

Calibration de modèle, volatilité locale et stochastique

Master Probabilités et Finance

Contrôle de connaissances 2020

- **Date limite pour le rendu** : 11 mai 14h00 (heure Paris).
- Avant le 10 avril 14h (heure Paris) : répondre au (très court) questionnaire

<https://forms.gle/fzbemTc6KFJvSNQs7>

pour indiquer le choix que vous aurez fait pour la partie 2.

- Le rendu est individuel : un rendu par personne.
- Pour le rendu final : envoyer un mail à `stefano.de-marco@polytechnique.edu`, en suivant les consignes données ci-dessous.
Titre du mail à envoyer : **Cours Calibration - rendu final**.
- The choice of the language for your work is free : French or English.

Partie 1

1. Aborder les questions Q1 et Q2 et l'Exercice 1 de l'examen 2019, disponible en ligne sur http://www.cmap.polytechnique.fr/~demarco/files/calibrationParis6/Examen_2019.pdf

Commentaire : cette partie n'est pas censée vous prendre beaucoup de temps, gardez en tête que l'examen 2019 (bien qu'étant un sujet assez long) a duré 2h. Deux-trois pages devraient largement vous suffire pour cette composition. Et si vous n'arrivez pas à répondre à une des questions ou à faire l'exercice, faites comme d'habitude... passez outre, et abordez les points ci-dessus.

2. Choisir et aborder l'un des exercices suivants :

- a) Soient $v_1(t, S)$ et $v_2(t, S)$, pour $(t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$, les deux fonctions de prix pour une option de payoff $g(S_T)$ générées par deux modèles à volatilité locale, avec fonction de vol locale $\sigma_1(\cdot)$, respectivement $\sigma_2(\cdot)$. Un taux d'intérêt r et un taux repo q sont inclus dans le modèle. En supposant que la fonction payoff $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, montrer la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_1(t, S) \geq \sigma_2(t, S), \quad \forall (t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+ \\ \Rightarrow v_1(t, S) \geq v_2(t, S), \quad \forall (t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+. \quad (1) \end{aligned}$$

En d'autres termes : le prix d'une option de payoff convexe est une fonction croissante de la volatilité (dans un modèle Black-Scholes, c'est fonction croissante du paramètre de volatilité σ ; dans le cas plus général, il s'agit d'une

monotonie par rapport à la fonction $\sigma(\cdot)$. Vous préciserez, dans votre dérivation de la propriété (1), quelles sont les hypothèses dont vous avez besoin sur les fonctions $\sigma_i(\cdot)$ et $v_i(\cdot)$, $i \in \{1, 2\}$.

Indication : montrer la propriété demandée d'abord pour $t = 0$, pour simplifier. Le cas $0 < t < T$ se traite de la même manière.

- b) Dans un modèle à vol locale $dS_t = r S_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dW_t$, on considère un put sur la variance réalisée continue $V_T = \int_0^T \sigma(t, S_t)^2 dt$ (non annualisée). On note $P_V(T, K) = \mathbb{E}[e^{-rT}(K - V_T)^+]$ le prix de l'option généré par ce modèle. La fonction $\sigma(\cdot)$ satisfait l'hypothèse (H) donnée dans le cours. Montrer que la fonction P_V satisfait l'équation forward suivante :

$$\partial_{TK} P_V(T, K) + r \partial_K P_V(T, K) + \gamma^2(T, K) \partial_{KK} P_V(T, K) = 0, \quad \forall T > 0, K > 0 \quad (2)$$

où la fonction γ est telle que $\gamma^2(t, K) = \mathbb{E}[\sigma^2(t, S_t) | V_t = K]$, pour tout $(t, K) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$, presque sûrement.

Vous préciserez, dans votre dérivation de l'équation (2), quelles sont les hypothèses dont vous avez besoin sur la loi de la variable aléatoire V_t et sur la fonction γ .

