Exercice I. Espaces de Sobolev 1D.
1. Soit $\varphi(x)$ défini par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ sinon }. \end{cases}$$

La fonction φ est dérivable presque partout et

$$g(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x)}{t} = 0$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Cependant φ ne possède pas de dérivée faible L^2. En effet, pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) u'(x) dx = \int_0^\infty u'(x) dx = u(1) - u(0).$$

Afin de prouver que φ n'admet pas de dérivée faible L^2, il suffit de prouver que pour tout n, il existe $u_n \in L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) u_n'(x) dx > n \|u_n\|_{L^2}.$$

Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u(0) = 1$ et de support inclus dans $]-1/2, 1/2[$. On pose

$$u_n(x) = n^{1/2} u(xn).$$

On a

$$\|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = n \int_{\mathbb{R}} u(xn)^2 dx = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Ainsi, pour toute constante C, il existe n tel que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) u_n'(x) dx = n^{1/2} > C\|u\|_{L^2} = C\|u_n\|_{L^2},$$

et φ n'appartient pas à $H^1(\mathbb{R})$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$,

$$\int_I u(x)\varphi'(x) dx = \int_0^1 x\varphi'(x) dx = -\int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Ainsi, u admet une dérivée faible $L^2(I)$ et

$$u'(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Plus généralement, soit u est une fonction continûment différentiable sur $\overline{I}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(a_i) \in [-1,1]^N$ tels que $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $a_i < a_j$ pour tout $i < j$ et $u|_{]a_i,a_{i+1}[} \in \mathcal{C}^1(]a_i, a_{i+1}[)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_{-1}^{1} u\varphi'(x)dx = \sum_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} u\varphi'(x)dx$$
$$= \sum_i u(a_{i+1})\varphi(a_{i+1}) - u(a_i)\varphi(a_i) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} u'\varphi(x)dx = -\int_{-1}^{1} u'\varphi(x)dx.$$

Ainsi, u admet une dérivée faible L^2 qui coïncide avec la dérivée classique de u.

3. On considère dans un premier temps le cas $I = \mathbb{R}$. Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$|u(x)|^2 = 2\int_{-\infty}^{x} u(t)u'(t)dt \leq 2\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}\|u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}^2.$$

Ainsi,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}\|u\|_{H^1(\mathbb{R})} \tag{1}$$

Soit u un élément quelconque de $H^1(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R})$, il existe une suite $u_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$u_n \to u \text{ dans } H^1(\mathbb{R}).$$

D'après l'estimation (1), on en déduit que u_n est de Cauchy dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et qu'il existe $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ tel que

$$u_n \to v \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} u_n(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)dx$$

car $u_n \to u$ dans $L^2(\mathbb{R})$. D'autre part,

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} u_n(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)dx,$$

car u_n converge vers v dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Ainsi, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} (v-u)(x)\varphi(x)dx = 0.$$

On en déduit que $u(x) = v(x)$ presque partout. Ainsi, u admet un représentant continu (que l'on note en général également u par commodité) uniformément borné.

Si l'intervalle I est un ouvert quelconque, on peut envisager deux méthodes. La plus simple consiste à utiliser le Théorème de prolongement des fonctions de $H^1(I)$ sur $\mathbb{R}$ et à se ramener au cas précédent. En effet, il existe une application continue linéaire $P : H^1(I) \to H^1(\mathbb{R})$ continue. D'après ce qui précède, Pu admet un représentant continu tel que

$$\|Pu\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}\|Pu\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

En particulier, u admet un représentant continu sur I et

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|Pu\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}\|Pu\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Enfin, comme P est continue, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{H^1(I)}.$$

