Asymptotiques en temps petits du noyau de la chaleur pour les métriques (sous)-riemanniennes au lieu de coupure

Davide Barilari (Institut de Mathématique de Jussieu, Univ. Paris 7)
Ugo Boscain (CNRS, CMAP, Ecole Polytechnique, Paris)
Grégoire Charlot (Institut Fourier, Univ. de Grenoble)
R. Neel (Lehigh University)

14 avril 2014

Contrôle géométrique, stochastique et des équations aux dérivées partielles, CIMPA, Tlemcen

Articles

BBN : D. Barilari, U. Boscain, R. Neel,
Small time heat kernel asymptotics at the sub-Riemannian cut locus.
J. Differential Geom. 92 (2012), no. 3, 373–416.

BBCN : D. Barilari, U. Boscain, G. Charlot, R. Neel,
On the heat diffusion for generic Riemannian and sub-Riemannian structures.
arXiv :1310.0911v1.

Définitions

Définition

- *Variété riemannienne :* (M, g) *où* M *est une variété de dimension* n*,* g *une métrique sur* TM*. De façon équivalente pour définir la métrique localement on peut choisir un champ de bases orthonormées* $(F_1, \ldots, F_n)$*.*

Définitions

Définition

- *Variété riemannienne :* (M, g) *où* M *est une variété de dimension* n*,* g *une métrique sur* TM*. De façon équivalente pour définir la métrique localement on peut choisir un champ de bases orthonormées* $(F_1, \ldots, F_n)$*.*
- *Variété sous-riemannienne :* $(M, \mathcal{D}, g)$ *où* M *est une variété,* $\mathcal{D}$ *une distribution et* g *une métrique sur* $\mathcal{D}$*. De façon équivalente pour définir la distribution et la métrique localement on peut choisir un champ de bases orthonormées* $(F_1, \ldots, F_k)$*.*

Définition

- *Variété riemannienne :* (M, g) *où* M *est une variété de dimension* n, g *une métrique sur* TM. *De façon équivalente pour définir la métrique localement on peut choisir un champ de bases orthonormées* $(F_1, \ldots, F_n)$.
- *Variété sous-riemannienne :* $(M, \mathcal{D}, g)$ *où* M *est une variété,* $\mathcal{D}$ *une distribution et* g *une métrique sur* $\mathcal{D}$. *De façon équivalente pour définir la distribution et la métrique localement on peut choisir un champ de bases orthonormées* $(F_1, \ldots, F_k)$.
- *Gradient (sous)-riemannien :* $g(\nabla f, v) = df.v$ *pour* $v \in \mathcal{D}$.

Définitions

Définition

- *Variété riemannienne :* (M, g) *où* M *est une variété de dimension* n, g *une métrique sur* TM. *De façon équivalente pour définir la métrique localement on peut choisir un champ de bases orthonormées* $(F_1, \dots, F_n)$.
- *Variété sous-riemannienne :* $(M, \mathcal{D}, g)$ *où* M *est une variété,* $\mathcal{D}$ *une distribution et* g *une métrique sur* $\mathcal{D}$. *De façon équivalente pour définir la distribution et la métrique localement on peut choisir un champ de bases orthonormées* $(F_1, \dots, F_k)$.
- *Gradient (sous)-riemannien :* $g(\nabla f, v) = df.v$ *pour* $v \in \mathcal{D}$.
- *Si on se fixe un volume* μ, *on peut définir la divergence* $div(X)\mu = L_X \mu$ *et le laplacien* $\Delta f = div(\nabla f)$.

Définition

- *Variété riemannienne :* (M, g) *où* M *est une variété de dimension* n, g *une métrique sur* TM. *De façon équivalente pour définir la métrique localement on peut choisir un champ de bases orthonormées* $(F_1, ..., F_n)$.
- *Variété sous-riemannienne :* $(M, \mathcal{D}, g)$ *où* M *est une variété,* $\mathcal{D}$ *une distribution et* g *une métrique sur* $\mathcal{D}$. *De façon équivalente pour définir la distribution et la métrique localement on peut choisir un champ de bases orthonormées* $(F_1, ..., F_k)$.
- *Gradient (sous)-riemannien :* $g(\nabla f, v) = df.v$ *pour* $v \in \mathcal{D}$.
- *Si on se fixe un volume* μ, *on peut définir la divergence* $div(X)\mu = L_X\mu$ *et le laplacien* $\Delta f = div(\nabla f)$.

