Ecole d'Eté Septembre 2012

COURS 2

I Martingales

a) Définition

Martingale à temps discret/continu : le processus $(Z_t)_t$ évolue avec une certaine variance, mais sa valeur se maintient "en moyenne". (Penser à un jeu d'espérance de gain 0 - en moyenne, on maintient sa mise)

Ex : On part de 100€ et on mise à chaque fois 1€ sur le résultat d'un pile ou face non biaisé (proba $\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$). Si le résultat du tirage est pile le joueur gagne 1€ supplémentaire, sinon il perd son euro.

X_n = cagnotte du joueur à l'étape n.

$\rightarrow X_0 = 100 \qquad Var(X_0) = 0$

$$\ast \ \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{P}(\text{pile})\,\mathbb{E}[X_1 \mid \text{pile}] + \mathbb{P}(\text{face})\,\mathbb{E}[X_1 \mid \text{face}]$$
$$= \frac{1}{2}\times 101 + \frac{1}{2}\times 99 = 100$$

$$Var(X_1) = \mathbb{E}[(X_1-100)^2] = \frac{1}{2}\times 1^2 + \frac{1}{2}\times(-1)^2 = 1$$

$$\ast \ \mathbb{E}(X_2) = \overbrace{\mathbb{P}(P,P)}^{\frac{1}{4}}\times 102 + \overbrace{\mathbb{P}(P,F)}^{\frac{1}{4}}\times 100 + \overbrace{\mathbb{P}(F,P)}^{\frac{1}{4}}\times 100 + \overbrace{\mathbb{P}(F,F)}^{\frac{1}{4}}\times 98$$
$$= 100.$$

$$Var(X_2) = \frac{1}{4}\left(2^2+0^2+0^2+2^2\right) = 2$$

Donc la cagnotte du joueur se maintient en moyenne, mais sa variance augmente au cours du temps.

Plus formellement :

Def (Martingale à temps continu) : Une famille $(X_t)_{t\geq 0}$ de v.a. est une martingale si $\ast\ \forall t,\ \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$

$\ast\ \forall s \leq t, \quad \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$

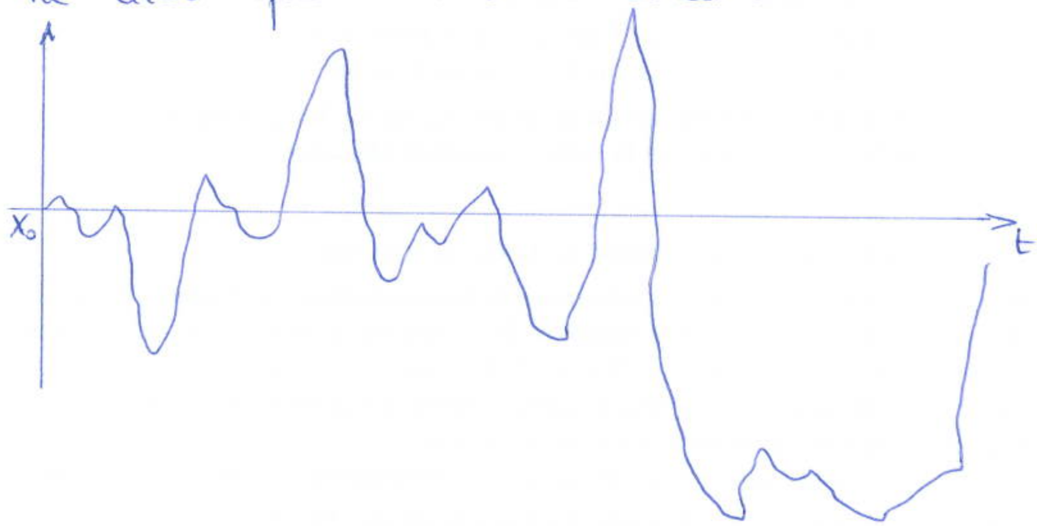
où $\mathcal{F}_s$ est la tribu engendrée par (X_u)

C'est une <u>sous-martingale</u> si $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s$ (⚠ terminologie)

<u>sur-martingale</u> si $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$

<u>Rq</u> : Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une surmartingale, $(-X_t)_{t\geq 0}$ est une sous-martingale et donc on ne citera que les résultats concernant les sur-martingales.

