CORRECTION

Les références en gras font référence à l'énoncé.

Exercice I. Équations de Darcy.

Première formulation

1. Tout d'abord, notons que si $(\mathbf{u}, p)$ est solution des équations de Darcy, il en est de même pour $(\mathbf{u}, p+C)$, pour toute constante C réelle. En d'autres termes, la pression p est définie à une constante près. Afin de définir p de manière univoque, on peut imposer à la pression p d'être telle que

$$\int_\Omega p dx = 0.$$

L'équation (**1**) est obtenue en multipliant la première équation par une fonction $\mathbf{v}$ et en intégrant sur Ω. L'équation (**2**) est obtenue en multipliant la seconde équation par une fonction q à valeur dans $\mathbb{R}$:

$$\int_\Omega (\nabla.\mathbf{u}) q \, dx = 0.$$

Suite à une intégration par partie, on en déduit que

$$-\int_\Omega \mathbf{u}.\nabla q \, dx + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}.\mathbf{n}) q \, ds = 0$$

Or, $\mathbf{u}.\mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Ainsi,

$$b(\mathbf{u}, q) = \int_\Omega \mathbf{u}.\nabla q \, dx = 0.$$

2. Les espaces sont précisément choisis de sorte à ce que chacune des formes introduite soit continue. Pour établir la continuité, il suffit d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

La coercivité de la forme bilinéaire a est évidente: a n'est rien d'autre que le produit scalaire de $L^2(\Omega)^2$!

3. On a

$$V = \bigcap_{q \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)} b(., q)^{-1}(0).$$

L'application b étant continue, $b(., q)^{-1}(0)$ est un fermé. L'espace V comme intersection infinie d'espaces fermés, est donc fermé. Ainsi, V est un sous-espace vectoriel fermé d'un Hilbert. C'est donc un Hilbert.

Dans cette espace, le problème se réduit à trouver $\mathbf{u} \in V$ tel que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v} dx, \quad (1)$$

pour tout $\mathbf{v} \in V$. D'après le théorème de Lax-Milgram (ou le Théorème de représentation de Riesz), il existe une unique solution $\mathbf{u}$ à ce problème dépendant continûment de $\mathbf{f}$.

4. La solution $\mathbf{u}$ au problème variationnel (1) est telle que pour tout $\mathbf{v} \in V$,

$$\int_\Omega (\mathbf{u} - \mathbf{f}).\mathbf{v} dx = 0.$$

En d'autres termes, $\mathbf{u} - \mathbf{f} \in V^\perp = 0$ où $V^\perp$ est l'orthogonal de l'espace V dans $L^2(\Omega)$. Or $V = W^\perp$, où

$$W = \{\mathbf{w} \in L^2(\Omega) \ : \ \mathbf{w} = \nabla q, \text{ où } q \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)\}.$$

Ainsi, $\mathbf{u} - \mathbf{f} \in (W^\perp)^\perp = \overline{W}$. Montrons que W est fermé. Soit $\mathbf{w}_n \in W$ une suite convergent vers une élément $\mathbf{w}$ de $L^2(\Omega)$. Il existe $q_n \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ tels que $w_n = \nabla q_n$. Or d'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, il existe une constante C telle que pour tout $q \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$,

$$\|q\|_{H^1} \leq C \|\nabla q\|_{L^2}.$$

Comme ∇q_n est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, q_n est une suite de Cauchy dans $H^1(\omega)$ et il existe $q \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ tel que $q_n \to q$ dans $H^1(\Omega)$. On a donc $\mathbf{w} = \nabla q$ et $w \in W$.

L'espace W et donc fermé et $\mathbf{u} - \mathbf{f} \in W$. il existe donc $p \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ tel que $\mathbf{u} - \mathbf{f} = \nabla p$. Enfin, p dépend continûment de $\mathbf{f}$, en effet,

$$\|p\|_{H^1} \leq C \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)} = C \|\mathbf{u} - \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq C' \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Seconde formulation

5. Soit v_n une suite de Cauchy de $H(\mathrm{div}, \Omega)$, v_n est une suite de Cauchy de $L^2(\Omega)^2$, tandis que $\mathrm{div}\, v_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. il existe donc $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2$ et $q \in L^2(\Omega)$ tels que

$$\mathbf{v}_n \to \mathbf{v} \text{ dans } L^2(\Omega)^2 \text{ et } \mathrm{div}\, v_n \to q \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$, on a (par définition de la divergence faible),

$$\int_\Omega \mathbf{v}_n.\nabla\varphi \, dx = -\int_\Omega (\mathrm{div}\, \mathbf{v}_n)\varphi \, dx.$$

En passant à la limite, on en déduit que

$$\int_\Omega \mathbf{v}.\nabla\varphi \, dx = -\int_\Omega q\varphi \, dx.$$

Ainsi, $\mathbf{v}$ admet une divergence faible L^2 et $\mathrm{div}\, \mathbf{v} = q$. Ainsi, $\mathbf{v}_n$ converge vers $\mathbf{v} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ dans $H(\mathrm{div}, \Omega)$.