Dans la suite on fait les hypothèses suivantes

Condition

- *La condition de Hörmander :* $\forall q \in M, \exists r \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathcal{D}_q^r = T_qM$.
- *La métrique est complète.*

Sous ces hypothèses, Δ est hypoelliptique et admet un noyau symétrique $p_t(.,.)$.

Théorème (Pontryagin et al)

• *Sous l'hypothèse qu'il n'y a* **pas d'extrémale anormale**, *toute géodésique est la projection sur M d'une trajectoire du gradient symplectique $\overrightarrow{H}$ du Hamiltonien sur T^*M defini par*

$$H(\lambda, q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} < \lambda, F_i(q) >^2,$$

et

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \qquad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Principe du Maximum de Pontryagin

Théorème (Pontryagin et al)

• *Sous l'hypothèse qu'il n'y a* **pas d'extrémale anormale**, *toute géodésique est la projection sur M d'une trajectoire du gradient symplectique $\overrightarrow{H}$ du Hamiltonien sur T^*M defini par*

$$H(\lambda, q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} < \lambda, F_i(q) >^2,$$

et

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \qquad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

• **Condition de transversalité :** *si une géodésique réalise la distance entre les variétés N_1 au temps t_1 et N_2 au temps t_2 alors*

$$< \lambda(t_1), T_{q(t_1)}N_1 >=< \lambda(t_2), T_{q(t_2)}N_2 >= 0.$$

Application exponentielle, lieu de coupure, lieu conjugué

- **L'application exponentiel** Exp_q associe à $\lambda \in T_q^*M$ l'extrémité au temps 1 de la géodesique correspondant à la trajectoire de $\overrightarrow{H}$ avec la condition initiale (λ, q) :

$$Exp_q : \left\{ \begin{array}{ccc} T_q^*M & \to & M \\ \lambda & \mapsto & \pi(\mathrm{e}^{\overrightarrow{H}}(q, \lambda)) \end{array} \right.$$

où $\pi : (q', \lambda') \mapsto q'$ est la projection canonique sur la base.

Application exponentielle, lieu de coupure, lieu conjugué

• **L'application exponentiel** Exp_q associe à $\lambda \in T_q^*M$ l'extrémité au temps 1 de la géodesique correspondant à la trajectoire de $\overrightarrow{H}$ avec la condition initiale (λ, q) :

$$Exp_q : \left\{ \begin{array}{ccc} T_q^*M & \to & M \\ \lambda & \mapsto & \pi(e^{\overrightarrow{H}}(q,\lambda)) \end{array} \right.$$

où $\pi : (q', \lambda') \mapsto q'$ est la projection canonique sur la base.

• **Une géodésique** issue de q est une courbe $t \mapsto Exp_q(t\lambda)$ et sa vitesse est $\sqrt{2H(q,\lambda)}$.

• **L'application exponentiel** Exp_q associe à $\lambda \in T_q^*M$ l'extrémité au temps 1 de la géodesique correspondant à la trajectoire de $\vec{H}$ avec la condition initiale (λ, q) :

$$Exp_q : \left\{ \begin{array}{ccc} T_q^*M & \rightarrow & M \\ \lambda & \mapsto & \pi(\mathrm{e}^{\vec{H}}(q,\lambda)) \end{array} \right.$$

où $\pi : (q', \lambda') \mapsto q'$ est la projection canonique sur la base.

• **Une géodésique** issue de q est une courbe $t \mapsto Exp_q(t\lambda)$ et sa vitesse est $\sqrt{2H(q,\lambda)}$.

• **Lieu de coupure** d'un point x : c'est l'ensemble des points y où une géodésique issue x passe en perdant son optimalité.

Application exponentielle, lieu de coupure, lieu conjugué

• **L'application exponentiel** Exp_q associe à $\lambda \in T_q^*M$ l'extrémité au temps 1 de la géodesique correspondant à la trajectoire de $\overrightarrow{H}$ avec la condition initiale (λ, q) :

$$Exp_q : \left\{ \begin{array}{ccc} T_q^*M & \to & M \\ \lambda & \mapsto & \pi(\mathrm{e}^{\overrightarrow{H}}(q,\lambda)) \end{array} \right.$$

où $\pi : (q', \lambda') \mapsto q'$ est la projection canonique sur la base.

