

Limites d'échelle et limites locales de permutations de Baxter et d'orientations bipolaires

Emmanuel Kammerer
sous la direction de Jean-François Le Gall

2021

Remerciements

Je remercie vivement Jean-François Le Gall pour m'avoir proposé ce magnifique sujet de mémoire et pour sa relecture attentionnée.

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Permutations de Baxter et orientations bipolaires	2
1.2	Des orientations bipolaires aux marches en tandem	5
2	Préliminaires combinatoires	10
2.1	Des marches en tandem aux processus de marches coalescentes	10
2.2	Des processus de marches coalescentes aux permutations de Baxter	11
2.3	Le comportement de ces bijections vis-à-vis de la dualité	16
2.4	Permutations et orientations infinies	17
3	Étude d'une marche conditionnée à rester dans le quadrant positif	18
4	Limites locales	24
4.1	Les objets limites et quelques unes de leurs propriétés	24
4.2	Topologies locales	26
4.3	Les résultats limites locaux	31
4.4	Comportement de la limite locale vis-à-vis de la dualité	35
5	Limites d'échelle	39
5.1	Limite d'échelle des marches coalescentes	39
5.1.1	Résultat de limite d'échelle non conditionné	39
5.1.2	Résultat de limite d'échelle conditionné	42
5.2	Limite d'échelle des permutations de Baxter vues comme des permutons	46
5.3	Limite d'échelle des orientations bipolaires	50
5.4	Comportement de la limite d'échelle vis-à-vis de la dualité	52

1 Introduction

1.1 Permutations de Baxter et orientations bipolaires

Les permutations de Baxter et les orientations bipolaires, objets d'étude de ce mémoire, sont des objets combinatoires reliés de manière bijective.

Définition 1.1. Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est dite de Baxter s'il n'existe pas d'entiers $i < j < k$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que

$$\sigma(j+1) < \sigma(i) < \sigma(k) < \sigma(j) \text{ ou } \sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i) < \sigma(j+1).$$

On note \mathcal{P}_n l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de Baxter, et $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$.

Remarque 1.2. La définition ci-dessus est un peu formelle. Historiquement, les permutations de Baxter ont été introduites par Glen Baxter dans l'étude des points fixes d'une composée de deux fonctions continues qui commutent (pour la composition). Soient f, g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans lui-même telles que $f \circ g = g \circ f$. Supposons que $h = f \circ g$ ait un nombre fini de points fixes, notés $\{x_1 < \dots < x_n\}$. Remarquons que si $h(x) = x$, alors $h(f(x)) = f(g(f(x))) = f(h(x)) = f(x)$. De plus, puisque f restreinte à $\{x_1, \dots, x_n\}$ est forcément injective (pour que h restreinte à cet ensemble soit injective), on en déduit que f est une bijection de $\{x_1, \dots, x_n\}$ dans lui-même, et que g est son inverse. Comme le nombre de points fixes de h est fini, on peut distinguer trois types de points fixes. Un point fixe x_k peut être tel que

1. $h(x) < x$ juste avant x_k et $h(x) > x$ juste après x_k .
2. $h(x) > x$ juste avant x_k et $h(x) < x$ juste après x_k .
3. h reste du même côté de la diagonale au voisinage de x_k .

On rattache les cas particuliers où $h(0) = 0$ et $h(x) < x$ près de 0, ou $h(1) = 1$ et $h(x) > x$ près de 1 au deuxième type, et les cas particuliers où $h(0) = 0$ et $h(x) > x$ près de 0, ou $h(1) = 1$ et $h(x) < x$ au troisième type. Baxter a montré dans [2] que f stabilisait ces trois types de points fixes. De plus, dans [5], il a montré avec Joichi que les permutations induites par les restrictions de f à chacun des deux premiers types de points fixes sont des permutations de Baxter.

Définition 1.3. Une carte planaire est un plongement d'un graphe connexe dans le plan à homéomorphisme préservant l'orientation du plan près. Plus précisément, chaque sommet du graphe est envoyé sur un point du plan de manière injective et chaque arête est envoyée sur un chemin joignant les deux points correspondant ne croisant pas les autres chemins et sommets.

- Les composantes connexes du plan privé des chemins ainsi tracés sont appelées faces. Elles sont bordées par des arêtes.
- La composante connexe non bornée est appelée face externe, les autres étant appelées les faces internes.

Définition 1.4. Une orientation plane bipolaire m est une carte planaire munie d'une orientation acyclique des arêtes avec exactement une source s (d'où partent des arêtes sortantes) et un puits p (où viennent des arêtes entrantes), ces sommets étant tous les deux sur la face externe de m . La taille de m est le nombre d'arêtes de m et est notée $|m|$.

On note \mathcal{O} l'ensemble des orientations bipolaires (planes) et \mathcal{O}_n l'ensemble des orientations bipolaires (planes) de taille n . Dans la suite, on dira simplement "orientation bipolaire" pour orientation bipolaire plane. Remarquons que toute orientation bipolaire peut être tracée dans le plan de sorte que chaque arête soit orientée de bas en haut, avec notamment la source s en bas et le puits p en haut (c'est notamment une conséquence du théorème 1.9 ci-après). On peut alors découper la face externe en traçant une demi-droite verticale au dessus de p et une demi-droite verticale en dessous de s , délimitant ainsi une face externe gauche et une face externe droite.

- Étant donné un sommet, on définit son degré entrant comme le nombre d'arêtes menant à ce sommet et son degré sortant comme le nombre d'arêtes partant de ce sommet.
- Étant donnée une face interne, son degré gauche est le nombre d'arêtes bordant le côté gauche de la face et son degré droit est le nombre d'arêtes bordant son côté droit.
- Étant donnée une arête, sa face gauche (resp. droite) est la face bordée par cette arête et située à sa gauche (resp. droite) de l'arête.