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite d'admettre (ou de prouver, ce qui est relativement facile) le Théorème de prolongement. Une autre approche consiste à obtenir une preuve directe. Notons que la preuve précédente s'applique dès que I n'est pas borné. Supposons I borné. Dans un premier temps, on cherche à exprimer la variation de $u(x)$ à $u(y)$ en fonction de la norme H^1 de u pour des éléments x et y de I. A nouveau (c'est une idée très générale), il suffit de considérer des fonctions u régulières $\mathcal{C}^\infty(I) \cap H^1(I)$ puis d'obtenir le résultat général par densité. On a

$$|u(x)|^2 - |u(y)|^2 = 2\int_y^x u'(t)u(t)dt \leq 2\|u'\|_{L^2}\|u\|_{L^2}.$$

Il suffit d'intégrer cette équation sur I par rapport à la variable y pour conclure que

$$|\Omega||u(x)|^2 \leq 2|I|\|u'\|_{L^2}\|u\|_{L^2} + |I|\|u\|_{L^2}^2 \leq (1 + 2|I|)\|u\|_{H^1}^2.$$

4. Soit $u \in C^\infty(\overline{I})$. Soit x et $y \in I$, on a

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)dt$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_y^x |u'(t)|\,dt \leq \left(\int_y^x dt\right)^{1/2} \left(\int_y^x |u'(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Ainsi,

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u\|_{H^1(I)} \left(\int_y^x dt\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Les fonctions $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{I})$ étant dense dans $H^1(I)$, et l'application qui à tout u de $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{I})$ associe $u(x)$ étant continue sur $H^1(i)$, on en déduit que l'inégalité (2) est vraie pour tout $u \in H^1(I)$.

Soit u_n une suite bornée de fonctions dans $H^1(I)$. L'inégalité (2) implique que la famille u_n est uniformément bornée (il suffit de choisir $\delta = C^{-2}\varepsilon^2$ où C est tel que $\|u_n\|_{H^1(I)} \leq C$ pour tout n). D'après le Théorème d'Ascoli, on en déduit que la famille u_n est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(I)$. En d'autres termes, il existe une sous-suite de u_n convergente dans $\mathcal{C}^0(I)$.

Si l'intervalle I n'est pas compact, le résultat n'est plus valable. En effet, soit u un élément non nul de $H^1(\mathbb{R})$. La suite de fonction $u_n(x) = u(x+n)$ est bornée dans H^1 mais n'admet pas de sous-suite convergente dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On a une perte de compacité “à l'infini”. **Exercice II.** Transformée de Fourier.

1. Pour toute fonction $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{I})$, on a

$$\int_I v'u dx = uv(\pi) - uv(-\pi) - \int_I vu' dx.$$

Les fonctions $\mathcal{C}^\infty(\overline{I})$ étant denses dans $H^1(I)$, on en déduit que l'égalité précédente reste valable pour tout couple u et $v \in H^1(I)$. En particulier, pour tout u et $v \in H^1_p(I)$, on a donc

$$\int_I v'u dx = -\int_I vu' dx.$$

2. Toute fonction de $L^2(I)$ possède une décomposition en série de Fourier. De plus,

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$$

où

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_I u(x)e^{-ikx} dx.$$

Si $u \in H^1(I)$, sa dérivée faible admet elle aussi une décomposition en série de Fourier et

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k e^{ikx},$$

où

$$b_k = \frac{1}{2\pi}\int_I u'(x)e^{-ikx} dx.$$

D'après la formule d'intégration par partie établie à la question précédente, on en déduit que

$$b_k = \frac{-ik}{2\pi}\int_I u(x)e^{-ikx} dx = -ika_k.$$

D'après l'égalité de Parseval, on a donc

$$\|u\|^2_{L^2(I)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 \text{ et } \|u'\|^2_{L^2(I)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|a_k|^2.$$

3. Soit u tel que $\int_I u(x)dx = 0$, on a alors $a_0 = 0$ et

$$\|u\|^2_{L^2(I)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|a_k|^2 = \|u'\|^2_{L^2(I)}.$$

Cette inégalité est optimale: c'est une égalité appliquée à $u(x) = \cos(x)$.

