Exercice I. Valeurs propres du Laplacien dans un rectangle.
1. Tout d'abord, notons que λ est forcément positif. On peut le constater simplement en multipliant l'équation vérifiée par $-u'' = \lambda u$ par u, intégrer l'équation obtenue sur $]0, L[$. Suite à une intégration par partie, il vient

$$\int_0^L |u'|^2 dx = \lambda \int_0^L |u|^2 dx.$$

La fonction u étant non nulle, on en déduit que $\lambda \geq 0$.

L'équation $-u'' = \lambda u$ est une équation différentielles ordinaire. On associe à u le polynôme $r^2 + \lambda = 0$, de racines $\pm i\sqrt{\lambda}$. On en déduit que les solution de cette équation sont de la forme $u(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$. La condition initiale $u(0) = 0$ implique $A = 0$, tandis que la condition $u(L) = 0$ implique $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$ ($B \neq 0$ car $u \neq 0$). Ainsi, $\sqrt{\lambda}L$ est égale à 0 modulo π. Les valeurs propres sont donc

$$\lambda_k = (k\pi/L)^2, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

Les vecteurs propres associés sont

$$u_k(x) = \sqrt{2/L}\sin(k\pi x/L).$$

(On a normalisé u_k de sorte que $\|u_k\|_{L^2} = 1$).

En multipliant l'équation $-u'' = \lambda u$ par une fonction v nulle aux bords et suite à une intégration par partie, on obtient que les valeurs et vecteurs propres calculés sont les uniques solutions du problème spectral consistant à déterminer $u \in H_0^1(]0, L[)$ (non nul) et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_0^L u'v'dx = \lambda \int_0^L uvdx.$$

On pose $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ et $a(u, v) = \int_0^L u'v'dx$. On vérifie trivialement que $a(.,.)$, H et V vérifient les hypothèses du Théorème **7.3.2** du cours. Ainsi, les vecteurs propres u_k forment une base Hilbertienne de $H = L^2(\Omega)$ et $u_k/\sqrt{\lambda_k}$ une base Hilbertienne de $V = H_0^1(\Omega)$ (pour le p.s. $a(.,.)$). On en déduit en particulier une caractérisation de L^2 et H_0^1 par

$$L^2(]0, L[) = \{u = \sum_k \alpha_k u_k \ : \ \|u\|_{L^2}^2 = \sum_k |\alpha_k|^2 < \infty\}$$

et

$$H_0^1(]0, L[) = \{u = \sum_k \alpha_k u_k \ : \ \|u\|_{H_0^1}^2 = \sum_k \lambda_k |\alpha_k|^2 < \infty\}.$$

On va montrer de plus que

$$H^2(]0, L[) \cap H_0^1(]0, L[) = \{u = \sum_k \alpha_k u_k \ : \ |u|_{H^2}^2 := \sum_k \lambda_k^2 |\alpha_k|^2 < \infty\}.$$

Tout d'abord on établit l'inclusion. Soit $u \in H^2(]0,L[) \cap H_0^1(]0,L[)$. Comme u appartient à H_0^1, il existe une suite α_k telle que $\sum_k \lambda_l |\alpha_k|^2 < \infty$ et $u = \sum_k \alpha_k u_k$ avec $\alpha_k = (u, u_k)_{L^2}$. De plus, u'' appartient à $L^2(]0,L[)$. Il existe donc une suite $\beta_k = (u'', u_k)_{L^2}$ telle que $u'' = \sum_k \beta_k u_k$ et

$$\sum_k |\beta_k|^2 < \infty. \tag{1}$$

Par intégration par partie, on obtient que

$$\beta_k = (u'', u_k)_{L^2} = (u', u_k')_{L^2} = a(u_k, u).$$

Or u_k étant un vecteur propre,

$$a(u_k, u) = \lambda_k (u_k, u)_{L^2} = \lambda_k \alpha_k.$$

De (1), on déduit que

$$\sum_k \lambda_k^2 |\alpha_k|^2 = \sum_k |\beta_k|^2 < \infty,$$

ce qui établit l'inclusion. Réciproquement, soit α_k une suite telle que

$$\sum_k \lambda_k^2 |\alpha_k|^2 < \infty.$$

D'après la caractérisation de $H_0^1(]0,L[)$, on a

$$u = \sum_k \alpha_k u_k \in H_0^1(]0,L[).$$

De plus, on vérifie aisément que la série définissant u est de Cauchy dans $H^2(]0,L[)$ et donc convergente. Ainsi, $u \in H_0^1(]0,L[) \cap H^2(]0,L[)$.