Définition 1.5. Si m est une orientation bipolaire, on définit l'orientation duale m^* de m . Ses sommets sont les faces de m (en distinguant la face externe gauche et la face externe droite). Deux sommets de m^* sont reliés par une arête si les faces correspondantes sont séparées par une arête e dans m (voir figure 1). On dira que l'arête ainsi définie dans m^* est l'arête duale de e , souvent notée e^* . Les arêtes de m^* sont orientées de la face externe droite (qui devient la source) à la face externe gauche (qui devient le puits).

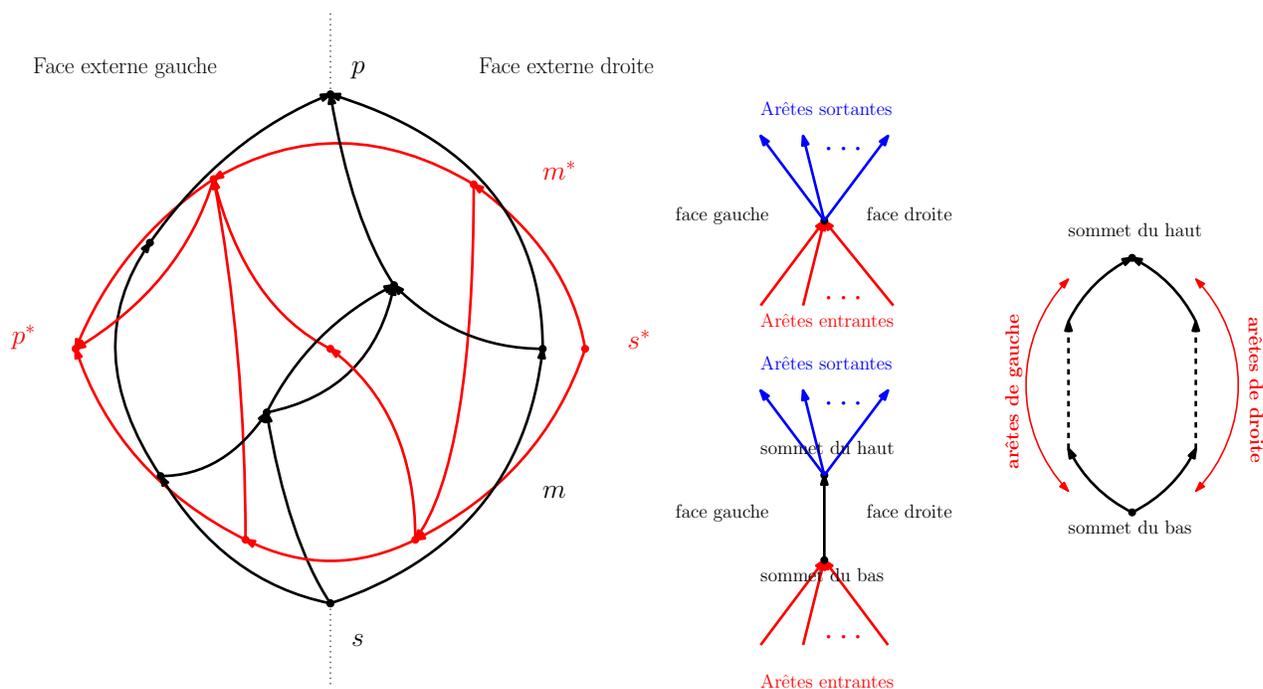


FIGURE 1 – Une orientation bipolaire m (en noir à gauche) et son orientation duale m^* (en rouge à gauche) ainsi que la description des objets entourant un sommet, une arête, ou une face d'une orientation bipolaire (à droite)

On voit que m^* est elle aussi une orientation bipolaire. De plus, m^{**} a les mêmes arêtes que

m , mais orientées dans le sens opposé. En particulier, $m^{****} = m$. Étant donnée une orientation bipolaire m , on définit l'arbre plan $T(m)$ ("down right tree" que l'on traduira par "arbre descendant à droite") enraciné en la source obtenu à partir de m en détachant en dessous de chaque sommet toutes les arêtes entrantes sauf la plus à droite (voir figure 2). Rappelons l'une des définitions possibles d'un arbre plan : un arbre plan est un ensemble d'arêtes muni d'une relation binaire père-fils pour laquelle chaque arête a au plus un père. Les fils de chaque arête sont ordonnés, de même que les arêtes sans père. Ces dernières sont attachées au dessus de la racine. On peut alors définir plus précisément l'arbre $T(m)$:

Définition 1.6. *L'arbre descendant à droite $T(m)$ de m est caractérisé par le fait que*

- *Les arêtes de $T(m)$ sont les arêtes de m .*
- *Si e est une arête de m , son père est l'arête entrante la plus à droite (si elle existe).*
- *L'ordre des arêtes au dessus d'une arête e dans $T(m)$ est induit par l'ordre de gauche à droite dans m , de même pour les arêtes sans père.*

Le parcours en profondeur (ou "exploration") de $T(m)$ nous donne une énumération des arêtes de m , notée $e_1, \dots, e_{|m|}$.