3. Soit u_n une suite bornée dans $H^1_p(I)$. On note a^n_k les coefficients de Fourier associés. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, de toute sous-suite $a_k^{n_p}$, on peut extraire une sous-suite convergente dans $\mathbb{R}$ (le suite étant bornée dans $\mathbb{R}$). Par le procédé d'extraction de sous-suite diagonale, on en déduit qu'il existe une sous-suite u_{n_p} de u_n telle que pour tout k, $a_k^{n_p}$ converge vers un élément a_k de $\mathbb{R}$. De plus, il existe une constante C telle que pour tout p,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k^{n_p}|^2 + k^2 |a_k^{n_p}|^2 \leq C.$$

Par passage à la limite, on en déduit que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 + k^2 |a_k|^2 \leq C$$

et que $u(x) = \sum a_k e^{ikx} \in H^1_p(I)$. Enfin, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|u_{n_p} - u\|^2_{L^2(I)} = \sum_k |a_k - a_k^{n_p}|^2 &= \sum_{|k|\leq N} |a_k - a_k^{n_p}|^2 + \sum_{|k|>N} |a_k - a_k^{n_p}|^2 \\
&\leq \sum_{|k|\leq N} |a_k - a_k^{n_p}|^2 + N^{-2} \sum_{|k|\leq N} k^2 |a_k - a_k^{n_p}|^2 \\
&\leq \sum_{|k|\leq N} |a_k - a_k^{n_p}|^2 + 2N^{-2}(\|u\|^2_{H^1(I)} + \|u_{n_p}\|^2_{H^1(I)}) \\
&\leq \sum_{|k|\leq N} |a_k - a_k^{n_p}|^2 + 4CN^{-2}.
\end{aligned}$$

Soit ε un réel strictement positif, pour $N > 8\sqrt{C}$, on a

$$\|u_{n_p} - u\|^2_{L^2(I)} \leq \sum_{|k|\leq N} |a_k - a_k^{n_p}|^2 + \varepsilon/2.$$

Enfin, pour p assez grand, $|a_k - a_k^{n_p}|^2 \leq \varepsilon/2(2N+1)$ pour tout k tel que $|k| \leq N$ et

$$\|u_{n_p} - u\|^2_{L^2(I)} \leq \varepsilon.$$

Ainsi, u_{n_p} converge vers u dans $L^2(I)$.

Exercice III. Inégalités de type Poincaré.
1. Supposons que pour toute constante C, il existe $f \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \|f - c\|_{L^2(\Omega)} > C\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

On peut donc construire une suite f_n d'éléments de $H^1(\Omega)$ telle que pour tout n,

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \|f_n - c\|_{L^2(\Omega)} > n\|\nabla f_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

On vérifie aisément que l'infimum du terme de gauche est atteint pour $c = \int_\Omega f_n(x)dx/|\Omega|$ ($\|f_n - c\|_{L^2(\Omega)}$ est un polynôme de degré deux en c). On pose

$$u_n = \left(f_n - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f_n dx\right) / \left\|f_n - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f_n dx\right\|_{L^2}.$$

On a alors

$$1 = \|u_n\|_{L^2(\Omega)} > n\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

La suite u_n est bornée dans $H^1(\Omega)$ et d'après le Théorème de Rellich, on en déduit qu'il existe une sous-suite de u_n (notée à nouveau u_{n_k}) convergente dans $L^2(\Omega)$. De plus ∇u_{n_k} converge vers zéro dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, les suites u_{n_k} et ∇u_{n_k} sont de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Il s'en suit que u_{n_k} est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$ et converge dans $H^1(\Omega)$ (et pas uniquement dans $L^2(\Omega)$). Notons u sa limite, on a $\nabla u = 0$. Ainsi, u est égale à une constante (Ω étant connexe). Enfin, $\int_\Omega u(x)dx = 0$, d'où $u = 0$. Or on a également $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$, ce qui est absurde. Ainsi, l'hypothèse effectuée initialement est fausse et il existe une constante C telle que pour tout $f \in H^1(\Omega)$,

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \|f - c\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

2. On raisonne de manière similaire. Supposons que pour tout n, il existe $f_n \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\|f_n\|_{L^2(\Omega)} > n(\|\nabla f_n\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma(f_n)\|_{L^2(\partial\Omega)}),$$