2. Les calculs sont élémentaires et similaires à ceux effectués à la question précédente. On obtient

- Pour $u'(0) = u'(L) = 0$,

$$\lambda_k = (k\pi/L)^2, \qquad u_k = \cos(\lambda_k^{1/2} x), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

- Pour $u(0) = u'(L) = 0$,

$$\lambda_k = (\pi/2 + k\pi)^2 L^{-2}, \qquad u_k = \sin(\lambda_k^{1/2} x), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

- Pour $u'(L) = u(0) = 0$,

$$\lambda_k = (\pi/2 + k\pi)^2 L^{-2}, \qquad u_k = \sin(\lambda_k^{1/2}(L - x)), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Remarque: Dans les expressions ci-dessus, on n'a pas normalisé les vecteurs propres.
3. Il est aisé de construire tout une famille de vecteurs et valeurs propres à l'aide des vecteurs et valeurs propres construites à la question **1**. Soit (u_k^1, λ^1) et (u_k^2, λ^2) les vecteurs et valeurs propres du Laplacien 1D avec conditions aux bord de Dirichlet sur les intervalles $]0, L_1[$ et $]0, L_2[$ respectivement. On pose définit pour tout $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$ sur $\Omega =]0, L_1[\times]0, L_2[$ les fonctions

$$u_{k,l}(x, y) = u_k^1(x) u_l^2(x, y).$$

On vérifie que $u_{k,l}$ est une fonction propre du Laplacien dans le rectangle avec conditions aux bords de Dirichlet de valeur propre

$$\lambda_{k,l} = \lambda_k + \lambda_l.$$

On obtient en fait ainsi tous les vecteurs et valeurs propres. En effet, en appliquant le Théorème **7.3.2** du cours au problème spectral consistant à déterminer $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v dx = \lambda \int_\Omega uv dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

on déduit que l'ensemble des vecteurs propres forme une base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$. Il suffit donc de prouver que la famille $u_{k,l}$ obtenue est une base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$ pour conclure. L'espace de Hilbert engendré par la famille $u_{k,l}$ contient toutes les combinaisons linéaire de fonction produits de la forme $f(x)g(y)$. Cet espace étant dense dans $L^2(\Omega)$, on en déduit que la famille $(u_{k,l})$ est une base de Hilbert de $L^2(\Omega)$ et contient tous les vecteurs propres.
4. Il suffit de remplacer les vecteurs propres u_k^1 et u_l^2 utilisés pour construire les vecteurs propres $u_{k,l}$ par leurs équivalents respectifs calculés à la question **2**. Il est important de souligner que les vecteurs et valeurs propres dépendent des conditions aux limites.

Exercice II. Application du principe du $\min - \max$.
1. D'après la Proposition **7.3.4** du cours, on a

$$\lambda_1 = \min_{v \in H_0^1(\Omega) - 0} \left(R(v) = \frac{\|\nabla v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^2}^2} \right),$$

Ainsi, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \lambda_1^{-1} \|\nabla v\|_{L^2}^2,$$

et λ^{-1} est la constante optimale de l'inégalité de Poincaré (l'inégalité ci-dessus est une égalité pour $v = u_1$).
2. A tout élément u de $H_0^1(\Omega_1)$, on peut associer un élément $\mathcal{I}(u)$ de $H_0^1(\Omega_2)$ en prolongeant u par 0 sur $\Omega_2 - \Omega_1$. En d'autre termes, on note

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I} : H_0^1(\Omega_1) & \rightarrow & H_0^1(\Omega_2) \\ u & \mapsto & \mathcal{I}(u) = \left\{ \begin{array}{ll} u(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega_1. \end{array} \right. \end{array}$$