En image :



b) <u>Temps d'arrêt</u>

Une notion importante : les temps d'arrêt

<u>Déf</u> : Une v.a. $T \in [0,\infty]$ est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$, $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Autrement dit, connaissant toute l'information disponible jusqu'au temps t, on peut déterminer si le temps d'arrêt a déjà été atteint.

Ex : $T = \inf\{n : X_n \leq 50\}$ est un temps d'arrêt pour $(X_n)_{n\geq 0}$ du 1er exemple, car

$$\{T \leq n\} = \{\exists\, m \leq n : X_m \leq 50\} \in \mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_n).$$

<u>Exemple générique</u> : la plupart des temps d'atteinte ou des temps où une certaine propriété est réalisée.

⚠ En revanche, $\sup\{n \geq 0 : X_n \leq 50\}$ n'est <u>pas</u> un temps d'arrêt.

<u>Exercice</u> : Si S et T sont 2 temps d'arrêt, alors $\min(S,T)$ et $\max(S,T)$ sont aussi des temps d'arrêt.

On peut alors définir la tribu des "informations jusqu'au temps d'arrêt" :
$\mathcal{F}_T$: { événement A : $A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$ }.
(et par conséquent, on pourra conditionner par rapport à cette tribu).

<u>Théorème d'arrêt</u> : Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue à droite (resp. une surmartingale) et soit T un temps d'arrêt. Alors $(X_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est aussi une martingale (resp. une surmartingale) càd. En particulier, si T est borné p.s., alors $X_T \in \mathbb{L}^1$ et

$$\mathbb{E}[X_T] \begin{cases} = \\ \leq \end{cases} \mathbb{E}[X_0] \quad (= \mathbb{E}[X_t],\ \forall t \geq 0)$$

<u>Idée</u> : $(X_{t\wedge T})$ est la "martingale arrêtée en T". Par définition, c'est une martingale avant T, puis elle reste constante égale à $X_{T(\omega)}$ si $T(\omega) < \infty$.

La preuve fait appel au même résultat pour des martingales à temps discret, puis à un passage à la limite, d'où la nécessité de martingales càd.

Sert souvent pour garder un certain contrôle de la martingale (T temps d'atteinte) et pour obtenir des résultats en temps long (dont les convergences, pour lesquelles on a assez peu de résultats généraux).

II Convergence de processus aléatoires

a) Convergence de variables aléatoires

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. Il existe beaucoup de sens à la phrase "X_n converge vers une v.a X quand $n \to \infty$".

* le sens le plus intuitif : la convergence presque-sure

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} X$ si l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que

$$X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega) \quad \text{a une probabilité égale à } 1.$$

* la convergence en probabilités (le sens le moins intuitif...)

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Idée : $X_n(\omega)$ se rapproche de $X(\omega)$, mais on n'a pas forcément

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon \Rightarrow |X_{n+1}(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon.$$

* la convergence dans $\mathbb{L}^p$:

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{L}^p} X$ si $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

* la convergence en loi (la plus naturelle pour des analystes ?)

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(loi)} X$ si pour toute fonction f continue et bornée

$$\underset{\displaystyle \int f \, d\mathbb{P}_{X_n}}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{E}[f(X_n)]}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underset{\displaystyle \int f \, d\mathbb{P}_X}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{E}[f(X)]}}.$$

Exemple : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de tirages pile/face indépendants et identiquement distribués ($\mathbb{P}(\text{pile}) = p$, $\mathbb{P}(\text{face}) = 1-p$)

En en quel sens converge $(X_n)_{n\geq 1}$?

On définit la suite de temps d'arrêts $(T_j)_j$ auquels (X_n) prend la valeur 1 pile

C'est à dire, $T_1 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$

$T_j = \inf\{n > T_{j-1} : X_n = 1\} \quad \forall j \geq 2$

En quel sens converge $(X_{T_n})_{n\geq 1}$?