Quitte à remplacer f_n par $f_n/\|f_n\|_{L^2(\Omega)}$, on peut supposer que pour tout n, $\|f_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$. D'après le Théorème de Rellich, f_n étant borné dans $H^1(\Omega)$, il existe une sous-suite (que nous noterons à nouveau f_n) de f_n convergente dans $L^2(\Omega)$ vers un élément $f \in H^1(\Omega)$. A nouveau, $\|\nabla f_n\|_{L^2(\Omega)} \to 0$, et f_n est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. On en déduit que f_n converge vers f dans $H^1(\Omega)$. De plus $\nabla f = 0$. Ainsi, f est égal à une constante. L'application trace étant continue, on a de plus $\gamma(f) = 0$, d'où $f = 0$. Or $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \lim_n \|f_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$, ce qui est absurde puisqu'on a montré d'autre part que $f = 0$.

Exercice IV. Caractérisation par différences finies.
1. Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, on a

$$|u(x) - u(x-h)|^2 = \left|\int_0^1 \nabla u(x - th).hdt\right|^2 \leq |h|^2 \int_0^1 |\nabla u(x-th)|^2\, dt \leq$$

En intégrant cette inégalité sur $\mathbb{R}^N$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x) - u(x-h)|^2 dx &\leq |h|^2 \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^1 |\nabla u(x-th)|^2\, dtdx \\ &= |h|^2 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x-th)|^2\, dxdt \\ &= |h|^2 \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\|u - \tau_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C|h|.$$

Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ quelconque. Il existe $u_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que $u_n \to u$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Comme l'application τ_h est continue de $H^1(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même, on obtient par passage à la limite que l'estimation précédente est vraie pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. D'après le Théorème de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \nabla\varphi.h dx = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} f \frac{\varphi(x+th) - \varphi(x)}{t} dx.$$

Par un simple changement de variable, on a donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \nabla\varphi.h dx = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\tau_h f - f}{t} \varphi(x) dx.$$

En utilisant l'estimation vérifiée par f, on en déduit que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f \nabla\varphi.h dx \right| \leq C|h| \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

et donc $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$.
3. Dans le cas où Ω est un ouvert quelconque régulier, d'après le Théorème de prolongement, il existe un opérateur de prolongement, linéaire continue $P : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ et pour tout compact K de Ω, pour tout h suffisamment petit (tel que $|h| < \text{dist}(K, \partial\Omega)$),

$$\begin{aligned}
\|f - \tau_h f\|_{L^2(K)} &= \|Pf - \tau_h Pf\|_{L^2(K)} \\
&\leq \|Pf - \tau_h Pf\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq |h| \|Pf\|_{H^1(\mathbb{R})} \\
&\leq C|h| \|f\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Réciproquement, si $f \in L^2(\Omega)$ et tel qu'il existe C tel que pour tout compact K de Ω et tout h tel que $|h| < \text{dist}(K, \partial\Omega)$,

$$\|f - \tau_h f\|_{L^2(K)} \leq C|h|,$$

alors $f \in H^1(\Omega)$. En effet, par un raisonnement similaire au cas $\Omega = \mathbb{R}^N$, on montre que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega f(\nabla\varphi.h) dx \leq C|h| \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

et $f \in H^1(\Omega)$.

Exercice V. Inégalités de Sobolev.

1. Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, on a

$$|f(x)|^4 = \int_{-\infty}^{x} 4 f^3 \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

d'où

$$|f(x)|^4 \leq 4 \int_{\mathbb{R}} |f|^3 \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| dx_k.$$

On pose

$$F_1(x_2, x_3) = 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^3 \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| dx_1 \right)^{1/2}.$$

