Exercice I. Approximation implicite des équations paraboliques
1. On peut écrire la formulation variationnelle associée au schéma numérique:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \left(\frac{u - u^{n-1}}{\tau} - f\right) v \ = \ 0$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. Le théorème de Lax-Milgram garantit l'existence d'une solution.
2.a. On a

$$\int_\Omega \nabla u^n \cdot \nabla(u^n - u^{n-1}) + \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} - f\right)(u^n - u^{n-1}) \ = \ 0\,,$$

d'où

$$\int_\Omega |\nabla u^n|^2 + \frac{\left(u^n - u^{n-1}\right)^2}{\tau} - f u^n \, dx \ = \ \int_\Omega \nabla u^n \cdot \nabla u^{n-1} - f u^{n-1} \, dx\,.$$

Comme $\int_\Omega \nabla u^n \cdot \nabla u^{n-1}\,dx \leq \|\nabla u^n\|_{L^2}\|\nabla u^{n-1}\|_{L^2} \leq (\|\nabla u^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla u^{n-1}\|_{L^2}^2)/2$, on déduit l'inégalité cherchée.
2.b. Comme $\mathcal{E}(u^n)$ décroît, en particulier $\mathcal{E}(u^n) \leq \mathcal{E}(u_0) < +\infty$ pour tout n. De plus, par les inégalités de Poincaré et Cauchy-Schwartz il est clair que $\mathcal{E}(u) \geq c\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$ qui est bornée inférieurement par $-\|f\|_{L^2}/4c$. Donc l'énergie est bornée, uniformément en temps.
3.a L'estimation sur $\|u^{n-1} - u^n\|_{L^2(\Omega)}$ est une conséquence directe de l'inégalité établie à la question précédente et du fait que l'énergie $\mathcal{E}$ reste bornée. On a alors si $t = ((n-1)+\theta)\tau$:

$$\|u_\tau(t) - \hat{u}_\tau(t)\|_{L^2} \ = \ \|u^n - u^{n-1}(1-\theta) - u^n\theta\|_{L^2} \ \leq \ C(1-\theta)\sqrt{\tau}.$$

3.b La dérivée temporelle de $\hat{u}_\tau$ est simplement donnée par

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau}$$

sur l'intervalle $((n-1)\tau, n\tau)$. On trouve en itérant l'inégalité établie à la question 2.a. que pour tout $m \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{m} \tau \int_\Omega \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau}\right)^2 dx \ + \ \mathcal{E}(u^m) \ \leq \ \mathcal{E}(u_0)$$

soit:

$$\int_0^{m\tau} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{u}_\tau}{\partial t}(x,t)\right)^2 dxdt \ + \ \mathcal{E}(\hat{u}_\tau(m\tau)) \ \leq \ \mathcal{E}(u_0)$$

Ainsi, $\partial u/\partial t$ est bornée dans $L^2(\Omega\times]0,T[)$. Par ailleurs, $\mathcal{E}(u_\tau)$ étant bornée uniformément, on voit que pour tout t on a:

$$\int_\Omega |\nabla u_\tau|^2 \;\le\; C + 2\int_\Omega fu \le C + 2C'\|f\|_{L^2}\|\nabla u_\tau\|_{L^2}$$

par Poincaré.

On en déduit aisément une borne uniforme sur $\|\nabla u_\tau\|_{L^2}$ (en effet, $X^2 \le 2AX+B \Rightarrow |X| \le A+\sqrt{A^2+B}$ si $A,B\ge 0$), puis sur $\|\nabla \hat{u}_\tau\|_{L^2}$

4. Le théorème de Rellich permet de conclure. Par ailleurs, d'après la question 3.a, u_{τ_k} converge aussi vers u.

5. Pour tout t, si $(n-1)\tau < t < n\tau$, on a $\phi(\cdot,t)\in C_c^\infty(\Omega)$ et le problème variationnel qui définit u^n s'écrit

$$\int_\Omega \frac{u^n(x)-u^{n-1}(x)}{\tau}\phi(x,t) + \nabla u^n(x)\cdot\nabla\phi(x,t) - f\phi(x,t) \;=\; 0$$

soit

$$\int_\Omega \frac{\partial \hat{u}_\tau}{\partial t}(x,t)\phi(x,t) + \nabla u_\tau(x,t)\cdot\nabla\phi(x,t) - f\phi(x,t)\,dx \;=\; 0.$$

En intégrant sur t on trouve l'égalité demandée. En intégrant ensuite par partie (en temps et en espace) on trouve

$$-\int_\Omega u_0\phi(x,0)\,dx - \int_0^T\int_\Omega \hat{u}_\tau\frac{\partial\phi}{\partial t} - u_\tau\Delta\phi - f\phi\,dxdt = 0$$

et on peut passer à la limite $\tau_k \to 0$. On voit que u vérifie alors la même équation, qui est la forme variationnelle de l'équation demandée.