Moins trivial : est que $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ converge, et en quel sens ?

La réponse à cette question découle d'un des théorèmes les plus importants des probabilités : la loi des grands nombres.

Th (Loi faible et forte des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables i.i.d. telles que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$.

Alors $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{E}(X_1)$ p.s. (loi forte)

en proba et $\mathbb{L}^1$ (loi faible)

On ne la démontre pas ici.

Deuxième grande loi :

Th central limite

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. telles que $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$.

Alors si $\sigma^2 := Var(X_1)$, on a

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) - \mathbb{E}(X_1)\right) \xrightarrow[n \to \infty]{(loi)} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Autrement dit, dans les hypothèses des 2 théorèmes, la moyenne empirique $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ converge vers la moyenne théorique $\mathbb{E}[X_1]$ à vitesse $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ces 2 résultats réapparaîtront sous une forme similaire lorsqu'on étudiera la convergence de processus markoviens.

b) Compléments sur les martingales - Convergence.

Ici toutes les mart. ont des trajectoires continues à droite

On ne prouvera pas grand'chose, mais ces résultats existent et montrent quel type de convergence on peut obtenir grâce à des martingales appropriées.

Th. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une sous-martingale à trajectoires continues à droite telle que

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[(X_t^+)\right] < \infty .$$

↳ partie positive : $X_t \vee 0$

Alors il existe une v.a. $X_\infty \in]-\infty,+\infty[$ intégrable telle que X_t converge p.s. vers X_∞ quand $t \to +\infty$.

(Cond. équivalente : $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$)

Cor. : Si (X_t) est une surmartingale positive à trajectoires càd, alors X_t converge p.s. vers une limite $X_\infty \in \mathbb{L}^1$. En outre,

$$X_t \geq \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_t] \quad \text{pour tout } t\geq 0.$$

Preuve : $(-X_t)_t$ est une sous-martingale à traj. càd de partie positive identiquement nulle, donc le théorème précédent s'applique.

(+ Fatou pour la dernière ligne : $X_t \geq \underline{\lim}_{s\to\infty} \mathbb{E}[X_s | \mathcal{F}_t]$
$\geq \mathbb{E}[\underline{\lim}\, X_s | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t]$) □

Autre théorème d'arrêt : Si $(X_t)_t$ est une martingale càd bornée p.s., et T est un temps d'arrêt quelconque, alors $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$.

Facultatif : Convergence $\mathbb{L}^p$ et inégalités (Boîte à outils)

~~Les résultats sont différents suivant que p = 1 ou p > 1~~.

Th : $(p=1)$ Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale càd. Alors les 2 conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X_t converge p.s. et dans $\mathbb{L}^1$ vers X_∞

(ii) Il existe une v.a. $Z\in \mathbb{L}^1$ telle que $X_t = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t] \;\; \forall t\geq 0$.

En outre, si ces conditions sont satisfaites, on peut prendre $Z = X_\infty$ dans (ii).

On dit alors que la martingale est *fermée*.

<u>Th</u> (Inégalité de Doob) Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une surmartingale càd. Alors pour tout $t \in [0,\infty]$ et tout $\lambda > 0$,

$$\lambda \, \mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t} |X_s| \geq \lambda \right) \leq 3 \sup_{s\leq t} \mathbb{E}[|X_t|].$$

En outre, si $X_t \in \mathbb{L}^p$ pour tout $t \geq 0$, alors

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leq s\leq t} |X_s|\right)^p\right]^{1/p} \leq q \, \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]^{1/p} \quad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

~~...ient des convergences $\mathbb{L}^p$ à partir du Th de conv p.s.~~

En conclusion, les martingales sont des objets bien pratiques sur lesquels on connaît pas mal de choses, d'où l'intérêt de s'y ramener.

c) Problèmes de martingale

On a vu dans le cours précédent la caractérisation d'un processus ~~aléatoire~~ markovien via son semi groupe

$$P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)] = \mathbb{E}[f(X_t) \mid X_0 = x]$$

et via son générateur, l'opérateur G donné par

$$Gf(x) = \lim_{t\to 0+} \frac{\mathbb{E}_x[f(X_t)] - f(x)}{t} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} P_t f(x)$$

défini sur l'ensemble des fonctions pour lesquelles cette limite existe.

