Explosion en temps fini pour l'équation de Schrödinger non linéaire stochastique surcritique

Anne de Bouard et Arnaud Debussche

1 Introduction

Le but de l'exposé est de donner une description au moins partielle de la manière dont un bruit multiplicatif – un potentiel aléatoire dépendant du temps dans notre cas – ayant un comportement temporel de type bruit blanc peut agir sur l'explosion en temps fini des solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire surcritique.

Nous exposons ici des résultats théoriques concernant le cas où le bruit est fortement corrélé en espace.

Notre motivation pour l'étude de ces équations prend ses origines dans les travaux de Bang, Christiansen, If, Rasmussen et Gaididei (voir [1], [2]); dans ces travaux, une telle équation est en effet utilisée pour décrire la propagation d'une excitation lumineuse dans certains agrégats moléculaires, dans la limite continue où la distance entre les molécules tend vers zero. Une élévation de la température du système tend en effet à introduire des fluctuations modélisées par un potentiel aléatoire, dans l'hypothèse où aucune excitation n'est créée ou détruite globalement au cours du temps. La fonction d'onde $\psi(t,x)$ de l'excitation vérifie alors une équation de Schrödinger non linéaire de la forme

$$i\partial_t\psi - (\Delta\psi + |\psi|^2\psi) = \dot{\eta}\psi$$

où $x \in \mathbb{R}^2$ (l'agrégat est supposé ne comporter qu'une seule couche) et la perturbation stochastique $\dot{\eta}$ est un bruit blanc gaussien, à valeurs réelles. Le fait que $|\psi(t,x)|^2$ représente, avant normalisation de l'équation, la densité de probabilité de trouver une particule excitée au temps t en $x \in \mathbb{R}^2$, joint à l'hypothèse d'invariance de l'état global d'excitation du système entrainent que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^2} |\psi(t,x)|^2 dx$ doit être conservée au cours du temps.

On peut noter que, de même que l'équation de Schrödinger non linéaire est une équation "universelle", l'applicabilité de l'équation ci-dessus dépasse largement le contexte des agrégats moléculaires (voir [9], [12] pour d'autres exemples d'applications).

2 Description mathématique du bruit

Afin de donner une description mathématique plus précise de l'équation considérée ici – qui est une généralisation de l'équation précédente – et du processus η, on introduit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

On rappelle qu'une filtration est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{F}_t$ représente le passé jusqu'au temps t de telle sorte qu'un variable aléatoire est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$ si elle ne dépend que du passé.

Un mouvement brownien est alors un processus gaussien dont tous les incréments sont indépendants. Plus précisément, une famille de variables aléatoires $\beta(t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un mouvement brownien si $\beta(0) = 0$ et si pour toute subdivision $t_1 < t_2 \cdots < t_n$ de $[0, t]$, la famille des incréments $(\beta(t_k) - \beta(t_{k-1}))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de gaussiennnes indépendantes centrées de variances respectives $t_k - t_{k-1}$. Il est de plus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si $\beta(t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, et $\beta(t) - \beta(s)$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ pour $t \geq s$. Il est bien connu que les trajectoires $\omega \mapsto \beta(t, \omega)$ sont continues pour presque tout $\omega \in \Omega$, et même α-hölder continues pour tout $\alpha < 1/2$. Cependant, elles ne sont nulle part à variation bornée.

Le bruit blanc en temps est alors donné par la dérivée temporelle, au sens des distributions, du mouvement brownien : $\dot{\beta}(t) = \frac{d\beta}{dt}$. Il est possible de montrer que la famille des coefficients de Fourier de β – lorsque l'on se restreint a un intervalle borné de $\mathbb{R}^+$ – forme une famille de gaussiennes indépendantes centrées réduites, d'où le nom de bruit blanc (toutes les fréquences sont excitées de manière indépendante et équidistribuée).

De plus, le bruit blanc est delta-corrélé : on a formellement

$$\mathbb{E}(\dot{\beta}(t)\dot{\beta}(s)) = \delta_{t-s}$$

où δ_0 est la masse de Dirac en 0; cela découle de l'indépendance des incréments du mouvement brownien.

On pourrait de manière similaire définir un mouvement brownien spatio-temporel $B(t, x)$, à $n + 1$ variables (appelé drap brownien) et le bruit blanc espace-temps est alors la dérivée de B par rapport aux variables d'espace et de temps,

$$\xi = \frac{\partial^{n+1} B}{\partial t \partial x_1 \ldots \partial x_n}.$$

Ce n'est cependant pas l'approche que nous adopterons. En considérant les solutions de problèmes d'évolution stochastiques comme des processus indexés par le temps à valeurs dans un espace de dimension infinie, nous adopterons plutôt la construction suivante qui est équivalente à celle ci-dessus.