Soit $\mathcal{E}_k^1$ et $\mathcal{E}_k^2$ les ensembles des sous-espaces de $H_0^1(\Omega_1)$ et de $H_0^1(\Omega_2)$ (respectivement) de dimension k. D'après le principe du $\min - \max$, on a

$$\lambda_k^1 = \min_{W_k \in \mathcal{E}_k^1} \max_{v \in W_k - \{0\}} R^1(v)$$

et

$$\lambda_k^2 = \min_{W_k \in \mathcal{E}_k^2} \max_{v \in W_k - \{0\}} R^2(v),$$

où

$$R^1(v) = \frac{\int_{\Omega_1} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega_1} |v|^2 dx} \text{ et } R^2(v) = \frac{\int_{\Omega_2} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega_2} |v|^2 dx}.$$

Or pour tout $v \in H_0^1(\Omega_1)$ tel que $v \neq 0$, on a $R_1(v) = R_2(\mathcal{I}(v))$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lambda_k^1 &= \min_{W_k \in \mathcal{E}_k^1} \max v \in W_k - \{0\} R^1(v) \\
&= \min_{W_k \in \mathcal{E}_k^1} \max_{v \in W_k - \{0\}} R^2(\mathcal{I}(v)) \\
&= \min_{W_k \in \mathcal{E}_k^1} \max_{v \in \mathcal{I}(W_k) - \{0\}} R^2(v) \\
&= \min_{W_k \in \mathcal{I}(\mathcal{E}_k^1)} \max_{v \in W_k - \{0\}} R^2(v).
\end{aligned}$$

Or l'application $\mathcal{I}$ étant une injection, $\mathcal{I}(\mathcal{E}_k^1) \subset \mathcal{E}_k^2$ (toute image d'un espace de dimension k par $\mathcal{I}$ est un espace de dimension k) et

$$\begin{aligned}
\lambda_k^2 &\leq \min_{W_k \in \mathcal{I}(\mathcal{E}_k^1)} \max_{v \in W_k - \{0\}} R^2(v) \\
&= \lambda_k^1.
\end{aligned}$$

L'équation d'évolution de la membrane d'un tambour est

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0,$$

à chaque vecteur propre et u du Laplacien de valeur propre λ est associé un mode de vibration $u(x)e^{i\omega t}$ tel que

$$-\omega^2 u e^{i\omega t} + \lambda u e^{i\omega t} = 0.$$

Ainsi, les fréquences propres d'un tambour sont de la forme

$$\omega_k = \sqrt{\lambda_k}.$$

Ainsi , les fréquences propres $\omega_k^1 = \sqrt{\lambda_k^1}$ du petit tambour défini par Ω_1 sont plus grandes que les fréquences propres du grand tambour Ω_2 de fréquences propres $\omega_k^2 = \sqrt{\lambda_k^2}$.

3. Déterminons tout d'abord le problème variationnel associé. On cherche (u, λ) tels que $u = 0$ sur Γ, $\partial_n u + \rho u = 0$ et

$$-\Delta u = \lambda u.$$

En multipliant cette équation par une fonction v nulle sur Γ, on obtient suite à une intégration et une intégration par partie que

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_{\partial\Omega-\Gamma} \partial_n u v ds = \lambda \int_\Omega u v dx.$$

Or $\partial_n u = -\rho u$ sur $\partial\Omega - \Gamma$, ainsi,

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \rho \int_{\partial\Omega-\Gamma} u v ds = \lambda \int_\Omega u v dx.$$

On pose $H = L^2(\Omega)$,

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

et on définit la forme bilinéaire sur V

$$a_\rho(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \rho \int_{\partial\Omega-\Gamma} u v ds.$$

La formulation variationnelle du problème spectral consiste donc à déterminer u non nul dans V et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$a_\rho(u,v) = \lambda(u,v)_{L^2},$$

pour tout $v \in V$. Grâce à une inégalité de type Poincaré (qu'on pourrait démontré par contradiction, mais qui a déjà été prouvée lors des TDs précédents), on obtient la coercivité de la forme bilinéaire a_ρ. Les autres hypothèses du Théorème d'existence d'une base de vecteurs et valeurs propres $(u_k(\rho), \lambda_k(\rho))$ sont aisément vérifiées (a_ρ est continue, symétrique, V et H sont des espaces de Hilbert, V est dense dans H et l'injection de V dans H est compacte) .

D'après le principe du $\min - \max$, on a

$$\lambda_k(\rho) = \min_{W_k \in \mathcal{E}_k} \max_{v \in W_k - \{0\}} \left(R_\rho(v) = \frac{a_\rho(v,v)}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}} \right), \tag{2}$$

où $\mathcal{E}_k$ désigne les sous-espaces de dimension de k de V (qui est indépendant de ρ).

