Calibration de modèles, volatilité locale et stochastique

Master Probabilités et Finance

Examen du 13 mars 2019

(9h30 – 11h30, notes de cours et de TD autorisées. Sans ordinateur, sans téléphone.)

▶ Ce sujet est volontairement assez long. Essayez d'aborder autant de questions que vous pourrez. L'ordre des exercices n'est pas important.
▶ Pensez à rédiger vos réponses avec clarté et de manière lisible, la notation en tiendra compte.
▶ Vous pouvez rédiger vos réponses en français ou en anglais.

Questions. Les deux questions ci-dessous sont indépendantes.

Q1) On considère un marché contenant un actif sans risque $S^0_t = e^{r\,t}$ avec taux d'intérêt r et un actif risqué S. On cherche à couvrir une option européenne $g(S_T)$ de maturité T (avec payoff g continu et à croissance polynomiale) en utilisant un portefeuille auto-finançant $V_t = \delta^0_t S^0_t + \delta_t S_t$ en temps continu, en supposant que l'actif S suit une dynamique à volatilité locale avec fonction de vol locale $\sigma(\cdot,\cdot)$ satisfaisant l'hypothèse (H) donnée dans le cours. En plus du marché pour ces deux actifs, on peut emprunter (ou prêter) l'actif S sur un marché repo à un certain taux q constant, selon le mécanisme suivant : un portefeuille contenant $\delta_t = n$ unités de l'actif S sur l'intervalle $[t, t+\Delta t]$ génère la contribution additionnelle $n\,q\,\Delta t$ à l'instant $t+\Delta t$. Cela veut dire que : si $n > 0$, on possède n unités de l'actif que l'on prête sur le marché repo, on les récupère en $t+\Delta t$ et $n\,q\,\Delta t$ est un montant gagné ; si $n < 0$, on emprunte n unités de l'actif sur le marché repo à rendre en $t+\Delta t$, et le montant $n\,q\,\Delta t$ est un côut à payer.

- Q1-a) Donner la dynamique du portefeuille V.
- Q1-b) On cherche un delta de la forme $\delta_t = \partial_x v(t, S_t)$ pour une fonction v régulière à déterminer (on demandera $v \in C^{1,2}([0,T) \times [0,\infty))$). Donner l'équation différentielle que la fonction v doit satisfaire et le choix de richesse initiale V_0 afin d'avoir une couverture parfaite de l'option à l'aide du portefeuille V.

Q2) Soit $w : x \in \mathbb{R} \mapsto w(x)$ une variance implicite totale sans arbitrage pour une maturité T fixée, en fonction de la variable log-moneyness $x = \log \frac{K}{F}$ (F étant la valeur du forward pour la maturité T). On suppose $w \in C^2(\mathbb{R})$ et $w(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que si x_0 est un point de maximum local de w, alors

$$w''(x_0) \geq -2.$$

En d'autres termes : même si une variance implicite n'est pas forcément convexe, elle ne peut pas être "trop concave" à ses points extremaux.

Exercise 1. **Relations d'arbitrage entre le marché VIX et le marché SP500**. Soit S_t le cours de l'indice SP500, et VIX_t le cours de l'indice VIX à l'instant t. Dans cet exercice, on s'intéresse aux manières possibles de répliquer le contrat de payoff $(\mathrm{VIX}_T)^2$ (qui n'est pas coté sur le marché du VIX, ni sur celui du SP500).
On note

- F_t^T la cotation en t du forward sur S de maturité T.
- FVIX_t^T la cotation en t du future sur VIX de maturité T.
- $\mathrm{P}_t(T,K)$ (resp. $\mathrm{C}_t(T,K)$) le prix en t d'une option put (resp. call) sur le VIX de maturité T et strike K.

Plus en général, on notera $\mathrm{prix}_t^{\mathrm{mkt}}(H_T, T)$ le prix comptant en t d'un payoff H_T reçu en T. On utilisera un facteur d'actualisation $e^{-r(T-t)}$ déterministe.