- c) Dans les cours 1 (22 janvier 2020), nous avons dérivé l'approximation suivante (dite approximation *theta-gamma*) pour le PnL de couverture en delta d'une option de payoff $g(S_T)$ sur un actif de cours S :

$$\text{PnL}_T = V_T - g(S_T) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \partial_{SS} P(t_i, S_{t_i}) S_{t_i}^2 \left(\sigma^2 \Delta t - \left(\frac{\Delta S_i}{S_{t_i}} \right)^2 \right), \quad (3)$$

lorsque : l'option est valorisée avec la fonction de prix $P_\sigma(t, S)$ satisfaisant l'EDP de Black-Scholes avec paramètre σ et condition terminale g , le portefeuille autofinçant $V_t = \delta_t^0 e^{rt} + \delta_t S_t$ suit la stratégie $\delta_t = \partial_S P(t, S_t)$ et investit dans l'actif sans risque e^{rt} , la couverture est réajustée à des dates discrètes $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < T$ avec $\Delta t = t_{i+1} - t_i \ll 1$, et $\Delta S_i = S_{t_{i+1}} - S_{t_i}$. L'expression ci-dessus a été obtenue en supposant que le taux d'intérêt r est nul : $r = 0$.

Détailler la dérivation de l'approximation theta-gamma qui remplace (3) dans le cas où $r \neq 0$.

Rendu de la partie 1 : un fichier pdf rédigé avec LaTeX. A défaut, des feuilles manuscrites numérisées ou rédigées avec une tablette numérique (en tout cas : un fichier de qualité telle que le texte soit aisément lisible).

→ A envoyer comme pièce jointe à votre mail.

Partie 2

- Choisir et lire un article dans la liste

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~demarco/files/calibrationParis6/coursCalibM2ListeArticles.html>

et préparer une présentation de l'article comme si c'était une soutenance orale.

Rendu de la partie 2

- Option slides + audio : enregistrer une vidéo de type “visioconférence”, montrant vos slides et avec commentaire oral des slides de votre part.

Durée max de la présentation (et donc du fichier vidéo) : 15 min.

Voir ci-dessous pour quelques suggestions sur les solutions technologiques possibles pour un tel enregistrement.

Commentaire sur la durée et le nombre de slides : une bonne règle à avoir en tête est que le nombre de slides ne devrait pas dépasser le nombre de minutes de présentation (et de préférence, être strictement inférieur). Si vous comptez passer 10-20 secondes sur un certain slide... ça veut probablement dire que le slide n'est pas nécessaire. C'est un bon exercice : cela oblige à ne garder que les messages essentiels dans sa présentation. Il faudra donc arriver à résumer le contenu principal de l'article.

Vos slides peuvent contenir des graphiques copiés-collés depuis l'article.

- Autre possibilité : si vous disposez d'un tableau (même si c'est une circonstance assez rare), vous pouvez préparer une présentation au tableau et vous filmer.

La *durée max de la présentation* (et donc du fichier vidéo) reste la même : 15 min.

A vous de voir comment montrer (de manière claire et visible) des graphiques de l'article si vous souhaitez les inclure dans votre présentation, si vous optez pour cette solution.

- Envoi : ne pas envoyer le fichier comme pièce-jointe à votre mail, sa taille ne le permettrait probablement pas. Préférer un système de partage de fichiers : par exemple WeTransfer <https://wetransfer.com/>, ou un lien transfert Dropbox, ou autre solution analogue.

→ Envoyer le lien pour le transfert du fichier dans le corps de votre mail.

► *Pour info* : puisque c'est toujours une bonne chose, lorsqu'on lit un article de recherche, de pouvoir échanger avec d'autres personnes lisant le même article, je vais mettre en ligne (sur ma page web) la liste des noms des personnes ayant choisi de préparer tel ou tel article (sur la base de vos réponses au questionnaire google indiqué au début de ce document).



Suggestions. Quelques solutions possibles pour l’enregistrement de la vidéo pour la partie 2 (mais vous pouvez bien sûr en choisir d’autres) :

- Le logiciel *Zoom* (<https://zoom.us>) est une solution simplifiée de visio-conférence. Vous pouvez télécharger l’application et créer un compte gratuitement. Depuis votre compte, vous pouvez créer une conférence virtuelle, dans laquelle partager votre écran (contenant vos slides) et votre micro et enregistrer ainsi une vidéo de votre présentation (bouton “enregistrer”). Zoom vous permettra de sauvegarder le fichier obtenu, typiquement au format mp4.

Lien vers le support <https://support.zoom.us/hc/fr>

- D’autres logiciels permettent de préparer une présentation et d’enregistrer en local sur votre machine un diaporama sonorisé : par exemple PowerPoint pour PC ou Keynote pour Mac (tout en sachant que, pour une présentation scientifique, il est typiquement préférable d’utiliser un package Tex pour rédiger ses slides, à la place de PowerPoint).