On considère une suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de mouvements browniens indépendants sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs réelles, associés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On considère également une base hilbertienne de l'espace $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrable, définies sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles, ainsi qu'un opérateur ϕ, linéaire continu sur cet espace. Le processus

$$W(t,x,\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(t,\omega)\phi e_k(x), \quad t\geq 0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad \omega\in\Omega,$$

est alors un processus de Wiener sur l'espace $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, d'opérateur de covariance $t\phi\phi^*$. On pose

$$\dot{\eta}=\frac{\partial W}{\partial t}.$$

Ceci définit un bruit delta corrélé en temps, et dont la corrélation spatiale dépend de l'opérateur ϕ. La définition est bien entendu indépendante du choix de la base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

On peut noter que si ϕ est défini à l'aide d'un noyau à valeurs réelles $\mathcal{K}$, c'est à dire si pour toute fonction u de $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, on a

$$\phi u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{K}(x,y)u(y)dy,$$

alors la fonction de corrélation du bruit est donnée par

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial W}{\partial t}(t,x)\frac{\partial W}{\partial t}(s,y)\right)=c(x,y)\delta_{t-s}$$

avec

$$c(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{K}(x,z)\mathcal{K}(y,z)dz.$$

Ainsi, plus l'opérateur est régularisant – plus son noyau est régulier par rapport à la variable x – plus le bruit est corrélé en espace. Le cas particulier où ϕ est l'opérateur identité sur $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, pour lequel on a $c(x,y)=\delta_{x-y}$ correspond donc à un bruit δ-corrélé ausi bien en espace qu'en temps, appelé bruit blanc espace-temps; le processus W correspondant est appelé processus de Wiener cylindrique sur $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. Cependant, un tel processus a des trajectoires très irrégulières : W est continu presque sûrement à valeurs dans l'espace de Sobolev négatif $H^s_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ pour $s<-n/2$. Dans le contexte des équations de Schrödinger non linéaires, nous ne pouvons traiter un bruit ayant des trajectoires aussi irrégulières, à cause du manque d'effet régularisant de l'équation. De plus, les méthodes utilisées pour étudier l'explosion en temps fini demandent de considérer des solutions suffisamment régulières, au moins dans l'espace d'énergie $H^1(\mathbb{R}^n)$. Or il est facile de voir que le processus W défini précédemment est continu presque sûrement à valeurs dans un espace de Hilbert $\tilde{H}$ si ϕ est un opérateur Hilbert-Schmidt de $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ à valeurs dans $\tilde{H}$. C'est le genre d'hypothèse que nous ferons sur l'opérateur ϕ, avec, au minimum, $\tilde{H}=H^1(\mathbb{R}^n)$. Les hypothèses précises seront énoncées au fur et à mesure de leur nécessité.

Une fois le processus W ainsi défini, on peut contruire une intégrale par rapport à ce processus :

$$\int_0^t \psi(s)dW(s)$$

où l'intégrant $\psi(t)$ est ici un opérateur défini sur l'espace de Hilbert dans lequel vivent les trajectoires de W. On rappelle que W n'est pas à variation bornée en temps, et cette intégrale ne peut pas être définie comme une intégrale de Stieljes. Cependant, les propriétés d'indépendance des incréments de W entrainent que sa variation quadratique est finie, et à l'aide d'arguments probabilistes, l'intégrale précédente peut être définie comme la limite dans $L^2(\Omega)$ des sommes de Riemann

$$\sum_{i=1}^{N} \psi(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i))$$

où $t_1, \ldots, t_N$ est une subdivision de $[0,t]$, lorsque l'intégrant ψ "ne dépend que du passé". Sous la condition d'intégrabilité

$$\int_0^t \|\psi(s)\phi\|_{HS(L^2;K)} < +\infty \quad \text{presque sûrement,}$$

où $HS(L^2; K)$ est l'espace des opérateurs Hilbert-Schmidt de $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ à valeurs dans un espace de Hilbert K, la construction ci-dessus donne un sens au processus $\int_0^t \psi(s)dW(s)$ dans K. L'intégrale ainsi obtenue est l'intégrale d'Itô. Puisque W n'est pas à variation bornée, le choix du point où on évalue ψ dans l'intégrale précédente influe sur la valeur de cette intégrale. Si l'intégrant est évalué au point milieux, c'est à dire si on remplace dans la somme de Riemann $\psi(t_i)$ par $\psi(\frac{1}{2}(t_i + t_{i+1}))$, on obtient l'intégrale de Stratonovich.

