Exercice I. Conditions de Fourier.
1. On multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction teste $v \in H^1(\Omega)$. On obtient

$$-\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Omega f v dx.$$

Par intégration par partie, il vient

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds = \int_\Omega f v dx.$$

On utilise alors la condition aux limites vérifiée par u sur $\partial\Omega$, d'où on déduit que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} (\alpha u - g) v ds = \int_\Omega f v dx.$$

La formulation variationnelle consiste donc à déterminer $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega),$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx + \alpha \int_{\partial\Omega} u v ds$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds.$$

2. La continuité de la forme bilinéaire a et de la forme linéaire L se déduit de la continuité de l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega$. La seule hypothèse délicate à vérifier afin d'appliquer le Théorème de Lax-Milgram et ainsi prouver l'existence de solution est la coercivité de la forme bilinéaire a. Si $\alpha \leq 0$, il est évident que la forme bilinéaire a n'est pas coercive. A contrario, si $\alpha > 0$, la forme bilinéaire a est coercive. Il suffit d'établir qu'il existe une constante C telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$,

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C a(u,u). \quad (1)$$

En effet, on a alors $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (C+1)a(u,u)$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$. Supposons que (1) ne soit pas vérifié. Dans ce cas, pour tout $n \in N$, il existe u_n tel que

$$\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} > n a(u_n, u_n).$$

Quitte à remplacer u_n par $u_n/\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$, on peut supposer que $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Il s'en suit que la suite u_n est bornée dans $H^1(\Omega)$. L'ouvert Ω étant borné et régulier, il existe donc une sous-suite extraite de u_n (que nous noterons également u_n) par commodité) convergeant vers un élément $u \in H^1(\Omega)$ dans

$L^2(\Omega)$. De plus, comme $a(u_n, u_n)$ converge vers zéro et comme $\alpha \geq 0$, on en déduit que

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \tag{2}$$

et

$$\|u_n\|_{L^2(\partial\Omega)} \to 0. \tag{3}$$

On déduit de la convergence de u_n dans $L^2(\Omega)$ et de (2) que u_n est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. La suite u_n converge donc dans $H^1(\Omega)$. La convergence dans $H^1(\Omega)$ impliquant la convergence dans $L^2(\omega)$, on en déduit que cette limite est u. en passant à la limite dans (2), on en déduit que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

L'application trace étant continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on peut également passer à la limite dans (3) pour en déduire que

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0.$$

Ces deux dernières équations impliquent que $u = \text{Cte} = 0$. Or

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \lim_n \|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1,$$

ce qui est contradictoire et établit la coercivité de a.
Remarque -On a établi l'existence de solution dans le cas $\alpha > 0$. Dans le cas $\alpha \leq 0$, on ne peut pas appliquer directement le Théorème de Lax-Milgram, ce qui ne signifie pas l'absence de solution. Par exemple, si $\alpha = 0$, on retrouve des conditions (classiques) de type Neumann.
3. C'est l'étape la plus simple (la difficulté consiste à prouver le résultat de régularité donné). Soit u une solution de classe $\mathcal{C}^2$ au problème variationnel, par intégration par partie, on établit que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (-\Delta u - f) v dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u - g \right) v ds = 0.$$

En appliquant cette égalité à des fonction v régulières, on en déduit que

$$-\Delta u = f$$

presque partout dans Ω. En fait, comme on a supposé $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, cette égalité à lieu pour tout $x \in \Omega$. On en déduit que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u - g \right) v ds = 0.$$

Comme Ω est régulier, toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$ admet un relèvement $v \in H^1(\Omega)$ (i.e. telle que la trace de v soit égale à φ). Ainsi, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$,

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u - g \right) \varphi ds = 0.$$

De la densité des fonctions régulières dans $L^2(\partial\Omega)$, on en déduit que

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g$$

sur $\partial\Omega$.