• **Une géodésique** issue de q est une courbe $t \mapsto Exp_q(t\lambda)$ et sa vitesse est $\sqrt{2H(q,\lambda)}$.

• **Lieu de coupure** d'un point x : c'est l'ensemble des points y où une géodésique issue x passe en perdant son optimalité.

• **Lieu conjugué :** y est dans le lieu conjugué de x s'il existe condition initiale λ telle que $Exp_x(\lambda) = y$ et $dExp_{x|_\lambda}$ dégénérée. Il est dans le premier lieu conjugué si en plus $dExp_{x|_{t\lambda}}$ non dégénérée pour $0 < t < 1$.

Résultats connus sur p_t depuis les années 80

- **Sur la diagonale** [Ben Arous, Léandre]

$$p_t(x,x) = \frac{C + O(\sqrt{t})}{t^{Q/2}},$$

où C depend de x et Q est la dimension de Hausdorff de $(M, \mathcal{D})$ en x.

Résultats connus sur p_t depuis les années 80

- **Sur la diagonale** [Ben Arous, Léandre]

$$p_t(x,x) = \frac{C + O(\sqrt{t})}{t^{Q/2}},$$

où C depend de x et Q est la dimension de Hausdorff de $(M,\mathcal{D})$ en x.

- **En dehors de la diagonale et du lieu de coupure, en l'absence d'anormale** [Ben Arous]*[Molchanov]*

$$p_t(x,y) = \frac{C + O(t)}{t^{n/2}} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t}.$$

Résultats connus sur p_t depuis les années 80

- **Sur la diagonale** [Ben Arous, Léandre]

$$p_t(x,x) = \frac{C + O(\sqrt{t})}{t^{Q/2}},$$

où C depend de x et Q est la dimension de Hausdorff de $(M, \mathcal{D})$ en x.

- **En dehors de la diagonale et du lieu de coupure, en l'absence d'anormale** [Ben Arous]*[Molchanov]*

$$p_t(x,y) = \frac{C + O(t)}{t^{n/2}} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t}.$$

- **En tout point** [Léandre]*[Varadhan]*

$$\lim_{t \to 0} 4t \log p_t(x,y) = -d^2(x,y).$$

BBN : présentation naive 1

BBN : présentation naive 1

Supposons que $p_t(x,y) = \frac{C(x,y)}{t^{n/2}} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t}$.

Supposons que $p_t(x,y) = \frac{C(x,y)}{t^{n/2}} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t}$.

La propriété de semi-groupe du noyau donne

$$p_t(x,y) = \int_M p_{t/2}(x,z) p_{t/2}(z,y) \mu(dz),$$

BBN : présentation naive 1

Supposons que $p_t(x,y) = \frac{C(x,y)}{t^{n/2}} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t}$.

La propriété de semi-groupe du noyau donne

$$p_t(x,y) = \int_M p_{t/2}(x,z) p_{t/2}(z,y) \mu(dz),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} p_t(x,y) &= \int_M \left(\frac{2}{t}\right)^n \mathrm{e}^{-(d^2(x,z)+d^2(z,y))/2t} C(x,z)C(z,y)\mu(dz) \\ &= \int_M \left(\frac{2}{t}\right)^n \mathrm{e}^{-h_{xy}(z)/t} C(x,z)C(z,y)\mu(dz) \end{aligned}$$

où $h_{xy}(z) = (d^2(x,z) + d^2(z,y))/2$.

Dans $\int_M \left(\frac{2}{t}\right)^n \mathrm{e}^{-h_{xy}(z)/t} C(x,z)C(z,y)\mu(dz)$ le terme dominant dans l'asymptotique est donné en intégrant sur n'importe quel voisinage de l'ensemble des points où h_{xy} atteint son minimum.

BBN : présentation naive 2

Dans $\int_M \left(\frac{2}{t}\right)^n \mathrm{e}^{-h_{xy}(z)/t} C(x,z)C(z,y)\mu(dz)$ le terme dominant dans l'asymptotique est donné en intégrant sur n'importe quel voisinage de l'ensemble des points où h_{xy} atteint son minimum.

Intégrales de Laplace

BBN : présentation naive 2

Dans $\int_M \left(\frac{2}{t}\right)^n \mathrm{e}^{-h_{xy}(z)/t} C(x,z)C(z,y)\mu(dz)$ le terme dominant dans l'asymptotique est donné en intégrant sur n'importe quel voisinage de l'ensemble des points où h_{xy} atteint son minimum.