Définition 1.7. *Soit $n \geq 1$ et $m \in \mathcal{O}_n$. On définit $\text{OP}(m)$ comme l'unique permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la i -ème arête visitée dans l'exploration de $T(m)$ (c'est-à-dire e_i) ait pour arête duale la $\sigma(i)$ -ème arête visitée dans l'exploration de $T(m^*)$. Autrement dit, l'exploration de $T(m^*)$ énumère les arêtes de $T(m^*)$ dans l'ordre $e_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, e_{\sigma^{-1}(n)}$.*

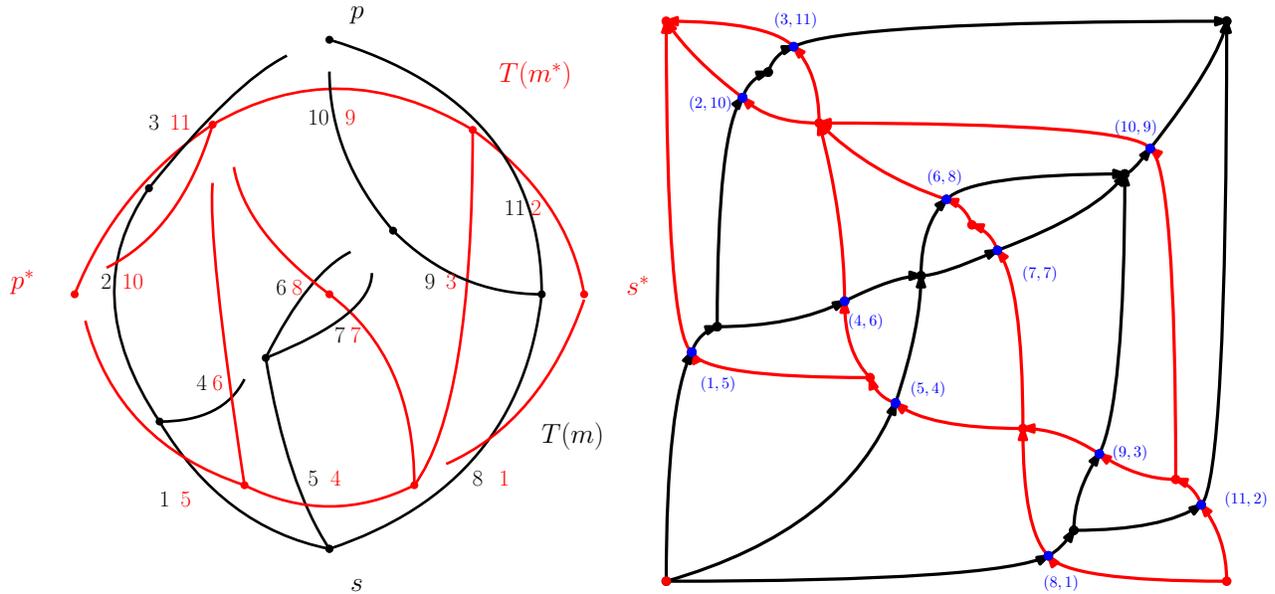


FIGURE 2 – À gauche, les arbres $T(m)$ et $T(m^*)$ avec leurs arêtes étiquetées. On lit ici $\sigma = \text{OP}(m) = (1, 5, 4, 6, 8)(2, 10, 9, 3, 11)(7)$. À droite, les deux cartes m et m^* sont dessinées sur le diagramme de la permutation σ .

Théorème 1.8. (théorème 2 de [6]) *La fonction OP est une bijection entre \mathcal{O} et \mathcal{P} (préservant la taille).*

Par ailleurs, la bijection OP se comporte très bien vis à vis de la dualité. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on peut la représenter par son diagramme, constitué du carré $[0, n] \times [0, n]$ sur lequel sont placés les carrés de côté 1 et de sommet en haut à droite $(i, \sigma(i))$. Notons σ^* la permutation obtenue en tournant le diagramme de $\frac{-\pi}{2}$. De manière équivalente, $\sigma^*(i) = n + 1 - \sigma^{-1}(i)$. Alors

Théorème 1.9. *(théorèmes 2 et 3, propositions 1 et 4 de [6]) On peut dessiner m et m^* sur le diagramme de $\sigma = \text{OP}(m)$ de sorte que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les arêtes e_i et e_i^* se croisent au point $(i, \sigma(i))$. En particulier, en tournant un tel dessin de $\frac{-\pi}{2}$, on a directement¹*

$$\text{OP}(m^*) = \text{OP}(m)^*.$$

Expliquons seulement comment dessiner l'orientation sur le diagramme de σ sans vérifier qu'il s'agit bien de m . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $b_i = (i, \sigma(i))$. De plus, pour chaque indice a de montée (c'est-à-dire tel que $\sigma(a) < \sigma(a+1)$), on note $\ell_a = \max\{\sigma(i); i < a+1 \text{ et } \sigma(i) < \sigma(a+1)\}$. Remarquons que comme σ est de Baxter, si $i > a+1$ est tel que $\sigma(i) > \sigma(a)$, alors $\sigma(i) > \ell_a$. On pose $w_a = (a + 1/2, \ell_a + 1/2)$. Le point w_a correspondra au point en haut de l'arête étiquetée a dans l'exploration de $T(m)$, et cette arête étiquetée a sera l'arête la plus à droite menant à ce point. L'arête étiquetée $a+1$ dans l'orientation m sera l'arête la plus à gauche issue du point w_a . Enfin, on pose aussi $w_0 = (1/2, 1/2)$ et $w_n = (n + 1/2, n + 1/2)$. On trace alors le diagramme de Hasse de l'ensemble des points w_a et b_i pour l'ordre lexicographique. Autrement dit, puisque les coordonnées des points sont distinctes, on met une arête orientée d'un point (x_1, y_1) à un autre (x_2, y_2) si $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$ et s'il n'existe pas de point (x_3, y_3) tel que $x_1 < x_3 < x_2$ et $y_1 < y_3 < y_2$. Par la remarque précédente, il ne peut pas y avoir de telle arête entre deux points b_i (et encore moins entre deux points w_a). Une telle arête ne peut donc être que de la forme (w_a, b_i) ou (b_i, w_a) . On oublie ensuite les points b_i , qui correspondront aux arêtes de la carte. Étant donné un sommet w_a , ses arêtes sortantes se situent en haut à droite et ses arêtes entrantes se situent en bas à gauche. Après pas mal de travail, l'article [6] montre qu'on obtient ainsi le dessin de m sur le diagramme de σ (voir figure 2).