6. En multipliant l'équation par $\partial u/\partial t$ (qui est également nulle au bord, si tout est supposé régulier) et en intégrant, on trouve

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \nabla u\cdot\nabla\frac{\partial u}{\partial t} - f\frac{\partial u}{\partial t}\,dx \;=\; 0\,,$$

soit

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx \;+\; \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu\,dx \;=\; 0\,.$$

Il suffit d'intégrer alors entre 0 et t pour obtenir l'inégalité désirée.

Exercice II. Équation des plaques.

1. On multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction v telle que $v(x) = \partial_n v(x) = 0$ sur $\partial\Omega$. On intègre sur Ω, on effectue deux intégrations par partie sur le second terme et on échange les opérateurs d'intégration et de dérivation du premier terme du premier membre. On obtient ainsi

$$\frac{d^2}{dt^2} < u, v >_{L^2} + \int_\Omega \Delta u\Delta v dx =< f, v >_{L^2}\;.$$

La formulation variationnelle consiste donc à déterminer $u \in \mathcal{C}([0,1]; H^2_0(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0,T]; L^2(\Omega))$ tel que pour tout $v \in H^2_0(\Omega))$, on ait

$$\frac{d^2}{dt^2} < u, v >_{L^2} + a(u,v) = < f, v >_{L^2},$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx$$

et tel que $u(t=0) = u_0 \in H^2_0(\Omega)$, $\partial_t u(t=0) = u_1 \in L^2(\Omega)$. De plus, on choisit $f \in L^2(]0,T[; L^2(\Omega))$.

2. L'espace $H^2_0(\Omega)$ s'injecte de manière compacte dans $L^2(\Omega)$. Il est dense dans $L^2(\Omega)$. Enfin, la forme bilinéaire a est coercive. En effet, en effectuant deux intégrations par partie successives, on établit que pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$,

$$a(u,u) = \sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} dx = \sum_{i,j} \int_\Omega \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dx.$$

L'ensemble $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ étant dense dans $H^2_0(\Omega)$, cette relation est valable pour toute fonction $u \in H^2_0(\Omega)$. D'après l'inégalité de Poincaré, il existe C tel que pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^2} \leq C \|\nabla v\|_{L^2}.$$

En appliquant cette inégalité à $v = \partial u / \partial x_i$ pour tout i, on en déduit qu'il existe C tel que pour tout $u \in H^2_0(\Omega)$,

$$\|\nabla u\| \leq C a(u,u).$$

En appliquant à nouveau l'inégalité de Poincaré, on en déduit qu'il existe C tel que pour tout $u \in H^2_0(\Omega)$,

$$\|u\|_{H^2} \leq C a(u,u).$$

Ainsi, la forme bilinéaire a est coercive et il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([0,T]; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T]; H^2_0(\Omega))$ au problème variationnel.

3. Les conditions initiales et aux bords sont trivialement vérifiées par u. Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(]0,T[)$ et tout $v \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, on a

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t u(t,x) v(x) \frac{d}{dt}\phi(t) + \Delta u(t,x) \Delta v(x) \phi(t) dx dt = \int_0^T \int_\Omega u(t,x) v(x) \phi(t) dx dt.$$

Par intégration par partie, on en déduit que

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t^2 u(t,x) v(x) \phi(t) + \Delta(\Delta u)(t,x) v(x) \phi(t) dx dt = \int_0^T \int_\Omega f(t,x) v(x) \phi(t) dx$$

et comme les combinaisons linéaires de produit de fonctions régulières $v(x)\phi(t)$ est dense dans $\mathcal{C}^\infty_c(]0,T[\times\Omega)$, on en déduit que

$$\partial_t^2 u(t,x) + \Delta(\Delta u)(t,x) = f(t,x),$$

pour presque tout $(t,x) \in]0,T[\times\Omega$.

