CORRECTION

Exercice I. Laplacien avec condtions aux limites de Neumann.

1. On multiplie l'équation vérifiée par u dans Ω par une fonction $v \in X$. On effectue une intégration par partie, ainsi

$$\int_\Omega -\Delta u(x)v(x)dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

D'après les condtions aux limies de Neumann, on en déduit que

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} guds. \tag{1}$$

La formulation variationnelle associée au problème $(P1)$ consiste donc à déterminer $u \in X$ tel que pour tout $v \in X$, (1) soit vérifié.

Réciproquement, si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ est une solution du problème variationnel, en effectuant les même intégrations parties que pour établir la formulation variationnelle (mais dans l'autre sens), on en déduit que pour tout $v \in X$,

$$\int_\Omega -(\Delta u + f)v dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g\right) v ds = 0. \tag{2}$$

En particulier, pour tout fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, à support compact dans Ω, on a

$$\int_\Omega -(\Delta u + f)\phi dx = 0.$$

On en déduit (cf. Lemme du cours) que $-\Delta u = f$ dans Ω.

L'équation (2) se simplifie sous la forme

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g\right) v ds = 0.$$

Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$. Comme Ω est supposé régulière, on peut construire une fonction $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ telle que $v(x) = \phi(x)$ sur $\partial\Omega$. De l'équation précédente, on en déduit que pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$,

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g\right) \phi ds = 0.$$

D'où on déduit (cf. Lemme du cours) que

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

2. L'équation de la chaleur $(P1)$ ne peut avoir de solution que si le flux de chaleur total apporté au solide Ω est nul, c'est à dire si

$$\int_\Omega f dx + \int_{\partial\Omega} g ds = 0.$$

Afin d'établir cette égalité, il suffit d'appliquer la formulation variationnelle à la fonction test $v = 1$.

3. On introduit la fonctionnelle

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx - \int_{\partial\Omega} g u ds.$$

Un calcul simple nous permet de montrer que

$$E(u+v) = E(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_\Omega f v dx - \int_{\partial\Omega} g v ds. \quad (3)$$

Ainsi, si u est solution du problème variationnel,

$$E(u+v) = E(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq E(u). \quad (4)$$

Ainsi, si u est solution du problème variationnel, u minimise E sur X. Réciproquement, si u minimise E sur X, on intoduit pour tout fonction $v \in X$ la fonction $J(t) = E(u + tv)$. La fonction J est dérivable et atteint son minimum en $t = 0$. Ainsi, $J'(t) = 0$. On vérifie sans peine que cette équation est équivalente à (1).

4. Soit u_1 et u_2 solutions de $(P1)$. D'après ce qui précéde u_1 et u_2 sont tous deux des minimiseurs de E. En appliquant l'équation (3) à $u = u_1$ et $v = u_2 - u_1$, on en déduit que

$$\int_\Omega |\nabla(u_2 - u_1)|^2 dx = 0.$$

Comme Ω est un connexe, on en déduit que $u_1 - u_2$ est une constante.

Exercice II. Equation des plaques.

1. On multiplie l'équation vérifiée par u dans Ω par une fonction test régulière v telle que $v = \partial v/\partial n = 0$ sur $\partial\Omega$. On intègre l'équation obtenue sur Ω. Par intégrations par partie successives, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta(\Delta u) v dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} v ds - \int_\Omega \nabla(\Delta u).\nabla v dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} v - \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} ds + \int_\Omega \Delta u.\Delta v dx = \int_\Omega f u dx.\end{aligned}$$

Comme $v = \partial v/\partial n = 0$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que

$$\int_\omega \Delta u \Delta v dx = \int_\Omega f u dx. \tag{5}$$

La formulation variationnelle associée à $(P2)$ consiste donc à déterminer

$$u \in X = \{w \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) : u = \partial u/\partial n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

tel que (5) soit vérifié pour tout $v \in X$.

Réciproquement, si u est une solution de classe $\mathcal{C}^4$ au problème variationnel obtenu, en effetuant les intégrations par partie inverses de celles effectuées pour obtenir la formulation variationnelle, on montre

$$\int_\Omega (\Delta(\Delta u) - f) v dx = 0,$$

pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact. On en déduit que $\Delta(\Delta u) = f$ sur Ω (cf. Lemme du cours).

Exercice III. Conditions de transmission.