1.2 Des orientations bipolaires aux marches en tandem

À une orientation bipolaire, Kenyon, Miller, Sheffield and Wilson ont associé une marche sur le quadrant positif \mathbb{N}^2 dans [11], définie à partir de l'exploration $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de l'arbre $T(m)$. Soulignons déjà un résultat utile : le parcours en profondeur de $T(m^{**})$ énumère les arêtes dans l'ordre inverse de l'exploration de $T(m)$. En effet, on distingue deux cas (voir figure 3) :

- si e_{i+1} est fils de e_i dans $T(m)$, alors par définition de e_{i+1} , e_{i+1} est l'arête la plus à gauche sortant de e_i et, par définition de $T(m)$, e_i est l'arête la plus à droite menant à e_{i+1} . Ainsi, dans m^{**} , e_{i+1} est l'arête la plus à droite menant à e_i et e_i est l'arête la plus à gauche sortant de e_{i+1} donc e_i sera exploré juste après e_{i+1} dans $T(m^{**})$.
- sinon, le chemin d'interface traverse une face f de m : l'arête e_i est en haut du bord gauche de f et e_{i+1} est en bas du bord droit de f . Mais alors e_i est en bas du bord droit de f dans m^{**} et e_{i+1} est en haut du bord gauche de f dans m^{**} . Ainsi, e_i sera exploré juste après e_{i+1} dans $T(m^{**})$.

1. en utilisant le fait que l'arbre $T(m^{**})$ est exploré dans le sens inverse de l'exploration en profondeur de $T(m)$, justifié au début de la sous-section 1.2.

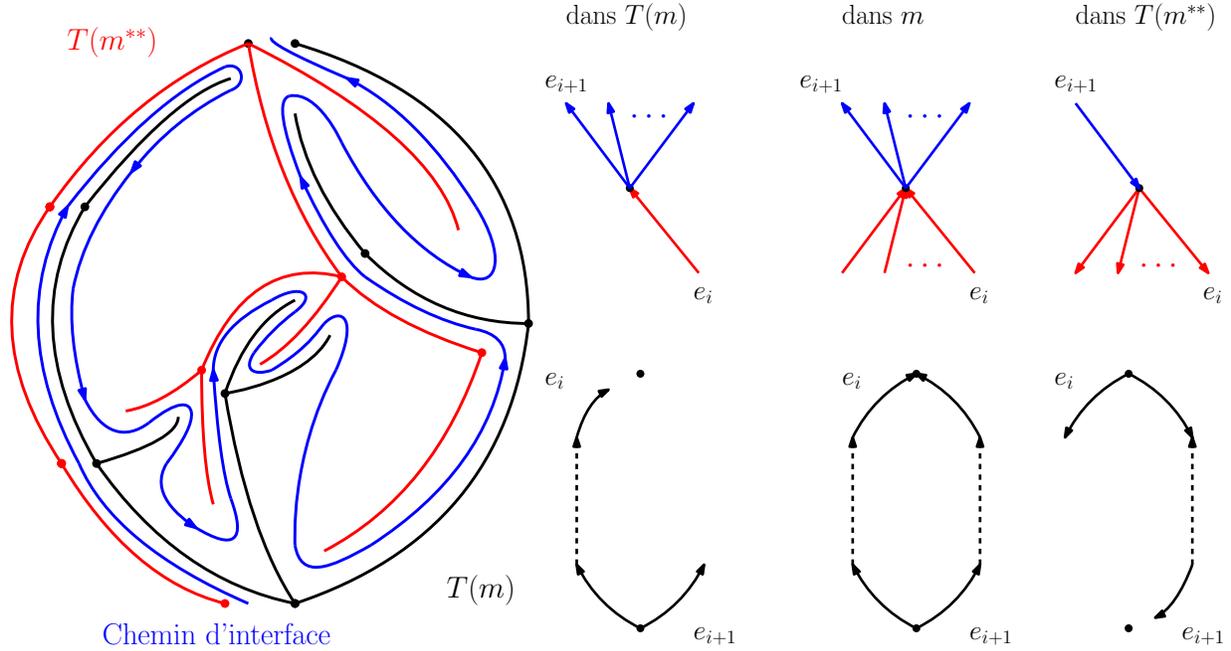


FIGURE 3 – À gauche, les arbre $T(m)$ et $T(m^{**})$ avec le chemin d'interface qui les sépare. À droite, la correspondance entre l'exploration de $T(m)$ et celle de $T(m^{**})$.

Définition 1.10. Soit $m \in \mathcal{O}_n$. On définit la marche associée à m et notée $\text{OW}(m) = (X_t, Y_t)_{1 \leq t \leq n} \in (\mathbb{N}^2)^n$ où X_t est la hauteur du sommet en bas de e_t dans $T(m)$ et Y_t est la hauteur du sommet en haut de e_t vue dans l'arbre $T(m^{**})$.

Remarque 1.11. Dans la définition ci-dessus, on voit que la marche $(0, X_1 + 1, \dots, X_n + 1)$ est le processus de hauteur de $T(m)$, c'est-à-dire la suite des hauteurs des sommets de $T(m)$ selon leur ordre dans l'exploration de $T(m)$. Puisque l'exploration de $T(m^{**})$ visite les arêtes dans l'ordre inverse, la marche $(0, Y_n + 1, Y_{n-1} + 1, \dots, Y_1 + 1)$ est le processus de hauteur de l'arbre $T(m^{**})$. Si on note $\overleftarrow{W} = (\overleftarrow{X}_t, \overleftarrow{Y}_t)_{t \in [1, n]} = (Y_{n+1-t}, X_{n+1-t})_{t \in [1, n]}$, alors $\overleftarrow{W} = \text{OW}(m^{**})$.