3 Résultats d'existence locale et globalisation

Nous sommes maintenant en mesure de réécrire précisément l'équation considérée, à l'aide des notations introduites au paragraphe précédent. Il a été remarqué dans l'introduction que pour des raisons physiques, le carré de la norme L^2 de la solution devait être conservé au cours du temps. Ceci nous amène à définir le produit $\dot{\eta}\psi$ intervenant dans l'équation ci-dessus comme un produit de Stratonovich, afin d'obtenir effectivement la conservation de cette intégrale, ce qui ne serait pas le cas avec un produit Itô.

Avec les notations précédentes, l'équation considérée s'écrit

$$idu - (\Delta u + |u|^{2\sigma} u)dt = u \circ dW, \tag{1}$$

où σ est strictement positif, et $\circ$ désigne le produit de Stratonovich. On utilise en fait la forme Itô équivalente de cette équation, qui est mathématiquement plus facile à manipuler. Pour cela, on définit, pour $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction

$$F_\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\phi e_k(x))^2,$$

qui est indépendante de la base $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. L'équation (1) est alors équivalente à l'équation d'Itô

$$idu - (\Delta u + |u|^{2\sigma} u)dt = udW - \frac{i}{2} u F_\phi dt. \tag{2}$$

On peut remarquer ici que pour que la correction d'Itô F_ϕ soit bien définie, il faut déjà supposer ϕ suffisamment régularisant. Ainsi, l'équation (2) n'a pas de sens si $\phi = id$, bien que des simulations numériques décrites dans [8] semblent indiquer que des solutions de (1) existent dans ce cas.

Si ϕ est un opérateur Hilbert-Schmidt de $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ dans lui-même, et défini par un noyau $\mathcal{K}$, alors $F_\phi(x) = |\mathcal{K}(x,\cdot)|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Le résultat suivant, prouvé dans [5], concerne l'existence locale de solutions pour l'équation (2) dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$.

On rappelle qu'un couple de réels positifs (r,p) est appelé paire admissible si $r \geq 2$ et $\frac{2}{r} = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$.

Théorème 3.1. *Soit $\sigma > 0$ si $n = 1$ ou 2, $0 < \sigma < 2$ si $n = 3$ et $\frac{1}{2} \leq \sigma < \frac{2}{n-2}$ ou $0 < \sigma < \frac{1}{n-1}$ si $n \geq 4$. On suppose que ϕ est un opérateur Hilbert-Schmidt de $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ à valeurs dans $H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ et si $n \geq 2$, on suppose de plus que ϕ est un opérateur γ-radonifiant de $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ à valeurs dans l'espace de Sobolev $W^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ pour un $\alpha > 2n$. Alors, il existe une paire admissible (r,p) telle que pour tout u_0 mesurable par rapport à $\mathcal{F}_0$ et à valeurs dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, il existe un temps d'arrêt $\tau^*(u_0,\omega)$ et une unique solution de l'équation (2) à valeurs presque sûrement dans $C([0,\tau];H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^r(0,\tau;W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$, pour tout $\tau < \tau^*(u_0)$ et vérifiant $u(0) = u_0$. De plus, le temps d'existence $\tau^*(u_0)$ vérifie*

$$\tau^*(u_0) = +\infty \text{ ou } \limsup_{t \nearrow \tau^*(u_0)} |u(t)|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = +\infty \text{ p.s.}$$

On rappelle qu'un opérateur L, linéaire continu d'un espace de Hilbert H dans un espace de Banach B est un opérateur γ-radonifiant si l'image par L de la mesure gaussienne canonique sur H s'étend en une mesure de probabilité borélienne sur B. Si B est un espace de Hilbert, ceci est équivalent à ce que L soit Hilbert-Schmidt de H dans B.

Un résultat d'existence globale de solutions dont les trajectoires sont continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R})$ est montré dans [4], sous l'hypothèse $\sigma < \min(2/n; 1/(n-1))$. Ce résultat nécessite évidemment moins de régularité sur l'opérateur ϕ.

La globalisation des solutions du Théorème 3.1 dans le cas sous critique est obtenue en utilisant d'une part la conservation de la norme $L^2(\mathbb{R}^n)$ à ω fixé pour les solutions de (2), et d'autre part une estimation de leur norme H^1 obtenue grâce à l'évolution de l'énergie, qui est invariante pour l'équation de (NLS) déterministe.