6. Pour les fonctions régulières $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^\infty_0(\overline{\Omega})$, on a d'après la formule de Stokes,

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}.\mathbf{n})\varphi \, ds = \int_\Omega (\mathrm{div}\, \mathbf{v})\varphi \, dx + \int_\Omega \mathbf{v}.\nabla\varphi \, dx.$$

Ainsi,
$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}.\mathbf{n})\varphi \, ds \leq \|v\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}.$$
L'application qui à $(\mathbf{v}, \varphi)$ associe $\int_{\partial\Omega}(\mathbf{v}.\mathbf{n})\varphi \, ds$ est continue de $H(\mathrm{div}, \Omega) \times H^1(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et peut donc être prolongée de manière unique en une application de $H(\mathrm{div}; \Omega) \times H^1(\Omega)$. On notera $\gamma(.,.)$ cette application. Enfin, pour toutes fonctions $\mathbf{v} \in H(\mathrm{div}\,\Omega)$ et pour toute fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a
$$\gamma(\mathbf{v}, \varphi) = 0.$$
Ainsi, γ est une forme bilinéaire continue de $H(\mathrm{div}, \Omega) \times H^1(\Omega)/H_0^1(\Omega)$. Or $H^1(\Omega)/H_0^1(\Omega)$ est isomorphe à $H^{1/2}(\partial\Omega)$ par l'application trace. Ainsi, pour tout $\mathbf{v} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$, $\gamma(\mathbf{v}, .)$ est une forme linéaire continue définie sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$. C'est donc un élément de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$.
7. Soit $\mathbf{v} \in X$ une fonction régulière, en multipliant la première équation du système par $\mathbf{v}$, par intégration sur Ω et après une intégration par partie, il vient
$$\int_\Omega \mathbf{u}.\mathbf{v} \, dx - \int_\Omega (\mathrm{div}\,\mathbf{v}) p \, dx + \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{v}.n) \, ds = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v} \, dx.$$
Or comme $\mathbf{v} \in X$, $\mathbf{v}.n = 0$ sur $\partial\Omega$ et
$$\int_\Omega \mathbf{u}.\mathbf{v} \, dx - \int_\Omega (\mathrm{div}\,\mathbf{v}) p \, dx = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v} \, dx.$$
De plus, comme $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0$, on a $b^*(\mathbf{u}, q) = 0$.
8. On note
$$V^* = \{\mathbf{v} \in X \ : \ \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0\}.$$
La solution $\mathbf{u}$ du problème précédent est telle que
$$\int_\Omega \mathbf{u}.\mathbf{v} = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v} dx,$$
pour tout $\mathbf{v} \in V^*$. L'espace V^* est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $H(\mathrm{div}, \Omega)$. Sur cet espace, la norme $H(\mathrm{div}, \Omega)$ et $L^2(\Omega)$ sont équivalentes (car $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$). Ainsi, la forme bilinéaire a est coercive et il existe une solution unique dépendant continûment de $\mathbf{f}$ à ce problème variationnel.

9. Pour tout $\mathbf{v} \in V^*$, on a
$$\int_\Omega (\mathbf{u} - \mathbf{f}).\mathbf{v} dx = 0.$$
On conclut en remarquant que $V = (V^*)^*$ (on est ramené au cas précédent).
10. En prenant la divergence de la première équation du système, on obtient
$$\Delta p = \mathrm{div}\,\mathbf{f} \text{ dans } \Omega.$$
Par contre, on ne retrouve pas directement les conditions aux limites. Supposons que $\mathbf{f}$ soit régulière. Dans Ω,
$$\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}. \tag{2}$$

On multiplie cette équation par ∇q, on $q \in H^1(\Omega)$. On en déduit que

$$\int_\Omega \nabla p.\nabla q \; dx = \int_\Omega \mathbf{f}.\nabla q \, dx. \tag{3}$$

Par intégration par parties (en supposant que p, q et $\mathbf{f}$ sont régulières) on obtient

$$-\int_\Omega \Delta pq \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial n} q ds = -\int_\Omega \nabla.\mathbf{f} q \, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}.\mathbf{n} q ds.$$

On retrouve donc l'équation (2) mais également les conditions aux limites, à savoir

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \mathbf{f}.\mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega$$

Notons que le problème variationnel (3) à toujours un sens, tandis que les équations différentielles associées nécessitent que $\mathbf{f}$ appartienne à $H(\mathrm{div}, \Omega)$ pour avoir un sens.

Exercice II. Conditions de transmission.