Le théorème suivant sera une conséquence de la suite :

Théorème 1.12. (théorème 2 dans [11]) OW est une bijection (préservant la taille) entre \mathcal{O} et l'ensemble \mathcal{W} des marches sur \mathbb{N}^2 commençant sur l'axe des ordonnées, se terminant sur l'axe des abscisses et ayant leurs pas dans

$$A = \{(+1, -1)\} \cup \{(-i, j); i, j \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble \mathcal{W} est appelé l'ensemble des marches en tandem. On note \mathcal{W}_n l'ensemble des marches en tandem de taille n . Vérifions déjà que OW est bien à valeurs dans \mathcal{W} . Soit $m \in \mathcal{O}_n$. Si la frontière gauche est de degré $h + 1$ et la face droite de degré $k + 1$, avec $h, k \in \mathbb{N}$, alors la marche $(X_t, Y_t)_{1 \leq t \leq n} = \text{OW}(m)$ commence en $(0, h)$ et se termine en $(k, 0)$. En effet, dans $T(m)$, l'arête e_1 se situe au niveau de la racine sur la frontière gauche car c'est la première à être explorée, donc $X_1 = 0$. Dans $T(m^{**})$, les arêtes de la frontière gauche restent reliées entre elles, donc le sommet en haut de e_1 est de hauteur $h + 1 - 1 = h$ dans $T(m^{**})$, d'où $Y_1 = h$. Par symétrie (quitte à renverser

l'orientation de m et à appliquer la remarque 1.11), on a aussi $X_n = k$ et $Y_n = 0$. Par ailleurs, par positivité de la hauteur, $\text{OW}(m)$ est bien une marche à valeurs dans \mathbb{N}^2 . Il ne reste plus qu'à montrer que les pas de la marche sont dans A . Pour cela, on considère le chemin d'interface dessiné lors de l'exploration de l'arbre $T(m)$ (voir figure 3).

Pendant l'exploration, deux cas se présentent :

- si l'arête e_{t+1} est fille de l'arête e_t dans $T(m)$ (et donc e_t est la fille de e_{t+1} dans $T(m^{**})$) alors l'incrément est $(+1, -1)$.
- sinon, le chemin d'interface traverse une face f de degré gauche $i + 1$ et de degré droit $j + 1$ avec $i, j \in \mathbb{N}$. Alors l'incrément est $(-i, +j)$ car dans $T(m)$ (resp. $T(m^{**})$), le bord gauche (resp. droit) de la face est préservé (voir figure 3).

Pour montrer que OW est une bijection, on explicitera son inverse. Mais nous définirons son inverse pour des marches plus générales : elles ne seront plus forcément à valeurs dans \mathbb{N}^2 .

Définition 1.13. *Si I est un intervalle (fini ou infini) de \mathbb{Z} , on note $\mathfrak{W}(I)$ l'ensemble des marches bidimensionnelles d'espace de temps I vues à une constante additive près. Formellement, $\mathfrak{W}(I) = (\mathbb{Z}^2)^I / \sim$, où $w \sim w'$ s'il existe $x \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\forall i \in I, w(i) = w'(i) + x$. On note $\mathfrak{W}_A(I) \subset \mathfrak{W}(I)$ l'ensemble des marches ayant leurs incréments dans A .*

Si $0 \in I$, on prendra la plupart du temps comme représentant la marche passant à l'origine au temps 0. Remarquons qu'on a une injection naturelle de \mathcal{W}_n dans $\mathfrak{W}_A(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Dans le même temps, si $I = \llbracket \ell, k \rrbracket$ est un intervalle fini de \mathbb{Z} , définissons l'ensemble des orientations bipolaires marquées :

Définition 1.14. *On note $\mathfrak{m}(I)$ l'ensemble des couples (m, γ) où $m \in \mathcal{O}$ et $\gamma \subset \llbracket 1, |m| \rrbracket$ est un intervalle de longueur $k - \ell + 1$ tel que les arêtes e_t pour $t \in \llbracket 1, |m| \rrbracket \setminus \gamma$ se situent soit sur la frontière gauche, soit sur la frontière droite (on exclut le cas où une même arête appartient aux deux frontières) et que sur chacune des deux frontières il existe au moins une arête e_t pour $t \in \gamma$.*

On étiquette les arêtes e_t pour $t \in \gamma$ par les entiers $\ell, \ell + 1, \dots, k$ dans l'ordre d'exploration. Les arêtes ainsi étiquetées sont aussi dites explorées puisqu'en quelque sorte l'intervalle γ définit une exploration partielle de m . L'arête étiquetée k est dite active. L'intervalle γ dit exactement quelles arêtes sont étiquetées. Remarquons qu'alors les arêtes inexplorées sont soit en dessous de l'arête étiquetée ℓ sur la frontière gauche, soit au dessus de l'arête étiquetée k sur la frontière droite. Les éléments de $\mathfrak{m}(I)$ sont appelées orientations bipolaires marquées. On notera souvent les orientations marquées m au lieu de (m, γ) . De plus, au lieu de noter les arêtes explorées $(e_t)_{t \in \gamma}$, on les notera $(e_i)_{i \in I}$ selon leur étiquette dans I . Remarquons qu'on a l'injection naturelle

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n &\longrightarrow \mathfrak{m}(\llbracket 1, n \rrbracket) \\ m &\longmapsto (m, \llbracket 1, n \rrbracket). \end{aligned}$$

Soit I un intervalle fini. Définissons l'application $\Theta : \mathfrak{W}_A(I) \mapsto \mathfrak{m}(I)$ par récurrence sur la taille de I (la construction par récurrence est illustrée par la figure 4). Pour l'initialisation, on envoie l'unique élément de $\mathfrak{W}_A(\{\ell\})$ sur l'orientation marquée $(m, \{1\})$ constituée d'une unique arête étiquetée ℓ (qui est le seul élément de $\mathfrak{m}(\{\ell\})$). Supposons maintenant l'application Θ définie pour des marches de longueur n . Soit $I = \llbracket \ell, k \rrbracket$ un intervalle fini de longueur $n + 1$. Soit $W \in \mathfrak{W}_A(\llbracket \ell, k \rrbracket)$. Notons $m' = \Theta(W|_{\llbracket \ell, k-1 \rrbracket})$. On distingue alors deux cas :

- Si $W_k - W_{k-1} = (1, -1)$, et si m' a une arête inexplorée au dessus de l'arête marquée $k - 1$, on l'étiquette k . Si m' n'a pas une telle arête inexplorée, on rajoute une arête supplémentaire au dessus du puits et on l'étiquette k .