Intégrales de Laplace

Pour une fonction réelle lisse f sur $\mathbb{R}^n$ et un compact K contenant 0 dans son intérieur, quand $t \searrow 0$ alors, si $g(z) = \sum_i z_i^{2m_i}$,

$$\int_K f(z)\mathrm{e}^{-g(z)/t} dz = t^{\frac{1}{2m_1}+\cdots+\frac{1}{2m_n}} \left(f(0) \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(1/2m_i)}{m_i} + O(t^{1/\max(m_i)}) \right).$$

• L'ensemble des points où h_{xy} atteint son minimum est l'ensemble Mid des points qui sont à mi distance entre x et y

$$Mid = \{z \mid d(x,z) = d(z,y) = d(x,y)/2\}.$$

BBN3 : propriétés de h_{xy}, Mid, Exp_x et Exp_y

• L'ensemble des points où h_{xy} atteint son minimum est l'ensemble Mid des points qui sont à mi distance entre x et y

$$Mid = \{z \mid d(x,z) = d(z,y) = d(x,y)/2\}.$$

• Mid est compact et, en l'absence d'anormale, il est à distance strictement positive des lieux de coupure de x et y.

BBN3 : propriétés de h_{xy}, Mid, Exp_x et Exp_y

• L'ensemble des points où h_{xy} atteint son minimum est l'ensemble Mid des points qui sont à mi distance entre x et y

$$Mid = \{z \mid d(x,z) = d(z,y) = d(x,y)/2\}.$$

• Mid est compact et, en l'absence d'anormale, il est à distance strictement positive des lieux de coupure de x et y.

• La fonction h_{xy} est lisse dans un voisinage de Mid.

BBN3 : propriétés de h_{xy}, Mid, Exp_x et Exp_y

• L'ensemble des points où h_{xy} atteint son minimum est l'ensemble Mid des points qui sont à mi distance entre x et$y$

$$Mid = \{z \mid d(x,z) = d(z,y) = d(x,y)/2\}.$$

• Mid est compact et, en l'absence d'anormale, il est à distance strictement positive des lieux de coupure de x et y.

• La fonction h_{xy} est lisse dans un voisinage de Mid.

• En l'absence d'anormale, si $\lambda \in T_x^* M$ est tel que $z = Exp_x(\lambda) \in Mid$ alors Exp_x est un difféomorphisme local entre un voisinage de λ dans $T_x^* M$ et un voisinage de $z \in M$. De plus $y = Exp_x(2\lambda)$ et Exp_y est un difféomorphisme local entre un voisinage de $\eta \in T_y^* M$ et un voisinage de $z \in M$, $(-\eta, y)$ étant l'image de (λ, x) par le flot au temps 2 de $\overrightarrow{H}$.