1. Le problème variationnel consiste à déterminer $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u, v) = L(v),$$

où

$$a(u, v) = \int_\Omega h(x)\nabla u.\nabla v \, dx \text{ et } L(v) = \int_\Omega f v \, dx.$$

La forme bilinéaire a est continue, en effet

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx \leq \|h\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

La forme linéaire L est trivialement continue, de plus a est coercive. En effet,

$$a(u,) =_i nt_\Omega h(x)|\nabla u|^2 dx \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \alpha C \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

la dernière inégalité découlant de l'inégalité de Poincaré. D'après le Théorème de Lax-Milgram, li existe donc une unique solution au problème variationnel.

2. On suppose que la restriction de la solution u à Ω^+ et Ω^- est régulière. On désigne par n la normale extérieure à Ω^+. Par intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega h(x)\nabla u.\nabla v \, dx &= \int_{\Omega^+} h(x)\nabla u.\nabla v \, dx + \int_{\Omega^-} h(x)\nabla u.\nabla v \, dx \\ &= -\int_{\Omega^+} \nabla.(h(x)\nabla u) \, v dx + \int_\Gamma h^+(x)\frac{\partial u^+}{\partial n} v \, ds \\ &\quad -\int_{\Omega^-} \nabla.(h(x)\nabla u) \, v dx - \int_\Gamma h^-(x)\frac{\partial u^-}{\partial n} v \, ds, \end{aligned}$$

où u^+ et u^- sont définis comme h^+ et h^-. Ainsi, u vérifie

$$\nabla.(h(x)\nabla u) = f \text{ sur } \Omega^+ \cup \Omega^-$$

et

$$\frac{\partial u^+}{\partial n} - \frac{\partial u^-}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Évidemment,

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Exercice III. Régularité du Laplacien.

1. Il suffit de multiplier l'équation vérifiée par u par une fonction test $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$; En intégrant que $\mathbb{R}^N$, puis par parties, on obtient le problème variationnel suivant:

Trouver $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tel que pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u.\nabla v + uv dx = \int_{\mathbb{R}^N} fv dx.$$

2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, par un simple changement de variable, on montre que

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_h v\varphi dx = -\int_{\mathbb{R}^N} vD_h\varphi dx.$$

Or

$$D_h\varphi = \int_0^1 \nabla\varphi(x+th).\frac{h}{|h|}dt,$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} D_h v\varphi dx &= -\int_0^1\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\varphi(x+th).\frac{h}{|h|}v(x)dx \\
&\leq \|\nabla v\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

3. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, pour tout $i = 1, \ldots, N$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} v\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx &= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} vD_{e_i}\varphi dx \\
&= -\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} D_{e_i}v\varphi dx \\
&\leq C\|\varphi\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

4. La fonction $D_h u$ vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(D_h u)\nabla v + D_h uv dx = \int_{\mathbb{R}^N} D_h fv dx = -\int_{\mathbb{R}^N} fD_h v dx.$$

En choisissant $v = D_h u$ dans la formulation variationnelle vérifiée par u, on obtient,

$$\begin{aligned}
\|D_h u\|_{H^1}^2 &= -\int_{\mathbb{R}^N} fD_h(D_h u)dx \\
&\leq \|f\|_{L^2}\|D_h(D_h u)\|_{L^2} \\
&\leq \|f\|_{L^2}\|D_h u\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|D_h u\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2}$, et d'après la question précédente, $D_h u$ appartient à $H^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout h, c'est à dire $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.

5. L'équation vérifiée par $\partial u/\partial x_i$ est obtenue en choisissant $h = e_i$ dans la formulation précédente. Par récurrence, on en déduit que si $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$, on a $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$.

6. Comme $\overline{\omega} \subset \Omega$, il existe $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tel que $\varphi(x) = 1$ pour tout $x \in \omega$. La fonction φu est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. De plus,

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi u) &= u\Delta\varphi + \varphi\Delta u + 2\nabla u \cdot \nabla\varphi \\ &= u\Delta\varphi + (u - f)\varphi + 2\nabla u \cdot \nabla\varphi.\end{aligned}$$

Ainsi, comme $u \in H^1(\Omega)$, on en déduit que $\Delta(\varphi u) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Ainsi, φu appartient à $H^2(\mathbb{R}^N)$ et u appartient à $H^2(\omega)$. En utilisant de nouveau l'expression vérifiée par $\Delta(\varphi u)$, on en déduit que $\Delta(\varphi u)$ appartient à H^1. En effet, u appartient à $H^2(\tilde{\omega})$, où $\tilde{\omega}$ est un ouvert contenant le support de φ et dont l'adhérence est incluse dans Ω. Ainsi, $\nabla u . \nabla\varphi$ appartient à $H^1(\mathbb{R}^N)$. En procédant ainsi par récurrence, on en déduit que $u \in H^{m+2}(\omega)$.