Si cet ensemble est suffisamment grand (on verra plus tard ce que cela signifie), alors le générateur caractérise la loi du processus $(X_t)_{t\geq 0}$.

Un autre point de vue, parfois très utile pour démontrer des convergences est celui des <u>problèmes de martingale</u>.

De manière générale :

<u>Déf</u> : Soit ~~A = (f,g)~~ A un ensemble de couples de fonctions. On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une solution du problème de martingales associés à A si pour tout $(f,g)\in A$,

$$M_t := f(X_t) - \int_0^t g(X_s)\,ds$$

~~définit~~ est une martingale pour la filtration associée à $(X_t)_{t\geq 0}$.

Autrement dit, $\forall s\leq t$,

$$\mathbb{E}\left[f(X_t) - \int_0^t g(X_u)\,du \;\middle|\; \mathcal{F}_s \right] = f(X_s) - \int_0^s g(X_u)\,du .$$

— On peut aussi spécifier la loi de X_0.

L'intérêt de cette définition est le suivant :

<u>Prop.</u> Soit G le générateur du processus markovien $(X_t)_{t\geq 0}$. Alors pour tout $f\in\mathcal{D}(G)$,

$$f(X_t) - \int_0^t Gf(X_s)\,ds$$

est une martingale. (Ici $A = \{(f, Gf)\}$).

<u>Preuve</u> (pas hyper rigoureuse)

On sait déjà que, par définition, $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathbb{E}_x[f(X_t)] = Gf(x)$.

Soit $T\geq 0$. On a alors

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=T+} \mathbb{E}_x[f(X_t)] = \lim_{h\to 0+} \frac{\mathbb{E}_x[f(X_{T+h}) - f(X_T)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \mathbb{E}_x\left[\frac{\mathbb{E}[f(X_{T+h}) \mid \mathcal{F}_T] - f(X_T)}{h} \right]$$

$$\overset{\text{passage par rigoureux}}{=} \mathbb{E}_x\left[Gf(X_T) \right]$$

donc $\mathbb{E}_x[f(X_T)] - \mathbb{E}_x[f(X_S)] = \int_S^T \mathbb{E}_x[Gf(X_u)]\,du = \mathbb{E}_x\left[\int_S^T Gf(X_u)\,du\right]$.

$\Rightarrow$ Si $S\leq T$ on obtient

$$\mathbb{E}\left[f(X_T) - \int_0^T Gf(X_u)\,du \right] = \mathbb{E}\left[f(X_S) - \int_0^S Gf(X_u)\,du \right] + \underbrace{\mathbb{E}\left[f(X_T) - f(X_S) - \int_S^T Gf(X_u)\,du \right]}_{=0} . \qquad \square$$

En gros, en retranchant $\int_0^t Gf(X_u)\,du$ on élimine "la tendance générale" pour ne garder que les fluctuations.

A nouveau, si G est défini sur un ensemble suffisant de fonctions, alors le problème de martingale associé à G et ~~l'ensemble~~ la loi de X_0 caractérisent la loi de $(X_t)_{t\geq 0}$.

"Ensemble suffisant" ?

Pour caractériser la loi d'une v.a. X, on utilise l'ensemble des ~~les~~ espérances $\mathbb{E}[f(X)]$, f continue et bornée.

Comme il faut au moins caractériser la loi de chaque X_t, l'ensemble de déf. de G doit ~~au moins~~ être dense dans $C_b(\mathbb{R})$. Ensuite, en utilisant le théorème de convergence dominée ou monotone, on voit que cette condition est suffisante (pour X à valeur dans $\mathbb{R}^d$).