Soit v une fonction de X. En multipliant l'équation vérifiée par u_2 par v, on en déduit, par intégration sur Ω_2, suite à une intégration par partie que

$$\int_{\Omega_2} k_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega_2} k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} v ds = \int_{\Omega_2} f v dx.$$

En procédant de même pour u_1, on montre que

$$\int_{\Omega_1} k_1 \nabla u_2 \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega_1} k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} v ds = \int_{\Omega_1} f v dx.$$

En additionnant les deux équations obtenues, on en déduit que

$$\int_\Omega k(x) \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx. \tag{6}$$

La formulation variationnelle consiste à trouver $u \in X$ tel que pour tout $v \in X$, (6) soit vérifié.

Réciproquement, si u est solution du problème variationnel obtenu, en effectuant les intégrations par partie inverses que celles effectuées ci-dessus, on obtient

$$\int_{\Omega_1} (\Delta u_1 + f u_1) v dx + \int_{\Omega_2} (\Delta u_2 + f u_2) v dx + \int_{\partial\Omega_1} \left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) v dx = 0.$$

En appliquant cette équations à des fonctions v régulières à support compact dans Ω_1 ou Ω_2, on en déduit que

$$-k_1 \Delta u_1 = f \text{ sur } \Omega_1 \text{ et } -k_2 \Delta u_2 = f \text{ sur } \Omega_2.$$

Ainsi, pour toute fonction $v \in X$,

$$\int_{\partial\Omega_1} \left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) v dx = 0,$$

d'où on déduit la continuité des flux de chaleur à l'interface en procédant comme à l'Exercice I.

Exercice IV. Conditions de Dirichlet non homogènes.

On se ramène à un problème de Dirichlet avec condtions aux limites homogènes en introduisant la variable intermédaire $w = u - g$. On vérifie que w est solution de l'équation de la chaleur avec conditions de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} -\Delta w = \Delta g & \text{sur } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La formulation variationnelle associée consiste à déterminer

$$w \in X = \{v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

tel que poue tout $v \in X$,

$$\int_\Omega \nabla w . \nabla v dx = \int_\Omega f w dx$$

(cf. cours).

Exercice V. Equation de convection-diffusion.

On procède comme lors des Exercices précédents. La formualtion variationnelle obtenue consiste à déterminer

$$u \in X = \{v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

tel que pour tout $v \in X$,

$$a(u, v) = L(v),$$

où

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v + V . \nabla u v dx$$

et

$$L(v) == \int_\Omega f v dx.$$

Est-il équivalent de résoudre ce problème variationnel ou de minimiser la fonctionnelle énergie

$$E(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - L(u)$$

associé à ce problème ? La réponse est non. En effet, En intégrant par partie l'intégrale $\int_\Omega (V . \nabla u) u dx$, on montre que

$$\int_\Omega (V . \nabla u) u dx = - \int_\Omega (V . \nabla u) u dx - \int_\Omega (\operatorname{div} V) |u|^2 dx.$$

En d'autres termes,

$$\int_\Omega (V.\nabla u) u dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\operatorname{div} V)|u|^2 dx. \tag{7}$$

Comme $\operatorname{div} V = 0$, on en déduit que

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - L(u).$$

On obtient la même fonctionnelle que celle découlant de l'étude du Laplacien avec conditions aux bords de Dirichlet! Minimiser $E(u)$ équivaut à résoudre ce dernier problème et non le problème de convection-diffusion proposé (en particulier la donnée V n'apparaît pas dans l'expression de E). L'équivalence d'un problème variationnel avec un problème de minimisaiton ne peut-être établie que lorsque la forme bilinéaire a apparaissant dans la formulation variationnelle est symétrique (ce qui n'est pas le cas ici).

Soit u_1 et u_2 deux solutions du problème variationnel. Pour tout $v \in X$, on a

$$\int_\Omega (\nabla(u_1 - u_2)) v dx + \int_\Omega V.\nabla(u_1 - u_2) v dx = 0.$$

En appliquant cette éaglité à $v = u_1 - u_2$, on obtient d'après (7) que

$$\int_\Omega |\nabla(u1 - u_2)|^2 - \frac{1}{2}(\operatorname{div} V)|u_1 - u_2|^2 dx = 0.$$

Comme $\operatorname{div} V = 0$, on en déduit que $\nabla(u_1 - u_2) = 0$, et comme $u_1 = u_2 = 0$ sur $\partial\Omega$ que $u_1 = u_2$. Si $(\operatorname{div} V)(x) > 0$ pour certains $x \in \Omega$, le raisonnement précédent ne s'applique plus, et on ne peut prouver de résultat d'unicité au problème $(P4)$.