- Si $W_k - W_{k-1} = (-i, j)$, on rajoute à m' une face f de degré gauche $i + 1$ et de degré droit $j + 1$. Le bord gauche de f est collé à la frontière droite de m' , en commençant par identifier l'arête en haut à gauche de f avec arête active de m' (étiquetée $k - 1$). On continue à identifier tant qu'on peut les arêtes en dessous sur la frontière droite de m' avec celles sur le bord gauche de f . Les arêtes (s'il en reste) du bord gauche de f qui n'ont pas pu être identifiées avec des arêtes de m' sont inexplorées. L'arête en bas à droite de f est quant à elle étiquetée k (et les autres arêtes du bord droit sont inexplorées).

L'orientation marquée m ainsi construite est bien dans $\mathbf{m}(I)$ car les éventuelles nouvelles arêtes inexplorées se situent bien sur les frontières gauche et droite de m et puisque l'arête étiquetée k sera bien explorée juste après l'arête marquée $k - 1$ (et se situe sur la frontière droite).

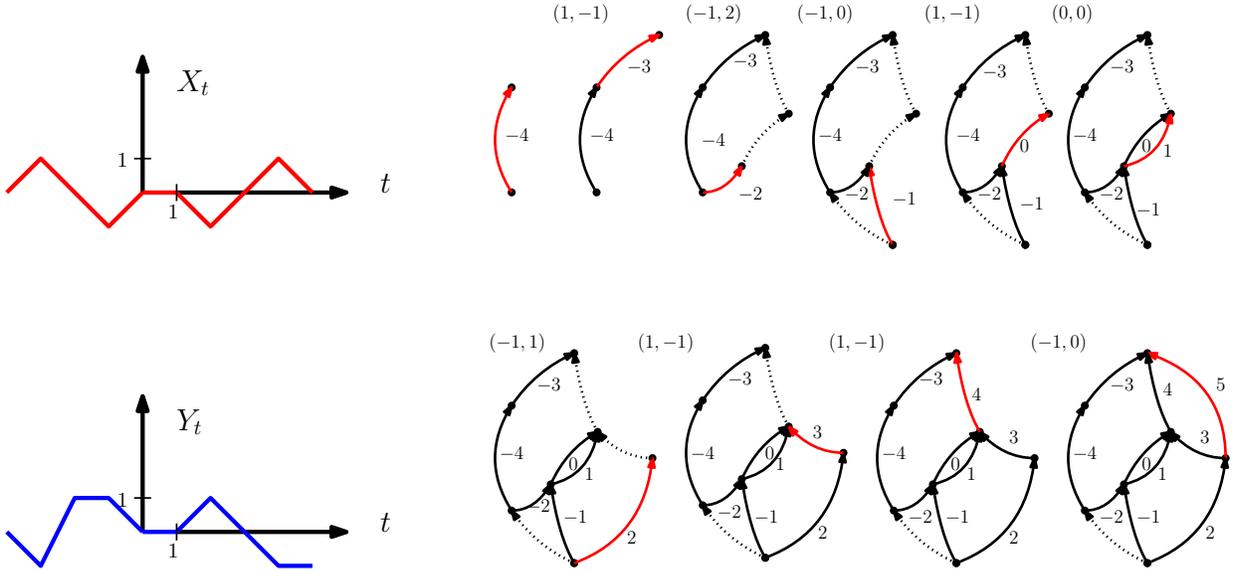


FIGURE 4 – À gauche, les coordonnées X_t et Y_t d'une marche $W \in \mathfrak{W}_A(\llbracket -4, 5 \rrbracket)$. À droite, son image par Θ construite par récurrence. À chaque étape, les arêtes inexplorées sont en pointillés et l'arête active est en rouge.

Remarque 1.15. De manière équivalente, on peut définir Θ dans l'autre sens. Étant donné un intervalle fini $I = \llbracket \ell, k \rrbracket$ de \mathbb{Z} tel que $k - \ell > 0$ et $W \in \mathfrak{W}_A(I)$, on considère $m = \Theta(W)$ et $m' = \Theta(W|_{\llbracket \ell+1, k \rrbracket})$. Alors,

- si $W_{\ell+1} - W_\ell = (+1, -1)$, on obtient m à partir de m' en étiquetant ℓ l'arête inexplorée juste en dessous de l'arête étiquetée $\ell + 1$ si elle existe et en rajoutant une étiquetée ℓ sous la source si elle n'existe pas.
- si $W_{\ell+1} - W_\ell = (-i, j)$, on obtient m à partir de m' en collant une face f de degré gauche $i + 1$ et de degré droit $j + 1$ à m' de la façon suivante : on identifie l'arête en bas à droite de f à l'arête étiquetée $\ell + 1$. Puis on identifie les arêtes au dessus du bord droit de f avec celles de la frontière gauche de m' . Les arêtes qui n'ont pas pu être identifiées restent inexplorées. L'arête en haut du bord gauche de f est étiquetée ℓ et les autres arêtes du bord gauche de f sont inexplorées.

L'équivalence des deux constructions de Θ se démontre par une récurrence initialisée pour les intervalles de taille 2.