On définit de même $F_2(x_1, x_3)$ et $F_3(x_1, x_2)$ par substitution. On a

$$|f(x)|^6 \leq F_1(x_2, x_3) F_2(x_1, x_3) F_3(x_1, x_2)$$

et par intégration sur Ω,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}^6 &\leq \int_{\mathbb{R}^3} F_1(x_2, x_3) F_2(x_1, x_3) F_3(x_1, x_2) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} F_1(x_2, x_3) \left(\int_{\mathbb{R}} F_2(x_1, x_3) F_3(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 dx_3.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$\|f\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}^6 \leq \int_{\mathbb{R}^2} F_1(x_2, x_3) \left(\int_{\mathbb{R}} F_2(x_1, x_3) dx_1 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} F_3(x_1, x_2) dx_1 \right)^{1/2} dx_2 dx_3.$$

On applique à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on obtient

$$\|f\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}^6 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} F_1(x_2, x_3)^2 dx_2 dx_3 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} F_2(x_1, x_3)^2 dx_1 dx_3 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} F_3(x_1, x_2)^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Enfin,

$$\int_{\mathbb{R}^3} F_1(x_2, x_3)^2 dx = 4 \int_{\mathbb{R}^3} |f|^3 \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| dx.$$

En appliquant (encore une fois et c'est fini) l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^3} F_1(x_2, x_3)^2 dx \leq 4 \|f\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}^3 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

De l'équation (3), on en déduit que

$$\|f\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}^6 \leq 2^3 \|f\|_{L^6}^{9/2} \|\nabla f\|_{L^2}^{3/2}$$

et enfin que

$$\|f\|_{L^6(\mathbb{R}^N)} \leq 4\|\nabla f\|_{L^6}.$$

2. Supposons qu'il existe une constante C tel que pour tout $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{4}$$

On pose $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$. Un calcul simple nous permet de montrer que

$$\|f_\alpha\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = |\alpha|^{-n/p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

et que

$$\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = |\alpha|^{\frac{2-n}{2}}\|\nabla f\|_{L^2}.$$

De (4), on en déduit que pour tout α

$$|\alpha|^{-n/p}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq |\alpha|^{\frac{2-n}{2}}\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

en choisissant $f \neq 0$, on en déduit en faisant tendre α vers 0 et $+\infty$ que

$$\frac{n}{p} = \frac{n-2}{2},$$

où encore que $p = 2n/(n-2)$.
Remarque Afin de retrouver rapidement ce résultat, on raisonne par homogénéité. Si l'unité suivant x est le mètre (par exemple) et f sans dimension, le terme de gauche dans (4) s'exprime en $m^{n/p}$ et le terme de droit en $m^{(n-2)/2}$: La constante C est indépendante de l'unité choisie suivant x (il n'y a pas d'échelle absolue sur $\mathbb{R}^n$). Pour que l'expression ait un sens, on doit donc avoir $n/p = (n-2)/2$ et on retrouve le résultat démontré.
3. De (4), on en déduit que $H^1(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p = 2n/(n-2)$. On note P l'opérateur de prolongement de $H^1(\Omega)$ dans $H^1(\mathbb{R})$. Soit $f \in H^1(\Omega)$,

$$\|Pf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Pf\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C'\|f\|_{H^1(\Omega)},$$

d'où on déduit que $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C'\|f\|_{H^1(\Omega)}.$$

4. Supposons que ces injections soient compactes. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'origine appartient à Ω. Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tel que $f \neq 0$. Pour tout $k > 0$, on pose $f_k = k^{-n/p}f(./k)$. On vérifie que $\|f_k\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)}$ et $\|\nabla f_k\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$. La suite f_k étant bornée dans $H^1(\Omega)$, on en déduirait qu'il existe une suite extraite de f_k (notée f_k) convergeant fortement dans $L^p(\Omega)$. Qui plus est, d'après de Théorème de Lebesgue inverse, on peut choisir cette sous-suite de sorte à ce qu'elle soit convergente presque partout. Or f_k converge presque partout vers zéro. Ainsi, on aurait $f_n \to 0$ dans $L^p(\Omega)$, ce qui est absurde puisque $\|f_k\|_{L^p} = \|f\|_{L^p} \neq 0$.

Exercice VI. Convergence faible.

1. Soit e_n une famille libre et orthonormée de H. La suite e_n répond à la question elle n'est pas de Cauchy et donc n'est pas convergente. Dans le cas $H = L^2(]-\pi,\pi[)$, il suffit de choisir $u_n = \cos(kx)$.