On note dans ce qui suit

$$M(u) = |u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{3}$$

et $H(u)$, l'énergie ou hamiltonien

$$H(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{2\sigma+2}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{2\sigma+2} dx. \tag{4}$$

Proposition 3.2. *Soient u_0, σ et ϕ comme dans le théorème 3.1, et soit u la solution de (2) avec $u(0) = u_0$ donnée par le théorème 3.1. Alors pour tout temps d'arrêt τ avec $\tau < \tau^*(u_0)$ presque sûrement, on a pour presque tout ω,*

$$M(u(\tau)) = M(u_0) \tag{5}$$

et

$$\begin{aligned} H(u(\tau)) &= H(u_0) - \mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\tau \bar{u}\nabla u \cdot \nabla dW dx \\ &+\frac{1}{2}\sum_{\ell\in\mathbb{N}}\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2|\nabla\phi e_\ell|^2 dx ds. \end{aligned} \tag{6}$$

La preuve de cette proposition s'obtient en appliquant la formule d'Itô (voir [3]) sur l'équation tronquée et régularisée, puis en passant à la limite sur la troncature et la régularisation (voir [5], Propositions 4.4 et 4.5 pour les détails).

Dans le cas sous critique, c'est à dire lorsque $\sigma < 2/n$, on utilise une inégalité de martingale (inégalité de Doob) pour obtenir une estimation de l'intégrale stochastique

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\le\tau\wedge\bar{\tau}^R}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\bar{u}\nabla u\cdot\nabla dW dx\right|^2\right) \le 4\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau\wedge\bar{\tau}^R}\sum_{\ell\in\mathbb{N}}(\bar{u}\nabla u, \nabla\phi e_\ell)^2 ds\right)$$

où on a posé $\bar{\tau}^R = \inf\{t \in [0, \tau^*(u_0)[,\ |u|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \ge R\}$, et où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ceci, joint à la Proposition 3.2 et au fait que $\sigma < 2/n$, permet d'obtenir facilement, grâce aux inégalités de Gagliardo-Nirenberg, l'estimation suivante pour les solutions locales de l'équation (2) :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\le\tau}|u(t)|^4_{H^1(\mathbb{R}^n)}\right) \le C(\phi, u_0, T_0),$$

pour tout $T_0 > 0$ et tout temps d'arrêt τ avec $\tau < T_0 \wedge \tau^*(u_0)$ presque sûrement; on en déduit la globalité des solutions dans ce cas.

Théorème 3.3. *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, si de plus $\sigma < 2/n$, alors pour tout u_0 presque sûrement dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{F}_0$-mesurable, la solution de (2) donnée par le théorème 3.1 est globale, i.e. $\tau^*(u_0) = +\infty$ presque sûrement.*

Le même résultat serait vrai pour toutes les valeurs de σ admises dans le Theorème 3.1, si au lieu de (2), on avait considéré une version défocalisante de cette équation, dans laquelle le terme non linéaire a le signe opposé.

4 Explosion en temps fini

Après avoir vu de quelle manière on pouvait globaliser les solutions locales lorsque les solutions déterministes sont globales, on s'interesse maintenant aux valeurs de la puissance σ pour lesquelles l'équation de (NLS) déterministe donne lieu à l'apparition de singularités en temps fini.

Il n'est pas difficile de généraliser à l'équation stochastique l'identité déterministe connue sous le nom d'identité de la variance ou du viriel, et d'en déduire un résultat d'explosion en temps fini pour certaines données initiales, possédant une énergie suffisamment négative en moyenne. C'est ce que l'on expliquera dans le paragraphe suivant.

Ce qui est plus interessant, et que l'on décrira ensuite, est la manière dont on peut voir que ceci implique, lorsque σ est strictement surcritique, que toutes les données initiales non nulles engendrent des solutions qui donnent lieu à l'apparition de singularités en temps fini (voir Théorème 4.4).

On se place donc a partir de maintenant dans le cas critique ou surcritique, i.e. on suppose $\sigma \geq 2/n$.

4.1 Identité de la variance stochastique et explosion pour certaines données initiales.

Dans ce qui suit, on appellera variance de u la quantité

$$V(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |u|^2 dx$$

(noter que ceci n'est pas la variance reliée à notre espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$). On notera également Σ l'espace des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^n)$ dont la variance est finie, et, pour $u \in \Sigma$, on notera $G(u)$ le moment

$$G(u) = \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) x \cdot \nabla \bar{u}(x) dx.$$

Enfin, f^1_ϕ désigne la fonction définie à partir de l'opérateur ϕ par

$$f^1_\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\nabla \phi e_k(x)|^2 = |\nabla_x \mathcal{K}(x,\cdot)|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

L'opérateur ϕ étant supposé par la suite au minimum Hilbert-Schmidt à valeurs dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, la fonction f^1_ϕ est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et ne dépend evidemment pas de la base $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