Proposition 1.16. (théorème 1 de [11]) Pour tout intervalle fini I de \mathbb{Z} , l'application $\Theta : \mathfrak{W}_A(I) \rightarrow \mathfrak{m}(I)$ est une bijection. De plus, pour tout $n \geq 1$, $\Theta(\mathcal{W}_n) = \mathcal{O}_n$ et

$$\Theta|_{\mathcal{W}_n} = \text{OW}^{-1}.$$

Enfin, Θ se comporte bien vis-à-vis des restrictions : si $W \in \mathfrak{W}_A(I)$, et si $[[\ell, k]] \subset I$, alors l'orientation marquée $\Theta(W|_{[[\ell, k]])}$ est obtenue à partir de $\Theta(W)$ en gardant

1. les arêtes étiquetées de ℓ à k (qui seront les arêtes explorées)
2. les faces bordées par de telles arêtes
3. et les autres arêtes bordant de telles faces (qui seront les arêtes inexplorées).

Démonstration. Montrons par récurrence sur la taille de $I = [[\ell, k]]$ que $\Theta : \mathfrak{W}_A(I) \rightarrow \mathfrak{m}(I)$ est bijective. C'est clair pour les intervalles de taille 1. Soit $m \in \mathfrak{m}(I)$. Montrons d'abord la surjectivité. Regardons l'arête e étiquetée k . Deux alternatives se présentent :

- ou bien cette arête est la fille de l'arête étiquetée $k - 1$. On "désétiquette" e (et on la supprime si e était située en haut de m à la fois sur les frontières gauche et droite). On applique l'hypothèse de récurrence à la carte ainsi obtenue et on rajoute $(1, -1)$ à la fin de la marche.
- ou bien elle est en bas à droite d'une face de degré gauche $i + 1$ et de degré droit $j + 1$. On enlève alors cette face, les arêtes sur son bord droit et toutes les arêtes inexplorées de son bord gauche. On applique alors l'hypothèse de récurrence à la carte obtenue et on rajoute $(-i, j)$ à la fin de la marche.

Dans les deux cas, on a construit un antécédent à m par Θ , d'où la surjectivité. L'injectivité est claire puisque les deux possibilités ne peuvent avoir lieu en même temps et car la carte obtenue dans chacun des deux cas admet un unique antécédent par hypothèse de récurrence.

L'application OW peut être étendue à $\mathfrak{m}(I)$ en prenant la même définition mais portant sur le sous-chemin des arêtes explorées. L'extension $\widetilde{\text{OW}}$ est alors à valeurs dans $\mathfrak{W}(I)$. Par récurrence sur $|I|$ (toujours la même disjonction de cas), $\widetilde{\text{OW}} = \Theta^{-1}$. De plus, $\widetilde{\text{OW}}(\mathcal{O}_n) = \text{OW}(\mathcal{O}_n) \subset \mathcal{W}_n$. Il ne reste plus qu'à montrer que si $W \in \mathcal{W}_n$, alors $(m, \gamma) = \Theta(W) \in \mathcal{O}_n$. La marche $W = (X_t, Y_t)_{1 \leq t \leq n}$ commence en $(0, h)$ et se termine en $(k, 0)$ en restant dans le quadrant positif. Notons e_1, \dots, e_n les arêtes étiquetées $1, \dots, n$. Par définition de $\widetilde{\text{OW}}$ et par positivité de X_t , la hauteur dans $T(m)$ du sommet en bas de e_t est toujours supérieure ou égale à celle du sommet en bas de e_1 . Donc, par une récurrence immédiate s'appuyant sur la disjonction de cas habituelle, il n'y a pas d'arête inexplorée sur la frontière gauche de m . De même, pour tout t , la hauteur dans $T(m^{**})$ du sommet en haut de e_t est supérieure ou égale à la hauteur du sommet en haut de e_n . Donc, par une récurrence immédiate s'appuyant sur la remarque 1.15, il n'y a pas d'arête inexplorée sur la frontière droite de m . Donc $(m, \gamma) \in \mathcal{O}_n$. Enfin, le troisième point de la propriété se vérifie lui aussi à l'aide de la remarque 1.15. □

Dans [1], Borga et Maazoun introduisent un quatrième objet combinatoire : un processus de marches coalescentes. Cet objet leur permet de calculer les limites locales et les limites d'échelle d'orientations bipolaires, de permutations de Baxter et de marches en tandem uniformes. Nous retraçons leur raisonnement dans les sections qui suivent. Les propositions, lemmes et théorèmes auxquels aucune référence n'est accolée sont issus, à d'infimes modifications près, de [1]. Les résultats

marqués d'une astérisque * font quant à eux l'objet d'une contribution personnelle (ils sont situés dans les sous-sections 4.2 et 4.4).

On introduira tout d'abord dans la section 2 le processus de marches coalescentes associé à une marche en tandem et nous verrons comment récupérer la permutation de Baxter associée directement à partir de ce processus. Puis dans la section 3 nous ferons le lien entre les marches en tandem uniformes et une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^2 conditionnée à rester dans le quadrant positif. Enfin, forts de ce lien, nous établirons les résultats de limites locales en section 4, suivis des résultats de limites d'échelle en section 5. La limite d'échelle des permutations sera obtenue en tant que limite d'échelle sur l'espace des permutons.

2 Préliminaires combinatoires

2.1 Des marches en tandem aux processus de marches coalescentes

Soit I un intervalle fini ou infini de \mathbb{Z} .

Définition 2.1. *Un processus de marches coalescentes sur I est une famille $\left((Z_s^{(t)})_{\substack{s \geq t \\ s \in I}} \right)_{t \in I}$ de marches $Z^{(t)}$ sur \mathbb{Z} telles que*

- $\forall t \in I, Z_t^{(t)} = 0$
- $\forall t, t' \in I, \forall k' \geq k, Z_k^{(t)} \geq Z_k^{(t')} \implies Z_{k'}^{(t)} \geq Z_{k'}^{(t')}$.