Exercice II. Équation de la chaleur dans un tube.
1. On introduit l'espace fonctionnel

$$\begin{aligned} V = \{ & v \in H^1(I^2) : v(1, x_2) = v(-1, x_2) \\ & \text{pour tout } x_2 \in I \text{ et } v(x_1, 1) = v(x_1, -1) = 0 \text{ pour tout } x_1 \in I\}. \end{aligned}$$

Soit u une solution du problème aux limite. On multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test $v \in V$. Suite à une intégration par partie, on obtient

$$\int_{I^2} \nabla u . \nabla v dx - \int_I \frac{\partial u}{\partial n}(1, x_2) v(1, x_2) + \frac{\partial u}{\partial n}(-1, x_2) v(-1, x_2) dx_2 = \int_{I^2} f v dx.$$

Or $\frac{\partial u}{\partial n}(1, x_2) v(1, x_2) + \frac{\partial u}{\partial n}(-1, x_2) v(-1, x_2) = 0$ pour presque tout $x_2 \in I$, ainsi,

$$\int_{I^2} \nabla u . \nabla v dx = \int_{I^2} f v dx.$$

La formulation variationnelle obtenue consiste à déterminer $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$,

$$a(u, v) = L(v),$$

où

$$a(u, v) = \int_{I^2} \nabla u . \nabla v dx$$

et

$$L(v) = \int_{I^2} f v dx.$$

2. Tout d'abord, l'espace V est un sous espace vectoriel vectoriel fermé de $H^1(I^2)$. Ainsi, V est un Hilbert muni de la norme H^1. Les formes a et L sont évidemment continues. La coercivité de a découle de l'existence d'une constante C telle que pour tout $v \in V$,

$$\|v\|^2_{L^2(I^2)} \leq C \|\nabla v\|^2_{L^2(I^2)}.$$

Cette inégalité est classique et peut s'établir par exemple en effectuant un raisonnement par l'absurde (le Théorème de Rellich est applicable, même si I^2 présente des coins). Une autre possibilité afin d'établir cette inégalité consiste à raisonner tout d'abord sur les fonctions régulières et d'étendre l'inégalité par densité à tout élément de V. En effet, soit $v \in \mathcal{C}^\infty(I^2)$ tel que $v(x_1, \pm 1) = 0$ pour tout $x_1 \in I$, on a

$$v(x_1, x_2) = \int_{-1}^{x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, t) dt.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$|v(x_1,x_2)|^2 \leq 2\int_I \left|\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1,t)\right|^2 dt.$$

En intégrant cette inégalité sur I^2, on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{I^2} |v(x_1,x_2)|^2 dx &\leq 2\int_{I^3} \left|\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1,t)\right|^2 dtdx \\ &= 4\int_{I^2} \left|\frac{\partial v}{\partial x_2}(x)\right|^2 dx \\ &\leq 4\|\nabla v\|^2_{L^2(I^2)}.\end{aligned}$$

Les fonctions $\mathcal{C}^\infty(I^2)$ telles que $v=0$ sur $I\times\{-1,1\}$ étant denses dans V, l'inégalité est vérifiée pour tout $v\in V$. D'après le Théorème de Lax-Milgram il existe donc une unique solution u au problème variationnel.

3. Supposons que la solution u du problème variationnel appartienne à $\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Les conditions aux limites de types Dirichlet et périodiques sont automatiquement vérifiées d'après la définition de V. Enfin, en effectuant les intégrations par partie inverses de celles effectuées afin d'établir la formulation variationnelle, on obtient que

$$\int_{I^2}(-\Delta u - f)vdx + \int_I \left(\frac{\partial u}{\partial n}(1,x_2) + \frac{\partial u}{\partial n}(-1,x_2)\right) v(1,x_2)ds = 0$$

pour tout $v\in V$. En particulier, pour toute fonction $v\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_{I^2}(-\Delta u - f)vdx = 0$$

d'où on déduit que $-\Delta u - f = 0$. De plus, pour toute fonction $\varphi\in C_c^\infty(I)$, on peut construire une fonction $v\in V$ telle que $v(1,x_2)=\varphi(x_2)$ pour presque tout $x_2\in I$. Ainsi, pour tout $\varphi\in C_c^\infty(I)$,

$$\int_I \left(\frac{\partial u}{\partial n}(1,x_2) + \frac{\partial u}{\partial n}(-1,x_2)\right) v(1,x_2)ds = 0$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial n}(1,x_2) + \frac{\partial u}{\partial n}(-1,x_2) = 0.$$

Exercice III. Équations de Maxwell.