Soit $\mathcal{E}_k^0$ l'ensemble des sous-espaces de dimension k de $H_0^1(\Omega)$. L'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans V induit une injection de $\mathcal{E}_k^0$ dans $\mathcal{E}_k$. De plus, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx = a_\rho(v,v).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \min_{W_k \in \mathcal{E}_k^0} \max_{v \in W_k - \{0\}} \left(R(v) = \frac{\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)})}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}} \right) \\
&= \min_{W_k \in \mathcal{E}_k^0} \max_{v \in W_k - \{0\}} \left(\frac{a_\rho(v,v)}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}} \right) \\
&= \min_{W_k \in \mathcal{E}_k^0} \max_{v \in W_k - \{0\}} (R_\rho(v)) \\
&\geq \min_{W_k \in \mathcal{E}_k} \max_{v \in W_k - \{0\}} (R_\rho(v)) \\
&= \lambda_k(\rho).
\end{aligned}$$

Enfin, pour tout ρ_1, ρ_2 positifs tels que $\rho_1 \geq \rho_2$, on a

$$a_{\rho_1}(v,v) \geq a_{\rho_2}(v,v)$$

pour tout $v \in V$. On déduit de l'expression (2) de $\lambda_k(\rho)$ que

$$\lambda_k(\rho_1) \geq \lambda_k(\rho_2).$$

Autrement dit, $\lambda_k(\rho)$ est une fonction croissante de ρ.

Exercice III. Schéma implicite pour l'équation de la chaleur.
1. Soit u_k la base de Hilbert de $L^2(\Omega)$ constituée des vecteurs propres du Laplacien avec conditions aux bords de Dirichlet. On a

$$u_0(x) = \sum_k \alpha_k u^k(x),$$

où $\alpha_k = (u_k, u_0)_{L^2(\Omega)}$. De plus la solution u de l'équation de la chaleur est

$$u(t,x) = \sum_k \alpha_k e^{-\lambda_k t} u_k(x)$$

et

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_k |\alpha_k|^2 e^{-2\lambda_k t} \\
&\leq e^{-2\lambda_1 t} \sum_k |\alpha_k|^2 \\
&= e^{-2\lambda_1 t} \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

2. On a

$$\frac{1}{\Delta t} u^{n+1} - u^n - \Delta u^{n+1} = 0.$$

En multipliant cette équation par une fonction test $v \in H^1_0(\Omega)$, on obtient suite à une intégration sur Ω puis par intégration par partie

$$\int_\Omega \nabla u^{n+1} . \nabla v dx + \frac{1}{\Delta t} u^{n+1} v dx = \frac{1}{\Delta t} \int_\Omega u^n v dx.$$

La fonction u^{n+1} est donc l'unique solution du problème variationnel consistant à déterminer $u^{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$a(u^{n+1}, v) = L^n(v),$$

où

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v + (\Delta t)^{-1} uvdx$$

et

$$L^n(v) = (\Delta t)^{-1} \int_\Omega u^n vdx.$$

3. Le schéma est d'ordre 1 en temps.
4. On applique la formulation variationnelle à $v = u_{n+1}$. On en déduit que

$$\|\nabla u^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + (\Delta t)^{-1}\|u^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} = (\Delta t)^{-1} \int_\Omega u^{n+1}u^n dx.$$

Ainsi,

$$\|u^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega u^{n+1}u^n dx \leq \|u^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}\|u^n\|_{L^2(\Omega)},$$

(d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et

$$\|u^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^n\|_{L^2(\Omega)}.$$

5. On peut utiliser la méthode des éléments finis P_1 pour effectuer la discrétisation en espace et substituer au problème variationnel permettant de déterminer u^{n+1} en fonction de u^n par son approximation interne.