2. Supposons qu'une suite x_n converge faiblement vers x et y, on en déduit que pour tout $z \in H$, $< x-y, z >= 0$. En particulier, en choisissant $z = x-y$, on obtient $\|x-y\| = 0$ et $x = y$. Il y a donc unicité de la limite faible. Dans tous les cas, la convergente classique (ou forte) implique la convergence faible. Si H est de dimension finie N et (e_k) est une base de H. Soit x_n une suite faiblement convergente de H, pour tout $k \in \{1, \cdots, N\}$ $< x_n, e_k >$ est convergente. Notons x^k sa limite, on a

$$x_n = \sum_k < x_n, e_k > e_k \to \sum_k x^k e_k$$

et x_n converge fortement vers $x = \sum_k x^k e_k$.

Si x_n est une suite faiblement convergente vers $x \in H$, on a

$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2 < x, x_n > . \tag{5}$$

Si $\|x_n\| \to \|x\|$, on en déduit que $\|x - x_n\|^2 \to 2\|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0$.

3. En passant à la limite dans (5), on obtient

$$0 \leq \liminf \|x - x_n\|^2 = -\|x\|^2 + \liminf \|x_n\|^2$$

et $\liminf \|x_n\| \leq \|x\|$.

On munit H d'une base orthonormée dénombrable e_k. Soit x_n une suite bornée de H et x_n^k ces coordonnées dans la base e_k. Pour tout k, de toute suite extraite de x_n^k, on peut extraire une sous-suite convergente (x_n^k est borné). Par le procédé d'extraction d'un sous-suite diagonale, on en conclut qu'il existe une sous-suite de x_n (notée x_n) telle que pour tout k, x_n^k converge vers un élément x^k de $\mathbb{R}$. On vérifie sans mal que x_n converge faiblement vers $x = \sum x^k e_k$.

4. a. On définit sur $H^1(\Omega)$ la forme bilinéaire

$$a(\varphi, u) = \int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi + u\varphi dx$$

et la forme linéaire

$$L(u) = \int_\Omega \psi u dx.$$

La forme bilinéaire a est continue et coercive. La forme linéaire L est continue, $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, ainsi, d'après le Théorème de Lax-Milgram, il existe un unique élément $\varphi \in H^1(\Omega)$ tel que pour tout $u \in H^1(\Omega)$,

$$a(\varphi, u) = L(u).$$

b. La suite u_n étant bornée dans $H^1(\Omega)$, il existe une sous-suite faiblement convergente vers un élément v (a priori différent de u) de $H^1(\Omega)$. Soit $\psi \in L^2(\Omega)$. D'après la question **a.** , il existe $\varphi \in H^1(\omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla w . \nabla \varphi + w\varphi dx = \int_\Omega w\psi dx,$$

pour tout $w \in H^1(\Omega)$. En appliquant cette égalité à $w = u_n$, on en déduit que pour tout n,

$$\int_\Omega \nabla u_n.\nabla\varphi + u_n\varphi dx = \int_\Omega u_n\psi dx$$

En passant à la limite, on en déduit que

$$\int_\Omega \nabla v.\nabla\varphi + v\varphi dx = \int_\Omega u\psi dx.$$

En appliquant de nouveau l'égalité précédente à $w = v$, on en déduit que

$$\int_\Omega (v-u)\psi dx = 0.$$

Cette équation étant valable pour tout $\psi \in L^2(\Omega)$, on a $u = v$.

L'inégalité

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \liminf \|u_n\|_{H^1(\Omega)}, \tag{6}$$

découle directement de la faible convergence de u_n vers u dans $H^1(\Omega)$ et de la question **3**. Enfin, si $u_n \in H_0^1(\Omega)$, en appliquant le raisonnement effectué en substituant $H^1(\Omega)$ par $H_0^1(\Omega)$, on montre que u_n converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$ et donc que $u \in H_0^1(\Omega)$.

5. Exemple: $u_n = \cos(nx)/n$.