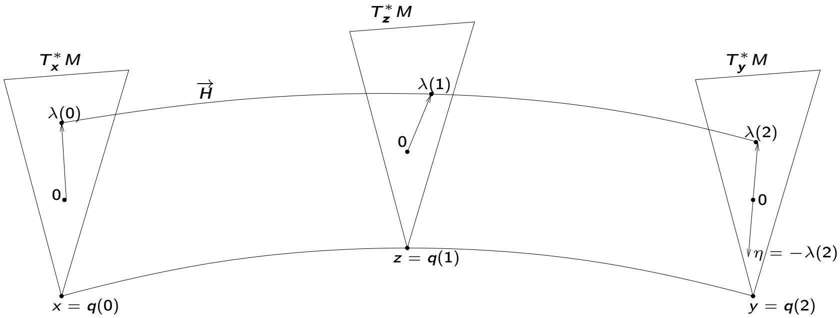


Figure: La géodésique de x à y passant par z et son relevé dans T^*M

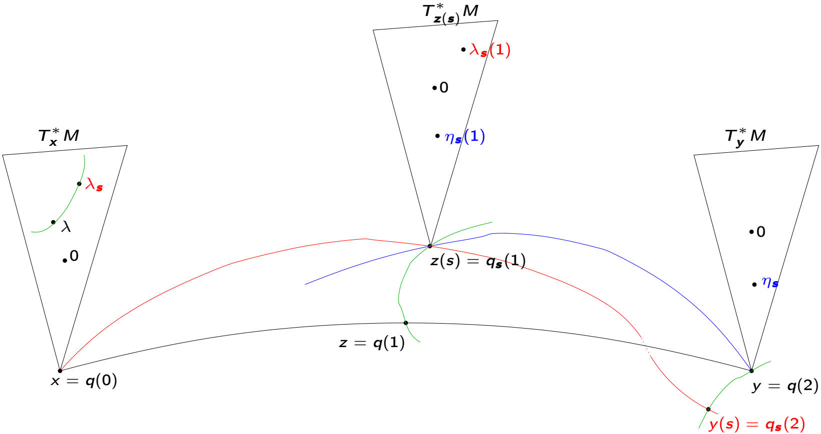


Figure: La famille de géodesiques

Théorème

$\dot{y}(0) = 0$ ssi $\dot{z}(0)$ est dans le noyau de la Hessienne de h_{xy} en z.

Théorème

$\dot{y}(0) = 0$ *ssi* $\dot{z}(0)$ *est dans le noyau de la Hessienne de* h_{xy} *en* z.

Arguments principaux de la preuve :

BBN6

Théorème

$\dot{y}(0) = 0$ *ssi* $\dot{z}(0)$ *est dans le noyau de la Hessienne de* h_{xy} *en* z.

Arguments principaux de la preuve :

a) $dh_{xy}|_{z(s)} = \lambda_s(1) + \eta_s(1)$.

Théorème

$\dot{y}(0) = 0$ ssi $\dot{z}(0)$ est dans le noyau de la Hessienne de h_{xy} en z.

Arguments principaux de la preuve :

a) $dh_{xy}|_{z(s)} = \lambda_s(1) + \eta_s(1)$.

b) $\lambda_s(1) + \eta_s(1) = O(s^2) \Leftrightarrow y(s) = O(s^2) \Leftrightarrow$ la géodésique est conjuguée dans la direction $\dot{\lambda}(0)$.

Théorème

$\dot{y}(0) = 0$ ssi $\dot{z}(0)$ est dans le noyau de la Hessienne de h_{xy} en z.

Arguments principaux de la preuve :

a) $dh_{xy}|_{z(s)} = \lambda_s(1) + \eta_s(1)$.

b) $\lambda_s(1) + \eta_s(1) = O(s^2) \Leftrightarrow y(s) = O(s^2) \Leftrightarrow$ la géodésique est conjuguée dans la direction $\dot{\lambda}(0)$.

c) $dh_{xy}|_{z(s)} = O(s^2) \Leftrightarrow h_{xy}(z(s)) = O(s^3)$.

Lemme

Pour tout point $y \neq x$ *et tout* $z \in Mid$ *alors*

Lemme

Pour tout point $y \neq x$ et tout $z \in Mid$ alors

a) *il existe un système de coordonnées local en z tel que*

$$h_{xy}(u) \geq \frac{1}{4}d^2(x,y) + u_1^2.$$

Lemme

Pour tout point $y \neq x$ et tout $z \in Mid$ alors

a) *il existe un système de coordonnées local en z tel que*

$$h_{xy}(u) \geq \frac{1}{4} d^2(x, y) + u_1^2.$$

b) *il existe un système de coordonnées local en z tel que*

$$h_{xy}(u) \leq \frac{1}{4} d^2(x, y) + u_1^2 + \cdots + u_n^2.$$

Lemme

Pour tout point $y \neq x$ et tout $z \in Mid$ alors

a) *il existe un système de coordonnées local en z tel que*

$$h_{xy}(u) \geq \frac{1}{4} d^2(x, y) + u_1^2.$$

b) *il existe un système de coordonnées local en z tel que*

$$h_{xy}(u) \leq \frac{1}{4} d^2(x, y) + u_1^2 + \cdots + u_n^2.$$

c) *Si x et y sont conjugués alors il existe un système de coordonnées local en z tel que*

$$h_{xy}(u) \leq \frac{1}{4} d^2(x, y) + u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 + u_n^4.$$

BBN8

Théorème

Pour tout point $y \neq x$ *alors*

Théorème

Pour tout point $y \neq x$ alors

a) *il existe des constantes C_1 et C_2 telles que pour t assez petit*

$$\frac{C_1}{t^{n/2}} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t} \leq p_t(x,y) \leq \frac{C_2}{t^{n-1/2}} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t}.$$