Exercice IV. Approximation variationnelle des problèmes spectraux.
1. L'approximation variationnelle consiste à déterminer la base $u_{k,h} \in V_{0h}$ et la famille de réels $\lambda_{k,h}$ tels que

$$a(u_{k,h}, v_h) = \lambda_{k,h}(u_{k,h}, v_h) \text{ pour tout } v_h \in V_{0h}.$$

2. En appliquant le Théorème du min – max au problème spectral continu et discret, on obtient que

$$\lambda_k = \min_{W_k \in \mathcal{E}_k} \max_{v \in W_k - \{0\}} a(v, v)/\|v\|^2_{L^2},$$

et

$$\lambda_{k,h} = \min_{W_k \in \mathcal{E}_{k,h}} \max_{v \in W_k - \{0\}} a(v, v)/\|v\|^2_{L^2},$$

où $\mathcal{E}_k$ désigne l'ensemble des sous-espaces de $H_0^1(\Omega)$ de dimension k et $\mathcal{E}_{k,h}$ l'ensemble des sous-espaces de V_{0h} de dimension k. Or comme $\mathcal{E}_{k,h} \subset \mathcal{E}_k$, on déduit des expressions de λ_k et $\lambda_{k,h}$ que

$$\lambda_k \leq \lambda_{k,h}.$$

3.a. Il suffit de remarquer que $\Pi_h u$ est la solution de l'approximation variationnelle du problème consistant à déterminer $w \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(w, v) = a(u, v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

D'après le Théorème **6.3.13** du cours, $\Pi_h u \to w$ dans $H_0^1(\Omega)$. Or la solution du problème continu ci-dessus n'est autre que u elle-même. Ainsi,

$$\Pi_h u \to u \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

3.b. Soit $u \in W_i$ (espace engendré par les i premier vecteurs propres du Laplacien), on a

$$\Pi_h u - u = \sum_{l=1}^{i} (u, u_l)_{L^2} \left(\Pi_h u_l - u_l \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|\Pi_h u - u\|_{H^1(\Omega)} &\leq \sum_{l=1}^{i} |(u, u_l)_{L^2}| \|\Pi_h u_l - u_l\|_{H^1} \\
&\leq \left(\sum_{l=1}^{i} |(u, u_l)_{L^2}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{i} \|\Pi_h u_l - u_l\|_{H^1}^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \left(\sum_{l=1}^{i} \|\Pi_h u_l - u_l\|_{H^1}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Le quotient $\|\Pi_h u - u\|_{H^1(\Omega)} / \|u\|_{L^2(\Omega)}$ est majoré par une fonction indépendante de u dans W_i, convergent vers 0 lorsque h tend vers zéro. Il converge donc lui-même vers zéro.

3.c. On rappelle que $\Pi_h u$ est la projection orthogonale de u sur V_{0h} pour le produit scalaire associé à $a(.,.)$. Ainsi, la norme de $\Pi_h u$ est inférieure ou égale à la norme de u, i.e.

$$a(\Pi_h u, \Pi_h u) \leq a(u, u).$$

3.d. L'ensemble des $(u_l)_{l=1,\ldots,i}$ forme une base de W_i. En particulier, c'est une famille libre. Or l'ensemble des familles libre est un ouvert et $\Pi_h u_l \to u_l$ lorsque h tend vers zéro. Ainsi, pour h assez petit, $\Pi_h u_l$ est une famille libre et $\Pi_h(W_i)$ est un espace de dimension i. D'après la caractérisation de la valeur propre $\lambda_{i,h}$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda_{i,h} &\leq \max_{v \in W_h} a(v, v) / \|v\|_{L^2}^2 \\
&= \max_{w \in \Pi_h(W_i)} a(\Pi_h w, \Pi_h w) / \|\Pi_h w\|_{L^2}^2 \\
&\leq \max_{w \in \Pi_h(W_i)} a(w, w) / \|\Pi_h w\|_{L^2}^2 \\
&= \max_{w \in \Pi_h(W_i)} \frac{a(w, w)}{\|w\|_{L^2}^2} \frac{\|w\|_{L^2}^2}{\|\Pi_h w\|_{L^2}^2} \\
&\leq \lambda_i \sup_{w \in W_i} \frac{\|w\|_{L^2}^2}{\|\Pi_h w\|_{L^2}^2}.
\end{aligned}$$

Enfin, on déduit aisément de la question **4** que

$$\sup_{w \in W_i} \frac{\|w\|_{L^2}^2}{\|\Pi_h w\|_{L^2}^2} \to 1,$$

et quelque soit ε, pour h assez petit, on a donc

$$\lambda_i \leq \lambda_{i,h} \leq \lambda_i(1+\varepsilon).$$

Ainsi, $\lambda_{i,h} \to \lambda_i$.