Note: C désigne une constante générique pouvant changer de valeur d'une ligne à l'autre.

Exercice 1. Élément finis de Lagrange.

1. Un polynôme de degré m est défini par la donnée de ses valeurs en $m+1$ points. Pour tout entier i, tel que $0 \leq i \leq m$, on définit les polynômes ψ_i de degré m tels que

$$\psi_i(y_j) = \delta_i^j,$$

pour tout j, $0 \leq j \leq m$, où $y_j = j/m$ et δ_i^j est le symbole de Kronecker. Les polynômes ψ_i sont ainsi définis de manière unique. De plus, on peut en donner une expression explicite

$$\psi_i(y) = \frac{\Pi_{j\neq i}(y - y_j)}{\Pi_{j\neq i}(y_i - y_j)}.$$

On construit aisément une base (Φ_k) de V_h à l'aide des fonctions de base ψ_j. On associe à l'espace V_h l'ensemble des degrés de liberté $x_k = k/(Nm)$, où $k = 0, \ldots, Nm$. Pour tout $k = 0, \ldots, Nm$, il existe un unique couple d'entiers p et q tel que $0 \leq p \leq N$ et $0 \leq q < m$ et $k = pm + q$. Si $q = 0$, on note

$$\Phi_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq ph, \\ \psi_m((x-(p-1)h)/h) & \text{si } x \in [(p-1)h, ph], \\ \psi_0((x-ph)/h) & \text{si } x \in [ph, (p+1)h], \\ 0 & \text{si } x \geq (p+1)h \end{cases}$$

et si $q \neq 0$,

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x \leq ph, \\ \psi_q((x-ph)/h) & \text{si } x \in [ph, (p+1)h], \\ 0 & \text{si } x \geq (p+1)h \end{cases}$$

On vérifie sans mal que l'ensemble des (Φ_k) forme une base de V_h. Enfin, on définit l'opérateur d'interpolation r_h de $H^1(0,1)$ dans r_h par

$$r_h u = \sum_{k=0}^{Nm} u(x_k)\Phi_k.$$

2. a. Supposons que l'esimation annocée soit mise en défaut pour toute constante C. Dans ce cas, il existe une suite u_k d'éléments de H^n telle que

$$\|u_k - r_1 u_k\|_{H^1} > k\|u_k^{(n)}\|_{L^2}.$$

On note R_{n-1} la projection de $H^1(0,1)$ sur l'ensemble des polynômes de degré $n-1$ (pour le produit scalaire L^2 par exemple) et on pose $v_k = u_k - R_{n-1}u_k$. On vérifie que

$$v_k - r_1 v_k = u_k - r_1 u_k$$

et

$$v_k^{(n)} = u_k^{(n)}.$$

Ainsi,

$$\|v_k - r_1 v_k\|_{H^1} > k\|v_k^{(n)}\|_{L^2}. \tag{1}$$

Quitte à remplacer v_k par $v_k/\|v_k\|_{H^1}$, on peut supposer que v_k est borné dans $H^1(0,1)$ et que

$$\|v_k\|_{H^1} = 1. \tag{2}$$

Comme r_1 est une application linéaire continue, il existe C telle que pour tout $u \in H^1(0,1)$,

$$\|u - r_1 u\|_{H^1} \leq C\|u\|_{H^1}.$$

Ainsi, $\|v_k - r_1 v_k\|_{H^1}$ est une suite bornée et d'après (1),

$$\|v_k^{(n)}\|_{L^2} \to 0.$$

Comme v_k est bornée dans H^1, on peut en extraire une sous-suite convergente dans L^2. L'équation ci-dessus nous assure que cette sous-suite (notée également v_k pour simplifier) est en définitive convergente dans $H^n(0,1)$ et que sa limite v est telle que

$$v^{(n)} = 0.$$

Ainsi, v est un polynôme de degré $n-1$. Or v_k étant orthogonal à l'ensemble des polynômes de degré $n-1$, il en est de même pour v et $v = 0$. A contrario, en passant à la limite dans (2), on a $\|v\|_{H^1} = 1$, ce qui est absurde.

b. Pour tout $v \in H^1(]0,1[)$, on a

$$\|r_h v - v\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{j/N}^{(j+1)/N} |r_h v(x) - v(x)|^2 dx.$$

Pour tout $j \in \{0, \ldots, N-1\}$, on pose $w_j(x) = v((x+j)/N)$, on a alors $r_1 w_j(x) = (r_h v)((x+j)/N)$ et par changement de variable,

$$\int_{j/N}^{(j+1)/N} |r_h v(x) - v(x)|^2 dx = h \int_0^1 |r_1 w_j - w_j|^2 dx.$$

Ainsi,

$$\|r_h v - v\|_{L^2(0,1)}^2 = h \sum_{j=0}^{N-1} \|r_1 w_j - w_j\|_{L^2(0,1)}^2.$$

D'après l'inégalité établie à la question **a**, on en déduit que

$$\|r_h v - v\|_{L^2(0,1)}^2 \leq Ch \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^1 |w_j^{(n)}|^2 dx. \tag{3}$$

Enfin, $w_j^{(n)}(x) = h^n v^{(n)}((x+j)/N)$. Ainsi,

$$h \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^1 |w_j^{(n)}|^2 dx = h \sum_{j=0}^{N-1} h^{2n} \int_0^1 |v^{(n)}((x+j)/N)|^2 dx$$

et par changement de variable,

$$h \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^1 |w_j^{(n)}|^2 dx = h^{2n} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{jh}^{(j+1)h} |v^{(n)}(x)|^2 dx.$$

En combinant cette inégalité à l'équation (3), on obtient l'estimation recherchée.