1. Donner une formule pour $\mathrm{prix}_t^{\mathrm{mkt}}\left((\mathrm{VIX}_T)^2, T\right)$ en termes de $(\mathrm{FVIX}_t^T)^2$ et des fonctions $\mathrm{P}_t(T,\cdot)$ et $\mathrm{C}_t(T,\cdot)$.
2. On note $L_t(T) = \mathrm{prix}_t^{\mathrm{mkt}}\left(-\frac{2}{\delta}\log\frac{S_T}{F_0^T}\right)$ le prix en t d'un log-contrat sur S de maturité T et de payoff $-\frac{2}{\delta}\log\frac{S_T}{F_0^T}$, où $\delta = 30$ jours est une constante fixée. On considère le portefeuille
   - long $e^{r\,\delta}$ log-contrats de maturité $T+\delta$,
   - short un log-contrat de maturité T.

   On note $H_{T+\delta}$ le payoff généré par ce portefeuille à l'instant $T+\delta$.

   (a) Exprimer $\mathrm{prix}_T^{\mathrm{mkt}}(H_{T+\delta}, T+\delta)$ en termes de VIX_T.

   (b) Exprimer $\mathrm{prix}_t^{\mathrm{mkt}}(H_{T+\delta}, T+\delta)$ en termes de la fonction $L_t(\cdot)$, pour $t \le T$.
3. En supposant absence d'arbitrage sur le marché du VIX et le marché du SP500, déduire une équation qui relie les valeurs de $(\mathrm{FVIX}_t^T)^2$, de $\mathrm{P}_t(T,\cdot)$ et $\mathrm{C}_t(T,\cdot)$ au prix du log-contrat $L_t(\cdot)$ sur le marché du SP500.

Exercise 2. **Bornes sur la dérivée de la volatilité implicite**. On considère une volatilité implicite totale $v : x \in \mathbb{R} \mapsto v(x)$ à maturité T fixée, en fonction de la variable log-moneyness $x = \log\frac{K}{F}$ (F étant la valeur du forward pour la maturité T). On suppose $v \in C^1(\mathbb{R})$, $v(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que v est une vraie volatilité implicite sans arbitrage statique, de sorte que (dans la notation du cours pour la fonction $\mathrm{c_{BS}}$)

$$\mathrm{c_{BS}}(x, v(x)) = \mathbb{E}\left[\left(e^{X_T} - e^x\right)^+\right] \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

pour une variable aléatoire X_T telle que $\mathbb{E}[e^{X_T}] = 1$. On note $\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$ la densité de la gaussienne centrée réduite, $N(y) = \int_{-\infty}^y \phi(y)dy$ sa fonction de répartition, et $d_2(x) = -\frac{x}{v(x)} - \frac{v(x)}{2}$.

1. Montrer l'identité

$$-N(d_2(x)) + \phi(d_2(x))v'(x) = -\mathbb{P}(X_T > x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que $\frac{N(d_2(x))}{\phi(d_2(x))} < \frac{1}{\sqrt{2x}}$, pour tout $x > 0$.
3. Conclure que l'on a $v'(x) < \frac{1}{\sqrt{2x}}$ pour tout $x > 0$. En déduire également la borne non asymptotique

$$v(x) < v(0) + \sqrt{2x}, \qquad \forall x > 0.$$

Pour en savoir plus : il est également possible de démontrer l'inégalité $v'(x) > -\frac{1}{\sqrt{2|x|}}$ pour tout $x < 0$.

Exercise 3. **Modèle de Bergomi**. On considère dans cet exercice une classe de modèles stochastiques pour la variance forward d'un actif S. Pour tout $T > 0$, le processus de variance forward instantanée $(\xi_t^T)_{t<T}$ est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\xi_t^T &= \xi_t^T \varphi(T-t)\mathrm{d}W_t \qquad t < T \\ \xi_0^T &= \xi_0^{T,\mathrm{mkt}}, \end{aligned}$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, $\varphi \in C(\mathbb{R}_+)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, et $T \mapsto \xi_0^{T,\mathrm{mkt}}$ est la courbe de variance forward instantanée observée sur le marché en $t = 0$ (supposé continue en T).