L'évolution de V pour les solutions de l'équation (2) est alors décrite dans la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Outre les hypothèses du Théorème 3.1, on suppose que $u_0 \in \Sigma$ presque sûrement. Alors pour tout temps d'arrêt τ avec $\tau < \tau^*(u_0)$ p.s., la solution u donnée par le Théorème 3.1 vérifie*

$$\begin{aligned} &V(u(\tau)) \\ &= V(u_0) + 4G(u_0)\tau + 8H(u_0)\tau^2 + 4\frac{2-\sigma n}{\sigma+1}\int_0^\tau \int_0^s |u(s_1)|^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}} ds_1 ds \\ &+ 8\int_0^\tau \int_0^s \int_0^{s_1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,s_2)|^2 f^1_\phi dx ds_2 ds_1 ds \\ &+ 4\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_0^\tau \int_0^s \int_{\mathbb{R}^n} |u(s_1,x)|^2 x\cdot\nabla(\phi e_k)(x) dx d\beta_k(s_1) ds \\ &- 16\mathrm{Im}\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_0^\tau \int_0^s \int_0^{s_1} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}(x,s_2)\nabla u(x,s_2)\cdot\nabla(\phi e_k)(x) dx d\beta_k(s_2) ds_1 ds. \end{aligned} \tag{7}$$

Nous sommes maintenant en mesure, à l'aide de l'identité précédente, de généraliser le théorème déterministe d'existence de solutions explosives dans les cas critique ou surcritique (voir par exemple [11]). Le théorème suivant dit en effet que si une donnée initiale est d'énergie suffisamment négative en moyenne (par rapport au bruit) alors la solution correspondante explose.

Théorème 4.2. *Outre les hypothèses du Théorème 3.1, on suppose que $\sigma \geq 2/n$, et que f^1_ϕ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^n$. Soit $u_0 \in L^2(\Omega;\Sigma) \cap L^{2\sigma+2}(\Omega; L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^n))$ pour lequel il existe $\bar{t} > 0$ tel que*

$$\mathbb{E}(V(u_0)) + 4\mathbb{E}(G(u_0))\bar{t} + 8\mathbb{E}(H(u_0))\bar{t}^2 + \frac{4}{3}\bar{t}^3 m_\phi \mathbb{E}(M(u_0)) < 0 \tag{8}$$

où on a posé $m_\phi = |f_\phi^1|_{L^\infty}$, *alors*

$$\mathbb{P}(\tau^*(u_0) \le \bar{t}) > 0.$$

Ce théorème est démontré dans [7]. L'idée de la preuve est la suivante : En supposant que $\tau^*(u_0) > \bar{t}$ presque sûrement, on peut, sous les hypothèses du Théorème 4.1 prendre l'espérance de $V(u(t))$ dans l'expression donnée par la Proposition 4.1. Les termes contenant des intégrales stochastiques sont alors formellement de moyenne nulle, et on obtient pour $t \le \bar{t}$,

$$\mathbb{E}(V(u(t))) \le \mathbb{E}(V(u_0)) + 4\mathbb{E}(G(u_0))t + 8\mathbb{E}(H(u_0))t^2 + \frac{4}{3}t^3 m_\phi \mathbb{E}(M(u_0));$$

ceci est en contradiction avec (8) en $t = \bar{t}$, puisque $V(u)$ est une quantité positive. La justification rigoureuse de ce raisonnement requiert cependant quelques précautions.

De plus, il n'est pas difficile de voir que le même résultat est vrai si l'inégalité (8) est vérifiée sur un sous ensemble Ω_0 $\mathcal{F}_0$-mesurable et de probabilité strictement positive de Ω. Il suffit en effet de remplacer $\mathbb{E}(V(u(t)))$ par $\mathbb{E}(V(u(t))\mathbb{1}_{\Omega_0})$, et de noter que $u(t,\omega) = 0$ pour tout $t \ge 0$ si $u_0(\omega) = 0$.

On obtient ainsi le corollaire suivant, où, pour $\bar{M}$, $\bar{H}$ constantes positives, on a noté

$$\mathcal{V}_{\bar{M},\bar{H}} = \left\{ v \in \Sigma,\ V(v) < \bar{M},\ G(v) < \bar{M},\ |v|_{L^2}^2 < \bar{M},\ H(v) < -\bar{H} \right\}.$$

Corollaire 4.3. *Soient* u_0, σ *et* ϕ *comme dans le Théorème 3.1, avec* $\sigma \ge 2/n$, $f_\phi^1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *et* $u_0 \in \Sigma$ *p.s. Alors, pour tous* $\bar{M} > 0$ *et* $\bar{t} > 0$, *il existe une constante* $\bar{H}(\bar{t}, \bar{M}) > 0$ *telle que*

$$\mathbb{P}(u_0 \in \mathcal{V}_{\bar{M},\bar{H}} > 0) \Rightarrow \mathbb{P}(\tau^*(u_0) \le \bar{t}) > 0.$$