La seconde estimation est obtenue par le même procédé.

3. On introduit

$$V_h^0 = \{u \in V_h \ : \ u(0) = u(1) = 0\}.$$

La restriction de r_h à $H_0^1(]0,1[)$ est une application continue à valeur dans $V_h^0 \subset H_0^1(]0,1[)$. Évidemment les estimations précédentes, valables pour tout $u \in H^1(]0,1[)$, le sont en particulier pour tout $u \in H_0^1(]0,1[)$.

4. Soit u_h la solution $u_h \in V_h^0$ la solution du problème variationnel

$$\int_0^1 u_h' v_h' dx = \int_0^1 f v_h dx$$

pour tout $v_h \in V_h^0$ et $u \in H_0^1(]0,1[)$ la solution du problème variationnel

$$\int_0^1 u' v' dx = \int_0^1 f v dx$$

pour tout $v \in H_0^1(]0,1[)$. On a

$$\begin{aligned}
\|u' - u_h'\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 (u' - u_h')(u' - u_h') dx \\
&= \int_0^1 (u' - u_h')(u' - (r_h u)') dx \\
&\leq \|u' - u_h'\|_{L^2} \|u' - (r_h u)'\|_{L^2},
\end{aligned}$$

d'où

$$\|u' - u_h'\|_{L^2} \leq \|u' - (r_h u)'\|_{L^2}.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on en déduit que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C \|u' - (r_h u)'\|_{L^2} \tag{4}$$

où C est une constante indépendante de u et de h.

Supposons que $f \in H^r(]0,1[)$. Dans ce cas, $u \in H^{r+2}(]0,1[)$. Posons $n = \min(r+2, m+1)$. D'après la question **2**, il existe C tel que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C h^{n-1} \|u^{(n)}\|_{L^2} = C h^{n-1} \|f^{(n-2)}\|_{L^2}.$$

Si f est uniquement L^2, on en déduit que $u \in H^2(]0,1[)$ et l'estimation précédente n'est autre que

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch\|f\|_{L^2}.$$

Cette dernière est indépendante de m. On a donc a priori (et c'est en effet le cas) pas intérêt à utiliser $m > 1$ dans ce cas.

Exercice 2. Lemme de Aubin-Nitsche.

Pour tout $v \in H_0^1(]0,1[)$, on a

$$\int_0^1 w'v'dx = \int_0^1 (u - u_h)vdx.$$

En appliquant cette équation à $v = u - u_h$, on en déduit que

$$\|u - u_h\|_{L^2}^2 = \int_0^1 w'(u - u_h)'dx = \int_0^1 (w - r_h w)'(u - u_h)'dx.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc

$$\|u - u_h\|_{L^2}^2 \leq \|(w - r_h w)'\|_{L^2}\|(u - u_h)'\|_{L^2}.$$

En utilisant l'estimation d'erreur obtenue dans l'Exercice 1 ainsi que l'erreur d'interpolation des éléments finis P_1, il vient

$$\|u - u_h\|_{L^2}^2 \leq \|w'\|_{L^2} h \|u''\|_{L^2}.$$

Enfin, $\|w'\|_{L^2} \leq \|u - u_h\|_{L^2}$, d'où on déduit l'estimation annoncée.

Exercice 3. Méthode spectrale.

1. Soit $u \in H^n_{per}$, on note c_p les coordonnées de u dans la base e_p. On a

$$\|u\|_{L^2}^2 = \sum_p |c_p|^2,$$

et pour tout $k \leq n$,

$$\|u^{(k)}\|_{L^2}^2 = \sum (2\pi p)^{2k}|c_p|^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|u^{(n)}\|_{L^2}^2 &= \sum (2\pi p)^{2n}|c_p|^2 \\
&\geq \sum_{|p|>N} (2\pi p)^{2(n-k)}|c_p|^2(2\pi p)^{2k} \\
&\geq (2\pi N)^{2(n-k)} \sum_{|p|>N} |c_p|^2(2\pi p)^{2k} \\
&= (2\pi N)^{2(n-k)}\|u^{(k)} - u_N^{(k)}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

2. La formulation variationnelle associée au problème consiste à déterminer $u \in H^1_{per}$ tel que pour tout $v \in H^1_{per}$,

$$a(u,v) = \int a(x)u'(x)\overline{v}'(x) + b(x)u(x)\overline{v}(x)dx = \int f(x)\overline{v}(x)dx.$$

La forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive car $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions superieures à une constante strictement positive. On en déduit qu'il existe une constante C telle que si v_N est solution du problème de Galerkin,

$$\|u - v_N\|_{H^1} \leq C\|u - u_N\|_{L^2}.$$

Si $u \in H^n_{per}$, on a donc

$$\|u - v_N\|_{H^1} \leq C_k N^{-(n-1)}\|u^{(n)}\|_{L^2}.$$

Les fonctions $\cos(2\pi px)$ et $\sin(2\pi px)$ constituent une base de la restriction de V_N aux fonctions à valeurs réelles. Si a et b sont constant, c'est une matrice de rigidité est diagonale (l'application de la forme bilinéaire $a(.,.)$ à deux fonctions de bases distinctes donne 0). Ainsi, la résolution du système et le calcul de v_N ne demande pas d'inverser de système linéaire! Dans le cas général, si la solution u est de classe $\mathcal{C}^\infty$, la méthode converge plus rapidement que n'importe quelle méthode polynômiale. Par contre, la matrice de rigidité est pleine. Pour des valeurs importantes de N, le calcul de v_N nécessite la résolution de très gros systèmes linéaires, ce qui peut s'avéré prohibitif.