Généralement, on utilise $C^\infty(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$, ou $C^2(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$, suivant les besoins.

d) Convergence de processus (markoviens)

On a vu ce qu'étaient les convergences possibles pour une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou un espace plus général topologique).

Nouvelle variable aléatoire : la trajectoire $(t \mapsto X_t,\ t\geq 0)$ qu'on ~~prendra~~ supposera dorénavant à valeurs dans l'espace $D_E[0,\infty)$ des chemins càdlàg à valeurs dans ~~$\mathbb{R}$~~ un espace E ($=\mathbb{R}, \mathbb{R}^d$, ou plus tard $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$, ...)

On munit $D_E[0,\infty)$ de la topologie de Skorokhod, qui rend cet espace polonais (= agréable)

Cette trajectoire aléatoire X a une loi, qui est un élément de $\mathcal{M}_1(\mathcal{D}_E[0,\infty))$, et c'est cette loi qu'on veut caractériser.

Pour ce faire, on peut montrer ~~qu'il suffit de car~~ que si X est une trajectoire aléatoire markovienne, alors sa loi est caractérisée par celles de chaque marginale $(X_{t_1},\dots,X_{t_k})$. C'est précisément l'information que nous offrent le semi-groupe ou le problème de martingale associé à X. ~~(Si X^n n'est pas markovien, il faut vérifier la conv. des marginales fini-dimensionnelles)~~.

Soient $(X^n)_{n\geq 1}$ et X des processus à trajectoires càdlàg, et supposons qu'on veuille montrer la convergence en loi $X^n \xrightarrow[n\to\infty]{(loi)} X$.

Comme toutes les preuves de convergence, celle-ci se décompose en 2 étapes :

* <u>la tension</u> : on montre qu'avec probabilité arbitrairement proche de 1 X^n se trouve dans un compact donné de $D_E[0,\infty)$ pour n assez grand

* <u>l'unicité des valeurs d'adhérence</u> : on montre que si on prend une sous-suite $(X^{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ qui converge vers une limite $\tilde{X}$, alors nécessairement $\tilde{X} \overset{(loi)}{=} X$.

i) On ne s'attardera pas sur <u>la tension</u>. Elle consiste à vérifier que chaque $(X_t^n)_{n\geq 1}$ ~~fini~~ se trouve dans un compact donné avec grande proba, pour n assez grand

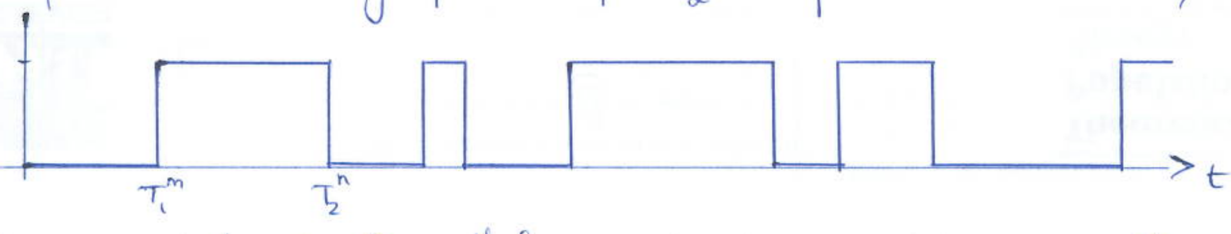
(formellement, $\forall \eta > 0$ et $t \geq 0$, $\exists$ un compact $\Gamma_{\eta,t}$ tel que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_t^n \in \Gamma_{\eta,t}) \geq 1 - \eta .)$$

Puis il faut vérifier que X^n ne commence pas à accumuler des sauts de taille macroscopique autour de certains ~~points~~ instants (ce qui empêcherait la limite d'être càdlàg)

<u>Ex de processus qui ne converge pas</u> : A $n \geq 1$ fixé, on définit une suite i.i.d. $(T_i^n)_{i\geq 1}$ de v.a $Exp(n)$ (donc $\mathbb{E}(T_1^n) = \frac{1}{n}$).