Il suffit en effet de considerer $\bar{H}$ assez grand pour que

$$\bar{M} + 4\bar{t}\bar{M} - 8\bar{t}^2\bar{H} + \frac{4}{3}\bar{t}^3 m_\phi \bar{M} < 0,$$

puis d'appliquer l'argument précédent avec

$$\Omega_0 = \left\{ \omega \in \Omega,\ u_0(\cdot,\omega) \in \mathcal{V}_{\bar{M},\bar{H}} \right\}.$$

4.2 Explosion pour toute donnée initiale dans le cas strictement surcritique.

On suppose maintenant $\sigma > 2/n$. Nous sommes en mesure dans ce cas de montrer que toute donnée initiale non nulle donne lieu à une solution qui explose en temps fini avec une probabilité strictement positive, ainsi que l'établit le théorème suivant, sous une condition de non dégénérescence du bruit. Pour des raisons techniques, on se restreint ici aux dimensions $n \leq 3$.

Théorème 4.4. *On suppose $\sigma > 2/n$, si $n = 1$ ou 2, $2/3 < \sigma < 2$ si $n = 3$, ϕ Hilbert-Schmidt de $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ dans $H^2(\mathbb{R}^n)$, et $\ker\phi^* = \{0\}$. Alors, pour tout $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $u_0 \neq 0$, vérifiant $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^4 |u_0(x)|^2 dx < +\infty$, et pour tout $t > 0$, on a*

$$\mathbb{P}(\tau^*(u_0) \leq t) > 0$$

où $\tau^*(u_0)$ est le temps d'existence de la solution de l'équation (2) avec $u(0) = u_0$ donnée par le Théorème 3.1.

Ce théorème est également démontré dans [7]. Un résultat analogue est démontré dans [6], dans le cas où le bruit intervient de manière additive dans l'équation, c'est à dire sous la forme d'un terme de force. La preuve du théorème est alors plus simple, même si l'idée de base est la même. Il s'agit en effet de fixer $t_1, t_2 > 0$, puis de montrer que l'on peut construire un contrôle deterministe tel que la solution au temps t_1 de l'équation dans laquelle le bruit est remplacé par ce contrôle vérifie la condition d'explosion (8) avec $\bar{t} = t_2$. L'hypothèse de non dégénérescence du bruit $\mathrm{Ker}\phi^* = \{0\}$ entraine alors que sur l'intervalle de temps $[0, t_1]$, le bruit est proche du contrôle avec une probabilité positive, et l'on peut ainsi espérer que la solution de l'équation (2) sera elle même proche de la solution du problème contrôlé, au temps t_1, avec une probabilité positive. Ainsi, la solution de (2) vérifiera au temps t_1, les hypothèses du corollaire 4.3 avec $\bar{t} = t_2$, et explosera donc avant le temps $t_1 + t_2$.

La justification de cette idée est plus délicate qu'il ne semble, et fait appel a une propriété de support de la solution.

Nous allons maintenant préciser, d'une part comment on peut construire le contrôle dont il a été question précédemment, et d'autre part la propriété de support et les arguments de sa preuve.

4.3 Construction du potentiel

Il est ici essentiel que $\sigma > 2/n$ et que $u_0 \neq 0$ (il est facile de voir que la propriété ennoncée ci-après n'est pas vraie si l'une de ces deux conditions n'est pas satisfaite).

Proposition 4.5. *Soit $u_0 \in \Sigma$ avec $u_0 \neq 0$, $\sigma > 2/n$ et $T > 0$ fixé. Posons*

$\bar{M} = \max(M(u_0), V(u_0)+4T|G(u_0)|, |G(u_0)|)$. Alors pour tout $\bar{H} > 0$, il existe $t_1 < T$ et un potentiel $f \in L^s(0,t_1,W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ pour un certain $s > 1$ et un p avec $1 \leq p < 1+\frac{1}{\sigma}$, tel que la solution de

$$\begin{cases} i\dfrac{dU}{dt} - (\Delta U + |U|^{2\sigma}U + fU) = 0 \\ U(0) = u_0 \end{cases} \tag{9}$$

existe sur $[0,t_1[$ et vérifie $U(t_1) \in \mathcal{V}_{\bar{M},\bar{H}}$.