1.

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathrm{rot}\ \mathbf{v}\chi dx &= \int_\Omega \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\chi - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\chi dx \\ &= \int_{\partial\Omega} v_2\chi n_1 - v_1\chi n_2 ds - \int_\Omega v_2\frac{\partial \chi}{\partial x_1} - v_1\frac{\partial\chi}{\partial x_2}dx \\ &= \int_{\partial\Omega}(n\wedge v)ds + \int_\Omega \mathbf{v}.\mathrm{rot}\ \chi dx\end{aligned}$$

2. Une fonction $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2$ admet un rotationnel faible L^2 si et seulement si il existe $w \in L^2(\Omega)$ telle que pour toute fonction $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \mathbf{v}.\mathbf{rot}\ \chi dx = \int_\Omega w\chi dx.$$

De plus, on note rot $\mathbf{v} = w$.

Montrons que, muni de cette définition, $H(\text{rot}\ ;\Omega)$ est un espace de Hilbert. Soit $\mathbf{u}_n$ une suite de Cauchy de $H(\text{rot}\ ;\Omega)$, $\mathbf{u}_n$ et rot $\mathbf{u}_n$ sont respectivement des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)^2$ et $L^2(\Omega)$. Il existe donc $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2$ et $w \in L^2(\Omega)$ telles que

$$\mathbf{u}_n \to u \text{ dans } L^2(\Omega)^2 \text{ et rot } u_n \to w \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Enfin, pour toute fonction test $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \mathbf{u}_n.\mathbf{rot}\ \chi dx = \int_\Omega (\text{rot } \mathbf{u}_n)\chi dx.$$

En passant à la limite dans cette expression, on en déduit que

$$\int_\Omega \mathbf{u}.\mathbf{rot}\ \chi dx = \int_\Omega w\chi dx,$$

c'est à dire que $\mathbf{u} \in H(\text{rot}\ ;\Omega)$ et $w = \text{rot } \mathbf{u}$.

3. Notons γ l'application trace tangentielle. Par définition, $H_0(\text{rot}\ ;\Omega) = \gamma^{-1}(0)$. L'application γ étant continue, $H_0(\text{rot}\ ;\Omega)$ est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $H(\text{rot}\ ;\Omega)$. C'est donc lui-même un espace de Hilbert.

4. Soit $\mathbf{u}$ une solution du problème aux limites. On multiplie l'équation vérifiée par $\mathbf{u}$ dans Ω par une fonction $\mathbf{v} \in H_0(\text{rot}\ ;\Omega)$. Suite à une intégration sur Ω, il vient

$$\int_\Omega \mathbf{rot}\ (\text{rot } \mathbf{u}).\mathbf{v} + \mathbf{u}.\mathbf{v} dx = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v} dx.$$

D'après la formule d'intégration par partie établie à la question **1**,

$$\int_\Omega (\text{rot } \mathbf{u})(\text{rot } \mathbf{v}) + \mathbf{u}.\mathbf{v} dx = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v} dx.$$

Le problème variationnel consiste donc à trouver $\mathbf{u} \in H_0(\text{rot}\ ;\Omega)$ tel que pour tout $\mathbf{v} \in H_0(\text{rot}\ ;\Omega)$,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}),$$

où

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega (\text{rot } \mathbf{u})(\text{rot } \mathbf{v}) + \mathbf{u}.\mathbf{v} dx,$$

et

$$L(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v} dx.$$

Réciproquement, si $\mathbf{u}$ est une solution régulière du problème variationnel, on a par définition $\mathbf{u} \wedge n = 0$ sur $\partial\Omega$ et par intégration par partie,

$$\int_\Omega (\mathbf{rot}\ (\mathrm{rot}\ u) + \mathbf{u} - \mathbf{f}).\mathbf{v} dx = 0$$

pour toute fonction $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et donc

$$\mathbf{rot}\ (\mathrm{rot}\ u) + \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

.

5. On a déjà montré que $H_0(\mathrm{rot}\ ;\Omega)$ est un espace de Hilbert. La continuité de a et L est évidente. La coercivité de a également, car

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|u\|^2_{H(\mathrm{rot}\ ;\Omega)}.$$

Il existe donc une unique solution au problème variationnel.