Théorème

Pour tout point $y \neq x$ alors

a) *il existe des constantes C_1 et C_2 telles que pour t assez petit*

$$\frac{C_1}{t^{n/2}} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t} \leq p_t(x,y) \leq \frac{C_2}{t^{n-1/2}} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t}.$$

b) *si x et y sont conjugués, il existe C_3 tel que pour t assez petit*

$$p_t(x,y) \geq \frac{C_3}{t^{n/2+1/4}} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t}.$$

Théorème

Pour tout point $y \neq x$ alors

a) *il existe des constantes C_1 et C_2 telles que pour t assez petit*

$$\frac{C_1}{t^{n/2}} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t} \leq p_t(x,y) \leq \frac{C_2}{t^{n-1/2}} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t}.$$

b) *si x et y sont conjugués, il existe C_3 tel que pour t assez petit*

$$p_t(x,y) \geq \frac{C_3}{t^{n/2+1/4}} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t}.$$

c) *si x et y ne sont pas conjugués, il existe C_4 tel que*

$$p_t(x,y) = \frac{C_4 + O(t)}{t^{n/2}} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t}.$$

BBCN1 : lemme - définition

Lemme (Splitting lemma)

Soit une fonction lisse g ayant un minimum local isolé en q tel que la dimension du noyau de sa hessienne en q est k. Alors il existe un système de coordonnées en q et une fonction lisse $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tels que

$$g(u) = g(0) + u_1^2 + \cdots + u_{n-k}^2 + \varphi(u_{n-k+1}, \cdots, u_n).$$

Lemme (Splitting lemma)

Soit une fonction lisse g ayant un minimum local isolé en q tel que la dimension du noyau de sa hessienne en q est k. Alors il existe un système de coordonnées en q et une fonction lisse $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tels que

$$g(u) = g(0) + u_1^2 + \cdots + u_{n-k}^2 + \varphi(u_{n-k+1}, \cdots, u_n).$$

Définition (Singularité de type $(1, m)$)

Soit f une fonction lisse. On dit que q est un point singulier de type $(1, m)$ de f si $\dim \ker(d_q f) = 1$ et, en coordonnées

$$m = \max\{k \in \mathbb{N} \mid f(\gamma(t)) = f(q) + t^k v + o(t^k), v \neq 0, \gamma \in C_q\}$$

où C_q est l'ensemble des courbes lisses γ avec $\gamma(0) = q$ et $\dot{\gamma}(0) \neq 0$.

BBCN2 : lemmes techniques

Lemme (Singularité de type $(1, m)$)

Soient x et y conjugués le long d'une géodésique optimale $\gamma(t) = Exp_x(2t\lambda)$ pour $t \in [0, 1]$ et z le point médian. Alors 2λ est un point singulier de type $(1, m)$ de Exp_x ssi il existe un système de coordonnées en z te que

$$h_{xy}(u) = \frac{1}{4} d^2(x, y) + u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 + u_n^{m+1}.$$

BBCN2 : lemmes techniques

Lemme (Singularité de type $(1, m)$)

Soient x et y conjugués le long d'une géodésique optimale $\gamma(t) = Exp_x(2t\lambda)$ pour $t \in [0, 1]$ et z le point médian. Alors 2λ est un point singulier de type $(1, m)$ de Exp_x ssi il existe un système de coordonnées en z te que

$$h_{xy}(u) = \frac{1}{4}d^2(x, y) + u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 + u_n^{m+1}.$$

Lemme (Singularité avec un noyau de dimension k)