L'idée pour la construction de f est de considérer l'équation de (NLS) suivante, où l'on a pris $\tilde{\sigma}$ tel que $\frac{2}{n} < \tilde{\sigma} < \sigma$:

$$\begin{cases} i\dfrac{dU}{dt} - (\Delta U + \lambda|U|^{2\tilde{\sigma}}U) = 0 \\ U(0) = u_0. \end{cases} \tag{10}$$

La constante $\lambda \geq 0$ est choisie assez grande pour que l'énergie

$$H_{\tilde{\sigma},\lambda}(U(t)) = H_{\tilde{\sigma},\lambda}(u_0) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_0(x)|^2 dx - \frac{\lambda}{2\sigma+2}\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|^{2\tilde{\sigma}+2} dx$$

correspondant à l'équation (10) vérifie

$$V(u_0) + 4TG(u_0) + 8T^2 H_{\tilde{\sigma},\lambda}(u_0) < 0.$$

D'après la théorie déterministe, l'équation (10) possède alors une unique solution locale $U(t)$, continue à valeurs dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, et cette solution explose en un temps T^* avec $T^* < T$. En particulier,

$$\lim_{t\to T^*} |U(t)|_{H^1} = +\infty$$

et par conservation de l'énergie,

$$\lim_{t\to T^*} |U(t)|_{L^{2\tilde{\sigma}+2}} = +\infty.$$

Il est alors facile de constater, grâce à la conservation de la norme L^2 de $U(t)$ et à l'inégalité de Hölder que

$$\lim_{t\to T^*} H(U(t)) = -\infty.$$

Ainsi, on peut choisir $t_1 < T$ de telle sorte que $H(U(t_1)) < -\bar{H}$. De plus, on a facilement, si $\bar{M}$ est choisi assez grand,

$$V(U(t_1)) \leq V(u_0) + 4t_1|G(u_0)| < \bar{M}$$

et

$$G(U(t_1)) \leq G(u_0) + 4t_1 H_{\tilde{\sigma},\lambda}(u_0) < G(u_0) < \bar{M}$$

d'où $U(t_1) \in \mathcal{V}_{\bar{M},\bar{H}}$.

En posant $f(t) = \lambda|U(t)|^{2\tilde{\sigma}} - |U(t)|^{2\sigma}$, il est clair que U est la solution de (9).

4.4 La propriété de support

Le but ici est d'exposer les arguments qui permettent d'affirmer que lorsque le bruit est non dégénéré, le support de la solution de (2) rencontre $\mathcal{V}_{\bar{M},\bar{H}}$, ce qui nous permettra d'appliquer le corollaire 4.3. Le résultat précis est le suivant.

Proposition 4.6. *Sous les hypothèses du Théorème 4.4 sur u_0 et ϕ, soient $T > 0$, $\bar{H} > 0$, et $t_1 < T$, U donnés par la Proposition 4.5. Alors pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de $U(t_1)$ dans Σ, la solution de (2) donnée par le Théorème 3.1 vérifie*

$$\mathbb{P}(\tau^*(u_0) > t_1 \text{ et } u(t_1) \in \mathcal{V}) > 0.$$

Les idées de la preuve de la Proposition 4.6 suivent les idées qui permettent de caractériser le support d'une diffusion exposées dans [10]. Ce sont en gros les suivantes : tout d'abord, l'hypothèse $\mathrm{Ker}\phi^* = \{0\}$ permet de considérer une suite $f_n = \phi g_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ dans $C([0,T]; H^2)$. On utilise ensuite une approximation constante par morceaux du bruit, en posant $\Delta t = \frac{1}{n}$, et

$$\dot{W}_n(t) = \frac{\phi P_n W_c(k\Delta t) - \phi P_n W_c((k-1)\Delta t)}{\Delta t}, \quad t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t[$$

où $W_c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) e_k = \phi^{-1} W(t)$ est un processus de Wiener cylindrique et P_n est l'opérateur de projection sur vect$\{e_k,\ k \le n\}$.

On considère alors pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation

$$idu^n - (\Delta u^n + |u^n|^{2\sigma} u^n + f_n u^n)dt = u^n dW - \frac{i}{2} u^n F_\phi dt - u^n \dot{W}_n dt. \tag{11}$$

Le théorème de Girsanov permet d'affirmer que le processus

$$W_n(t) = W(t) - \int_0^t (\dot{W}_n(s) - \phi g_n(s))ds$$

est un processus de Wiener de covariance $t\phi\phi^*$, pour la nouvelle mesure de probabilité $d\mathbb{P}_n = D_n d\mathbb{P}$ où

$$D_n = \exp\left(\int_0^T (\phi^{-1}\dot{W}_n(s) - g_n(s), \phi^{-1} dW(s)) - \frac{1}{2}\int_0^T |\phi^{-1}\dot{W}_n(s) - g_n(s)|_{L^2}^2 ds \right) > 0.$$