Exercice III. Équations de Maxwell.
1. Montrons tout d'abord que $E(t) \in V$ pour tout t

Tout d'abord, $E \in \gamma^{-1}(0)$. En effet, d'après la formule d'intégration par partie rappelée dans l'énoncé, on a pour toute fonction vectorielle F,

$$\langle \gamma(E), F\rangle = \int_{\partial\Omega} (n \wedge E).F d\sigma.$$

Or $n \wedge E = 0$ sur $\partial\Omega$. Ainsi, $\langle \gamma(E), F\rangle = 0$ pour tout F. Autrement dit, $E \in \gamma^{-1}(0)$. Reste à prouver que la divergence de E est nulle. Il suffit à cet effet d'appliquer l'opérateur de divergence à l'équation

$$\partial_t E + \operatorname{rot} H = 0. \tag{1}$$

En effet, $\operatorname{div}(\operatorname{rot} H) = 0$ d'où $\partial_t(\operatorname{div} E) = 0$ et $\operatorname{div}(E) = \operatorname{div}(E_0) = 0$.

Les conditions initiales sont trivialement vérifiées. Enfin, en dérivant l'équation (1) par rapport au temps et en utilisant l'équation vérifiée par H, on obtient

$$\partial_t^2 E + \operatorname{rot}\operatorname{rot} E = 0.$$

En multipliant cette équation par une fonction test $F \in V$ et suite à une intégration par partie sur le second membre, il vient

$$\frac{d^2}{dt^2}(E,F)_{L^2} + \int_\Omega \operatorname{rot} E.\operatorname{rot} G dx = 0.$$

2. L'application qui à tout élément F de $H(\operatorname{div})$ associe sa divergence est trivialement continue de $H(\operatorname{div})$ dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, l'image réciproque de 0 par cette application (c'est à dire H) est un sous-espace de Hilbert de $H(\operatorname{div})$ (qui est un espace de Hilbert d'après le cours), muni de la norme $\|.\|_{H(\operatorname{div})}$. Or pour tout élément F de $H(\operatorname{div};0)$,

$$\|F\|_{H(\operatorname{div})} = \|F\|_{L^2}.$$

En d'autres termes, la norme $H(\operatorname{div})$ et L^2 coïncident sur $H(\operatorname{div};0)$ qui est donc un espace de Hilbert.

On dit qu'un élément F de $L^2(\Omega)^3$ admet un rotationnel faible L^2 s'il existe $W \in L^2(\Omega)^3$ tel que pour tout $G \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)^3$,

$$\int_\Omega F.\operatorname{rot} G dx = \int_\Omega W.G dx$$

et on note $\operatorname{rot} F = W$. Notons que cette définition coïncide avec la définition classique lorsque F est régulière.

Montrons que $H(\operatorname{rot})$ est un espace de Hilbert. Soit F_n une suite de Cauchy de $H(\operatorname{rot})$. Comme $L^2(\Omega)^3$ est un espace de Hilbert, il existe $F \in L^2(\Omega)^3$ et

$W \in L^2(\Omega)^3$ tel que $F_n \to F$ dans $L^2(\Omega)^3$ et $\operatorname{rot} F_n \to W$ dans $L^2(\Omega)^3$. D'après la définition du rotationnel faible, pour tout $G \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)^3$,

$$\int_\Omega F_n . \operatorname{rot} G dx = \int_\Omega \operatorname{rot} F_n . G dx.$$

En passant à la limite, on en déduit que

$$\int_\Omega F . \operatorname{rot} G dx = \int_\Omega W . G dx.$$

F admet donc un rotationnel faible L^2 et $\operatorname{rot} F = W$. Ainsi, F_n converge vers F dans $H(\mathrm{rot})$ et $H(\mathrm{rot})$ est un espace de Hilbert.

L'application trace est continue de $H(\mathrm{rot})$ dans son dual. En effet, on établit aisément que

$$< \gamma(F), G > \leq 2\|F\|_{H(\mathrm{rot})}\|G\|_{H(\mathrm{rot})}.$$

Ainsi, $H_0(\mathrm{rot})$, image réciproque de 0 par l'application γ est un sous-espace de Hilbert de $H(\mathrm{rot})$. L'intersection de deux espaces fermés étant fermée, V est un espace de Hilbert.

3. Pour $\nu = 1$, on a précisément

$$a(F, F) + \nu\|F\|_H = \|F\|_V^2.$$

4. Toutes les hypothèses du Théorème **8.3.1** sont vérifiées (modulo la remarque **8.3.3** concernant la coercivité), d'où on déduit l'existence d'une unique solution

$$E \in \mathcal{C}([0, T]; V) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H(\mathrm{div}; 0)).$$