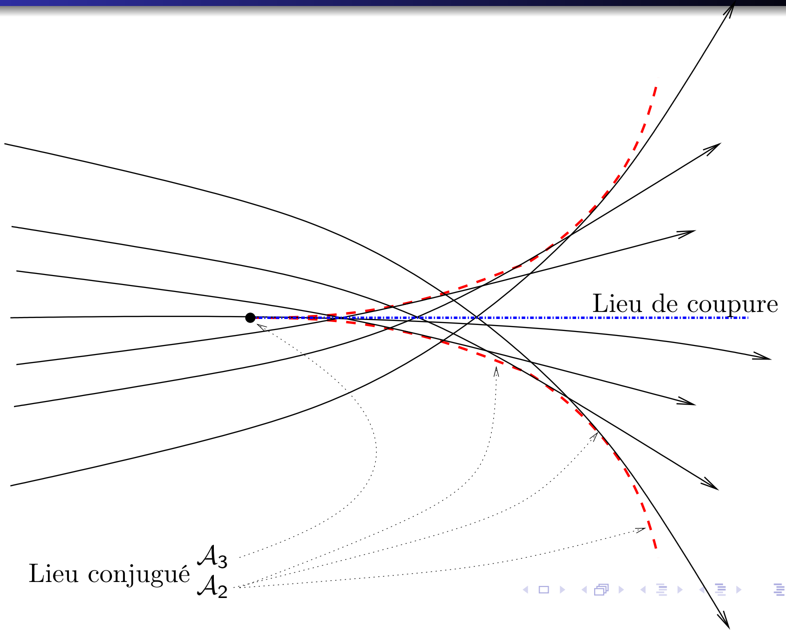
Soient x et y conjugués le long d'une géodésique optimale $\gamma(t) = Exp_x(2t\lambda)$ for $t \in [0, 1]$ et z le point médian. Pour tout $v \in \ker(d_{2\lambda}Exp_x)$ il existe une courbe $s \mapsto \lambda(s)$ avec $\lambda(0) = \lambda$, $\dot{\lambda}(0) = v$ et $y(s) - y = O(s^3)$.

BBCN3 : Classification d'Arnol'd des singularités génériques des applications lagrangiennes jusqu'à dimension 5

BBCN3 : Classification d'Arnol'd des singularités génériques des applications lagrangiennes jusqu'à dimension 5

- $A_2 : x \mapsto x^2$.
- $A_3 : (x, y) \mapsto (x^3 + xy, y)$.
- $A_4 : (x, y, z) \mapsto (x^4 + xy^2 + xz, y, z)$.
- $A_5 : (x, y, z, t) \mapsto (x^5 + xy^3 + xz^2 + xt, y, z, t)$.
- $A_6 : (x, y, z, t, u) \mapsto (x^6 + xy^4 + xz^3 + xt^2 + xu, y, z, t, u)$.
- $D_4^+ : (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + xz, xy, z)$.
- $D_4^- : (x, y, z) \mapsto (x^2 - y^2 + xz, xy, z)$.
- $D_5^+ : (x, y, z, t) \mapsto (x^3 + y^2 + x^2z + xt, xy, z, t)$.
- $D_5^- : (x, y, z, t) \mapsto (-x^3 + y^2 + x^2z + xt, xy, z, t)$.
- $D_6^+ : (x, y, z, t, u) \mapsto (x^4 + y^2 + x^3z + xt^2 + xu, xy, z, t, u)$.
- $D_6^- : (x, y, z, t, u) \mapsto (-x^4 + y^2 + x^3z + xt^2 + xu, xy, z, t, u)$.
- $E_6^+ : (x, y, z, t, u) \mapsto (x^2 + xyz + ty + ux, y^3 + x^2z, z, t, u)$.
- $E_6^- : (x, y, z, t, u) \mapsto (x^2 + xyz + ty + ux, -y^3 + x^2z, z, t, u)$.

BBCN3 : Classification d'Arnol'd des singularités génériques des applications lagrangiennes jusqu'à dimension 5



BBCN4 : Noyau dans le cas d'un singularité $(1, m)$

Théorème

Si une géodesique optimale γ de x à y est $(1, m)$-conjuguée alors sa contribution au noyau de la chaleur est

$$p_t(x, y) = \frac{C + O(t^{\frac{2}{m+1}})}{t^{\frac{n+1}{2} - \frac{1}{m+1}}} \exp\left(-\frac{d^2(x, y)}{4t}\right).$$

BBCN5 : Cas riemannien pour $n \leq 5$.

BBCN5 : Cas riemannien pour $n \leq 5$.

Théorème (Arnol'd + Janeczko-Mostowski)

Soit une variété M et un point x de M. Alors pour toute métrique riemannienne générique sur M, les singularités de l'application exponentielle en x sont des singularités lagrangiennes génériques. En dimension inférieure ou égale à 5 ce sont mêmes des singularités lagrangiennes stables.

Théorème (Arnol'd + Janeczko-Mostowski)

Soit une variété M et un point x de M. Alors pour toute métrique riemannienne générique sur M, les singularités de l'application exponentielle en x sont des singularités lagrangiennes génériques. En dimension inférieure ou égale à 5 ce sont mêmes des singularités lagrangiennes stables.