$X_0^n = 0$, puis X_t^n reste en 0 jusqu'au temps T_1^n où il saute en 1, ~~puis~~ où il reste jusqu'au temps T_2^n auquel il saute en 0, etc.



C'est une caricature de la pathologie qui peut se produire, mais elle a le mérite de montrer un ex. de processus de sauts pour le cours suivant.

(ii) Unicité des valeurs d'adhérence

Voici 2 exemples parmi beaucoup de résultats disponibles sur la question,

Th : Soient $(X^n)_{n\geq 1}$ et X des processus markoviens à valeurs dans $\mathcal{D}_E[0,\infty)$.
Si $(X^n)_{n\geq 1}$ est tendue et si pour tout $t_1, \ldots, t_k \geq 0$ on a

$$(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}) \xrightarrow[n\to\infty]{(\text{loi})} (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}),$$

alors $X^n \xrightarrow{(\text{loi})} X$.

~~Rq : Si X^n n'est pas markovien,~~

Remarquons au passage que $X^n_t \xrightarrow[n\to\infty]{(\text{loi})} X_t$ équivaut à $P^n_t f \xrightarrow[n\to\infty]{} P_t f$ (pour la convergence simple des fonctions continues et bornées) pour tout f dans un ensemble suffisant (dense dans $C_b(E)$).

Th : Soit $\mathcal{G}$ un opérateur linéaire sur $C_b(E)$ et supposons qu'il existe au plus une solution au problème de martingale associé à $\mathcal{G} = \{(f, \mathcal{G}f)\}$.
Soit $(X^n)_{n\geq 1}$ une suite de ~~markovien~~ processus dans $\mathcal{D}_E[0,\infty)$. Si $(X^n)_{n\geq 1}$ est tendue et si pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(f(X^n_{t+s}) - f(X^n_t) - \int_t^{t+s} \mathcal{G}f(X^n_u)\,du\right) \prod_{i=1}^k h_i(X^n_{t_i})\right] = 0 \quad (*)$$

pour tous k, $h_1, \ldots, h_k \in C_b(E)$ et $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k \leq t < t+s$,

alors
- il existe une solution X au problème de martingale associé à $\mathcal{G}$
- $X^n \xrightarrow[n\to\infty]{(\text{loi})} X$.

Remarquons cette fois que si X^n est markovien de ~~le générateur de X~~ générateur $\mathcal{G}^n$, alors ~~si $\mathbb{E}\left[\left|\int_t^{t+s} \mathcal{G}^n f(\right.\right.$~~ le fait que $(*)$ soit vrai avec $\mathcal{G}^n$ à la place de $\mathcal{G}$ peut certainement aider...

C'est ce type de résultats auxquels nous ferons appel plus tard.

III Un exemple de convergence : de la marche aléatoire au mouvement Brownien.

~~On regarde des processus à temps discret pour simplifier les ch~~

Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d de loi μ. On pose pour tout m : $X_m = \sum_{i=0}^{m} Y_i$, (de sorte que $X_{n+1} - X_n = Y_{n+1}$).

On appelle alors $(X_m)_{m\geq 0}$ une <u>marche aléatoire</u>, dont la loi de chaque pas est μ.

Ex : $\mathbb{P}(Y=-1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y=1)$ marche aléatoire symétrique "classique".

$\mathbb{P}(Y=-1) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(Y=1) = \frac{2}{3}$ $\rightarrow$ la marche est biaisée et le marcheur aura tendance à aller vers la droite

Rq : On définit ce processus à temps discret pour simplifier les choses, mais on peut aussi le voir comme le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ qui reste constant sur les intervalles $[i, i+1)$.

On se concentre désormais sur le cas $\mathbb{P}(Y=-1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y=1)$. On veut regarder la marche (une martingale, au passage) sur des temps de plus en plus long, mais comme elle va de plus en plus loin a priori il faut trouver la bonne manière de changer d'échelle spatiale.