1. (a) Montrer que l'on a, pour tout $T > 0$,

   $$\xi_t^T = \xi_0^{T,\mathrm{mkt}} e^{X_t^T - \frac{1}{2}\langle X^T\rangle_t} \qquad t < T,$$

   où $(X_t^T)_{t<T}$ est un processus gaussien que l'on précisera, et $\langle X^T\rangle_t$ sa variation quadratique.

   (b) La variable aléatoire ξ_T^T est-elle bien définie ? Justifier que

   $$\mathbb{E}\left[\xi_t^T \middle| \mathcal{F}_s\right] = \xi_s^T, \qquad \forall s \leq t \leq T. \tag{1}$$

2. Pricing d'option sur variance forward.

   (a) Donner l'expression de la variance forward $V_T^{T_1,T_2}$ en termes de la fonction $u \mapsto \xi_T^u$, pour $T \leq T_1 < T_2$.

   (b) On considére le cas (idéalisé) d'une option call sur variance forward instantanée, de maturité T et payoff $(\xi_T^u - K)^+$, pour un certain $u > T$. On définit son prix à l'instant t en posant

   $$\mathrm{prix}_t\left((\xi_T^u - K)^+, T\right) = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}(\xi_T^u - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

   où r est un taux d'intérêt fixé. Soit $\mathrm{Call}_{\mathrm{BS}}(\tau, F, K, w)$ la valeur d'un call Black-Scholes de temps à maturité τ, forward F, strike K, variance totale w et taux d'intérêt r fixé. Montrer que l'on a

   $$\mathrm{prix}_t\left((\xi_T^u - K)^+, T\right) = \mathrm{Call}_{\mathrm{BS}}\big(T-t, F(t,u), K, w(t,T,u)\big),$$

   pour des valeurs de $F(t,u)$ et $w(t,T,u)$ que l'on identifiera.

(c) On définit le prix à l'instant t d'une option sur variance forward de maturité T et de payoff $g(V_T^{T_1,T_2})$ par

$$\text{prix}_t\Big(g(V_T^{T_1,T_2}),T\Big)=\mathbb{E}\Big[e^{-r(T-t)}g(V_T^{T_1,T_2})\Big|\mathcal{F}_t\Big].$$

Montrer que l'on a $\text{prix}_t\Big(g(V_T^{T_1,T_2}),T\Big)=G(t,(\xi_t^u)_{u\in[T_1,T_2]})$ pour une fonction $G(t,x^\cdot)$ du temps t et d'une courbe $x^\cdot$ sur $[T_1,T_2]$. On écrira la fonction G (également dépendante de T, T_1 et T_2) sous forme d'espérance.

3. Le modèle étudié par L. Bergomi dans *[Smile Dynamics II, Risk Magazine, 2005]* est obtenu en posant

$$\varphi(\tau)=\eta\, e^{-k\,\tau}\qquad\forall\tau\geq 0,$$

où $\eta,k>0$ sont deux paramètres positifs.

(a) Montrer que, dans ce cas.

$$X_t^T=\varphi(T-t)X_t\qquad\forall\, 0\leq t\leq T,$$

où X_t^T est le processus introduit dans la Question 1, et le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est la solution d'une EDS (indépendante de T !) que l'on idéntifiera.

(b) En déduire la représentation

$$\xi_t^T=\xi_0^T\,\Phi(t,T,X_t)\qquad\forall\, 0\leq t\leq T,\tag{2}$$

pour une fonction déterministe $\Phi(t,T,x)$ que l'on explicitera.

L'équation (2) donne ce que l'on appelle une *représentation Markovienne* de la courbe de variance forward : le processus $(\xi_t^\cdot)_{t\geq 0}$, à valeurs dans un espace infini-dimensionnel de fonctions, est en fait une fonction déterministe du temps, de la maturité T et d'un seul processus de Markov en dimension 1 (le processus X_t).

4. Formuler un modèle stochastique pour l'actif S qui soit cohérent avec le modèle ci-dessus pour ξ, dans le sens : les cotations en t des swaps de variance sur S de maturité T coïncident avec $V_t^{t,T}$ ($V_t^{t,T}$ étant définie dans la Question 2(a)).