Avec cette nouvelle écriture, u^n est clairement solution de

$$idu^n - (\Delta u^n + |u^n|^{2\sigma} u^n)dt = u^n dW_n - \frac{i}{2} u^n F_\phi dt. \tag{12}$$

Mais la loi de la solution de (2) ne dépend ni de l'espace de probabilité ni du processus de Wiener, et donc la loi de u^n est égale à celle de u, solution de (2). Ainsi, il est facile de voir que la probabilité $\mathbb{P}$ pour que le temps d'existence de u soit supérieur à t_1 et pour que $u(t_1) \in \mathcal{V}_{\bar{M},\bar{H}}$, qui est égale à l'équivalent pour u^n avec la probabilité $\mathbb{P}_n$, est strictement positif si et seulement si

$$\mathbb{P}(\tau_n^*(u_0) > t_1 \text{ et } u^n(t_1) \in \mathcal{V}_{\bar{M},\bar{H}}) > 0, \tag{13}$$

où $\tau_n^*(u_0)$ est le temps d'existence de la solution u^n de (11).

On montre dans [7] que u^n converge vers U en probabilité lorsque n tend vers l'infini, ce qui suffit à conclure que (13) est vérifiée pour n assez grand, puisque $U(t_1) \in \mathcal{V}_{\bar{M},\bar{H}}$.

4.5 Conclusion

Il est facile de conclure la preuve du Théorème 4.4, grâce aux propositions précédentes. Il suffit en effet de choisir $T > 0$ et $t_2 > 0$ de telle sorte que $T + t_2 \leq t$, puis de fixer $\bar{H} > 0$ tel que le Corollaire 4.3 soit vérifié avec $\bar{t} = t_2$ et $\bar{M}$ donné par la Proposition 4.5. En appliquant les Propositions 4.5 et 4.6, on obtient le fait que pour un $t_1 < T$, la probabilité de l'ensemble

$$\Omega_{t_1} = \left\{\omega \in \Omega, \quad \tau^*(u_0) > t_1 \quad \text{et} \quad u(t_1) \in \mathcal{V}_{\bar{M},\bar{H}}\right\}$$

est strictement positive, ce qui implique, par le Corollaire 4.3, que la solution de (2) explose avant $t_1 + t_2$ avec une probabilité strictement positive.

References

[1] Bang, O.; Christiansen, P.L.; If, F.; Rasmussen, K.O.; Gaididei, Y.B. Temperature effects in a nonlinear model of monolayer Scheibe aggregates. Phys. Rev. E **1994**, *49*, 4627–4636.

[2] Bang, O.; Christiansen, P.L.; If, F.; Rasmussen K.O.; Gaididei, Y.B. White Noise in the Two-dimensional Nonlinear Schrödinger Equation. Appl. Anal. **1995**, *57*, 3–15.

[3] Da Prato, G.; Zabczyk, J. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*; Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press: Cambridge, England, 1992.

[4] de Bouard, A.; Debussche, A. A stochastic nonlinear Schrödinger equation with multiplicative noise. Comm. Math. Phys. **1999**, *205*, 161–181.

[5] de Bouard, A.; Debussche, A. The stochastic nonlinear Schrödinger equation in H^1, Stochastic Analysis and Appl. **2003**, *21*, 97–126.

[6] de Bouard, A.; Debussche, A. On the effect of a noise on the solutions of the focusing supercritical nonlinear Schrödinger equation, Prob. Theory and Rel. Fields, **2002**, *123*, 76-96.

[7] de Bouard, A.; Debussche, A. Blow-up for the stochastic nonlinear Schrödinger equation with multiplicative noise, Preprint.

[8] Debussche, A.; Di Menza L. Numerical simulation of focusing stochastic nonlinear Schrödinger equations. Phys. D **2002**, *162*, 131-154.

[9] Konotop, V.; Vázquez L. *Nonlinear random waves*; World Scientific Publishing Co., Inc.: River Edge, N.J., 1994.

[10] Millet, A.; Sanz-Solé, M. A simple proof of the support theorem for diffusion processes, Séminaire de Probabilité XXVIII, J. Azéma et al. ed., LNM 1583, **1994**, 36-48.

[11] Sulem, C.; Sulem, P.L. *The nonlinear Schrödinger Equation, Self-Focusing and Wave Collapse*; Appl. Math. Sciences, Springer Verlag, New York, 1999.

[12] Ueda, T.; Kath W.L. Dynamics of optical pulses in randomly birefrengent fibers. Physica D **1992**, *55*, 166–181.