Théorème

Soit une variété M de dimension inférieure ou égale à 5 et un point x de M. Alors pour toute métrique riemannienne générique sur M, tout point y de M et toute géodésique optimale γ entre x et y, x et y sont soit non conjugués, A_3-conjugués ou A_5-conjugués le long de γ.

BBCN5 : Cas riemannien pour $n \leq 5$.

Corollaire

Soit $x \in M$. Pour tout $y \in M$ et toute métrique générique sur M :

(i) *si aucune géodésique optimale entre x et y n'est conjuguée alors*

$$p_t(x,y) = \frac{C + O(t)}{t^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{4t}\right),$$

(ii) *si au moins une est A_3-conjuguée mais aucune n'est A_5-conjuguée alors*

$$p_t(x,y) = \frac{C + O(t^{1/2})}{t^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{4t}\right),$$

(iii) *si au moins une est A_5-conjuguée alors*

$$p_t(x,y) = \frac{C + O(t^{1/3})}{t^{\frac{n}{2}+\frac{1}{3}}} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{4t}\right).$$

BBCN6 : Cas sous-riemannien de contact 3D

Corollaire

Soit M une variété sous-riemannienne de contact générique de dimension 3 alors pour tout x et tout y assez proche de x

(i) *si aucune géodésique optimale entre x et y n'est conjuguée alors*

$$p_t(x,y) = \frac{C + O(t)}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{4t}\right),$$

(ii) *si au moins une géodésique optimale de x à y est conjuguée alors la singularité associée est A_3 et*

$$p_t(x,y) = \frac{C + O(t^{1/2})}{t^{7/4}} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{4t}\right).$$

De plus, il existe des points y arbitrairement proche de x où (ii) a lieu.

BBCN7 : Cas sous-riemannien de quasi-contact 4D

Corollaire

Soit M une métrique sous-riemannienne de quasi-contact de dimension 4 générique alors, pour x en dehors d'un ensemble stratifié de codimension 1, et y suffisamment proche de x

(i) *si aucune géodésique optimale de x à y n'est conjuguée alors*

$$p_t(x,y) = \frac{C + O(t)}{t^2} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{4t}\right),$$

(ii) *si au moins une géodésique optimale de x à y est conjuguée alors la singularité associée est A_3 et*

$$p_t(x,y) = \frac{C + O(t^{1/2})}{t^{9/4}} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{4t}\right),$$

De plus, il existe des points y arbitrairement proche de x où (ii) a lieu.

Théorème

Si le noyau de la hessienne de h_{xy} est de dimension k alors il existe un système de coordonnées u tel que

$$h_{xy}(z) + u_1^2 + \cdots + u_{n-k}^2 \leq h_{xy}(u) \leq h_{xy}(z) + u_1^2 + \cdots + u_{n-k}^2 + u_{n-k+1}^4 + \ldots u_n^4.$$

BBCN8

Théorème

Si le noyau de la hessienne de h_{xy} est de dimension k alors il existe un système de coordonnées u tel que

$$h_{xy}(z) + u_1^2 + \cdots + u_{n-k}^2 \leq h_{xy}(u) \leq h_{xy}(z) + u_1^2 + \cdots + u_{n-k}^2 + u_{n-k+1}^4 + \ldots u_n^4.$$

Théorème

Soit une variété (sous)-riemannienne M et x et y dans M. S'il existe une unique géodésique optimale $\gamma : t \mapsto Exp_x(t\lambda)$ $(0 \leq t \leq 1)$ entre x et y, et si le noyau de $dExp_x$ en λ est de dimension k, avec $k \geq 1$, alors il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que pour t assez petit

$$\frac{C_1}{t^{\frac{n}{2}+\frac{k}{4}}} e^{-d^2(x,y)/4t} \leq p_t(x,y) \leq \frac{C_2}{t^{\frac{n}{2}+\frac{k}{2}}} e^{-d^2(x,y)/4t}.$$

BBCN9 : Exemple de noyaux hors généricité

BBCN9 : Exemple de noyaux hors généricité

Théorème

Pour tout entier $\eta \geq 3$, tout réel $\alpha > 0$, et tout réel β, il existe une métrique lisse sur $\mathbb{S}^2$ et deux points x et y distincts tels que le noyau de la chaleur a l'asymptotique en temps petit

$$p_t(x,y) = \frac{\alpha + t^{1/\eta}\beta + o(t^{1/\eta})}{t^{(3\eta-1)/2\eta}} e^{-d(q_1,q_2)/4t}.$$