On ~~pose~~ se souvient alors des 2 théorèmes fondamentaux des probas :

$$\frac{1}{m} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{p.s.}, \quad \text{mais}$$

$$\sqrt{m}\left(\frac{1}{m} X_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{(\text{loi})} \mathcal{N}(0,1)$$

On pose donc $X_t^N = \frac{1}{\sqrt{N}} X_{\lfloor Nt \rfloor} \xrightarrow[N\to\infty]{(\text{loi})} \mathcal{N}(0,t)$

On a la convergence des lois marginales unidimensionnelles et on peut montrer celle des fini-dim. et on peut montrer la tension de $(X^N)_{N\geq 0}$, de sorte qu'on vient de vérifier que X^N converge en loi vers (s'il existe) un processus $(B_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ $\forall t \geq$

Ce processus existe bien et s'appelle le mouvement Brownien (de dimension 1) standard

Def : On appelle mouvement brownien (standard, issu de 0) une famille $(B_t)_{t\geq 0}$ de v.a. réelles telle que

(P1) $B_0 = 0$ p.s. En outre, pour tout $p \geq 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p$, les v.a. $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_p} - B_{t_{p-1}}$ sont indépendantes et satisfont $B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_j - t_{j-1})$.

(P2) Pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \to B_t(\omega)$ est continue.

En image : on est parti de

et on arrive à

Un mouvement Brownien multidimensionel est défini comme étant le processus ~~markovien~~ $(B_t^1, \dots, B_t^d)_{t\geq 0}$, où $B^1, \dots, B^d$ sont des mv^t browniens standards unidimensionels indépendants.

Quelques propriétés (pour finir) du mouvement brownien en dimension d.

Prop : (i) Si φ est une isométrie vectorielle, alors $(\varphi(B_t))_{t\geq 0}$ est un mv^t brownien. En particulier, $(-B_t)_{t\geq 0}$ en est un.

(ii) $\forall \gamma > 0$, le processus $B_t^\gamma = \frac{1}{\gamma} B_{\gamma^2 t}$ est un MB (invariance par changement d'échelle)

(iii) ~~Pour tout s~~ ⇒ B est un processus markovien

~~(iv)~~ ~~En particulier~~ Par ailleurs $\forall s \geq 0$, $B^{(s)}_t := B_{t+s} - B_s$ est un mouvement brownien $\perp\!\!\!\perp$ de $\mathcal{F}_s$ (propriété de Markov)

On sait que B est continu, mais est-il dérivable ? Höldérien ?

Pour commencer :

Lemme : On suppose $d = 1$. Alors p.s. pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s > 0, \quad \inf_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s < 0.$$

Si $a \in \mathbb{R}$ et $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$, alors p.s., $\forall a$ on a $T_a < \infty$.

Par conséquent, p.s, $\underline{\lim}_{t \to \infty} B_t = -\infty$ et $\overline{\lim}_{t \to \infty} B_t = +\infty$.

Ainsi, $(B_t)_{t \geq 0}$ n'est monotone sur aucun intervalle non-trivial.

Propriété de Markov forte : Soit T un temps d'arrêt tel que $\mathbb{P}(T < \infty) > 0$. Alors conditionnellement à $\{T < \infty\}$, le processus $B^{(T)}$ défini par

$$B^{(T)}_t = B_{T+t} - B_T$$

est un mouvement brownien $\perp\!\!\!\perp$ $\mathcal{F}_T$.

Et pour finir avec sa régularité,

Prop : Les trajectoires de B ~~ne~~ sont nulle part dérivables. En revanche, elles sont $\left(\frac{1}{2} - \delta\right)$ - localement höldériennes pour tout $\delta \in (0, \frac{1}{2})$.

Puisque B est markovien, nous pouvons le ~~décrire~~ caractériser de différentes manières.

→ Son semi-groupe en dim d est donné par

$$P_t f(x) = \mathbb{E}_x\left[f(B_t)\right] = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{2t}} \, dy .$$

→ Son générateur est l'opérateur Laplacien, ou plutôt par convention $-\frac{1}{2}\Delta$.