) \frac{V_N}{\Delta x} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{V_j - V_{j-1}}{\Delta x} \right).
\end{aligned}$$

On a effectué une "intégration par partie discrète". Comme précédemment, on en déduit que A est symétrique et positive.

4. a. Déterminer les fonction 1 périodiques u telles que $-u'' = \lambda u$ est un problème classique de prépa. On cherche les solutions sous la forme $u = e^{i\omega t}$. La condition de périodicité implique $\omega = 2\pi k$. De plus, $e^{i\omega t}$ est bien un vecteur propre de valeur propre $\lambda_k = (2\pi k)^2$.

b. On cherche les vecteurs propres de l'opérateur discret sous une forme similaire que celle du cas continu, c'est à dire

$$u_j = e^{i\omega j}.$$

La N-périodicité impose $N\omega = 2\pi k$. Ainsi, $\omega = 2\pi k/N$. Enfin, on a

$$(Au)_j = \left(\frac{-e^{i2\pi k/N} + 2 - e^{-i2\pi k/N}}{(\Delta x)^2} \right) u_j.$$

Ainsi, u_j est bien un vecteur propre de valeur propre

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-e^{i2\pi k/N} + 2 - e^{-i2\pi k/N}}{(\Delta x)^2} \right) &= -\left(\frac{e^{i\pi k/N} - e^{-i\pi k/N}}{\Delta x} \right)^2 \\
&= \left(2 \frac{e^{i\pi k.N} - e^{-i\pi k/N}}{2i\Delta x} \right)^2 \\
&= 4\sin^2(\pi k/N)/(\Delta x)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout k les vecteurs $\cos(2\pi kj/N)$ et $\sin(2\pi kj/N)$ sont des vecteurs propres de valeur propre $4\sin^2(\pi k/N)/(\Delta x)^2$. On vérifie, suivant la parité de N,

qu'on a ainsi obtenu N vecteurs propres linéairement indépendants. Il n'existe donc pas d'autre vecteur propre ou valeur propre.
5. On peut utiliser les schéma explicites et implicites introduits lors de l'exercice précédent. Le schéma implicite est inconditionnellement stable. Le schéma ecplicite est stable sous la condition

$$\sup_k 4\sin^2(\pi k/N)/(\Delta x)^2(\Delta t) \leq 2. \tag{1}$$

Si N est pair, le maximum est atteint pour $k = N/2$. La condition de stabilité est donc

$$2\Delta t \leq (\Delta x)^2.$$

Si N est impair, la condition précédente assure la stabilité. La condition (1) est très légèrement plus faible. Cependant, cela n'a aucune influence pratique (plus N est grand, plus la deuxième condition est proche de la condition suffisante (1)).

Exercice 3.
1. La dérivée seconde de u étant négative, u est concave et pour tout $x \in [0, 1]$,

$$u(x) \geq (1 - x)u(0) + xu(1) = 0.$$

2. Le vecteur u est solution du système obtenu, si et seulement si

$$Au = F,$$

où $F_i = f(x_i)$ et A est la matrice

$$A = (\Delta x)^{-2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Afin de prouver que A est inversible, on montre que A est symétrique, définie positive. A cet effet, on effectue une intégration par partie discrète comme lors de l'exercice précédent. On a

$$\begin{aligned} AU.V &= \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{-U_{j+1} + 2U_j - U_{j-1}}{(\Delta x)^2} \right) V_j \\ &= \sum_{j=2}^{N} \left(\frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{V_j - V_{j-1}}{\Delta x} \right) \\ &\quad + \left(\frac{U_1 - U_0}{\Delta x} \right) \frac{V_1}{\Delta x} - \left(\frac{U_{N+1} - U_N}{\Delta x} \right) \frac{V_N}{\Delta x} \\ &= \sum_{j=1}^{N+1} \left(\frac{U_j - U_{j-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{V_j - V_{j-1}}{\Delta x} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, $AU.U = 0$ si et seulement si $U_j = U_{j-1}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$. Or, comme $U_0 = 0$, on en déduit que $AU.U = 0$ si et seulement si $U = 0$.

Afin de prouver le principe du maximum, on considère tout d'abord le cas $F > 0$. Si u_j n'est pas strictement positif pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, il existe $k \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $u_k < 0$ et tel que u_k réalise le mimimum de u_j sur l'ensemble des indices. Or

$$u_k = (\Delta x)^2 F_k/2 + (u_{k-1} + u_{k+1})/2 \geq (\Delta x)^2 F_k/2 + u_k > u_k,$$

ce qui est absurde. On en déduit le résultat dans le cas $F \geq 0$ en remarquant que u dépend continûment de F.

4. Pour $f = 1$, la solution de l'EDP est $u = x(1-x)/2$. La solution du problème discret est $u_j = j(\Delta x)(1 - j\Delta x)/2$. On vérifie que le maximum de u_j est inférieur ou égal à $1/8$. Pour une donnée quelconque f, la solution du schéma numérique avec second membre $\|f\|_\infty - f$ est positive, d'après le principe du maximum. Ainsi, si $u_j(f)$ désigne la solution du schéma de second membre f, on a

$$u_j(\|f\|_\infty) - u_j(f) \geq 0$$

et

$$u_j(f) \leq \|f\|_\infty u_j(1) \leq \|f\|_\infty/8.$$

De même, on prouve que $-u_j(f) \leq \|f\|_\infty/8$. On a donc bien

$$|u_j(f)| \leq \|f\|_\infty/8.$$

3. On pose

$$\epsilon_j = u''(x_j) + \frac{-u(x_{j+1}) + 2u(x_j) - u(x_{j-1})}{(\Delta x)^2}.$$

On a

$$\begin{aligned}(Ae)_j &= -f_j + \frac{-u(x_{j+1}) + 2u(x_j) - u(x_{j-1})}{(\Delta x)^2} \\ &= \epsilon_j.\end{aligned}$$

Or, comme u est de classe $\mathcal{C}^2$, par développement de Taylor, on a

$$|\epsilon_j| \leq (\Delta x)^2 \|u''\|_\infty.$$

Ainsi,

$$\|e\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|\epsilon\|_\infty \leq \frac{(\Delta x)^2}{8} \|u''\|_\infty.$$