En particulier, s'il existe un temps k tel que $Z_k^{(t)} = Z_k^{(t')}$, alors $\forall k' \geq k, Z_{k'}^{(t)} = Z_{k'}^{(t')}$. On dit que $Z^{(t)}$ et $Z^{(t')}$ coalescent et on appelle point coalescent un point $(\ell, Z_\ell^{(t)})$ tel que $\ell = \min\{k \geq \max(t, t'); Z_k^{(t)} = Z_k^{(t')}\}$. On note $\mathfrak{C}(I)$ l'ensemble des processus de marches coalescentes sur un intervalle I .

Définition 2.2. *Soit $W = (X_t, Y_t)_{t \in I} \in \mathfrak{W}_A(I)$ une marche en tandem. On définit le processus de marches coalescentes $\text{WC}(W) = (Z^{(t)})_{t \in I}$ par $Z_t^{(t)} = 0$ et pour tout $\ell \geq t$ tel que $\ell + 1 \in I$,*

- *si $W_{\ell+1} - W_\ell = (1, -1)$, alors $Z_{\ell+1}^{(t)} - Z_\ell^{(t)} = -1$.*
- *si $W_{\ell+1} - W_\ell = (-i, j)$ avec $i, j \in \mathbb{N}$, alors*

$$Z_{\ell+1}^{(t)} - Z_\ell^{(t)} = \begin{cases} j & \text{si } Z_\ell^{(t)} \geq 0 \\ i & \text{si } Z_\ell^{(t)} < 0 \text{ et } Z_\ell^{(t)} + i < 0 \\ j - Z_\ell^{(t)} & \text{si } Z_\ell^{(t)} < 0 \text{ et } Z_\ell^{(t)} + i \geq 0. \end{cases}$$

Autrement dit, du temps ℓ au temps $\ell + 1$, la marche $Z^{(t)}$ varie comme Y quand elle est positive, comme $-X$ quand elle est strictement négative et le reste, mais si évoluer comme $-X$ la rend positive alors elle rejoint la marche $Z^{(\ell)}$. Un exemple est donnée par la figure 5.

Le processus ainsi défini est bien un processus de marches coalescentes puisque, quand les marches sont positives, elles évoluent de la même manière (donc l'ordre ne change pas), de même quand elles restent strictement négatives. Enfin, quand quelques unes deviennent positives, elles rejoignent la marche positive la plus en bas et évoluent ensuite comme celle-ci. Ainsi, WC est bien à valeurs dans $\mathfrak{C}(I)$. On pose $\mathcal{C}_n = \text{WC}(\mathcal{W}_n)$ et $\mathcal{C} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{C}_n$.

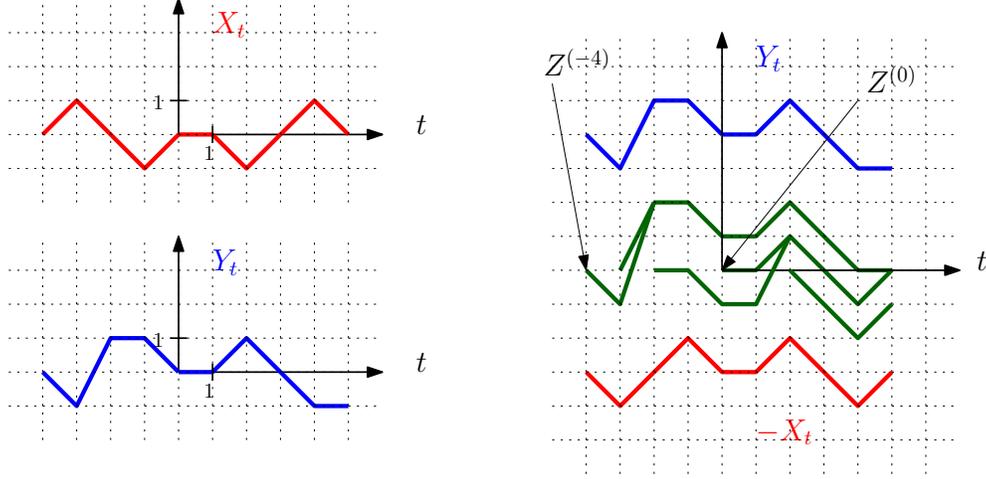


FIGURE 5 – À gauche, les coordonnées X_t et Y_t d'une marche $W \in \mathfrak{W}_A(\llbracket -4, 5 \rrbracket)$. À droite, son image par WC.

2.2 Des processus de marches coalescentes aux permutations de Baxter

Étant donné un processus de marches coalescentes $Z \in \mathfrak{C}(I)$, on peut définir une relation binaire \leq_Z sur I par

$$\begin{cases} i \leq_Z i \\ i \leq_Z j & \text{si } i < j \text{ et } Z_j^{(i)} < 0 \\ j \leq_Z i & \text{si } i < j \text{ et } Z_j^{(i)} \geq 0. \end{cases}$$

Proposition 2.3. \leq_Z est un ordre total sur I .

Démonstration. On a bien $\forall i, j, i \leq_Z j$ ou $j \leq_Z i$. On a aussi clairement l'antisymétrie et la réflexivité. Ne reste que la transitivité. Soient $i < j < k$. Si $i \leq_Z k$ et $j \leq_Z k$, la transitivité est évidente. De même si $i \geq_Z k$ et $j \geq_Z k$. Ne restent que le cas où $i \leq_Z k$ et $k \leq_Z j$ et le cas où $j \leq_Z k$ et $k \leq_Z i$. Les deux cas se traitent de la même manière. Supposons être dans le premier cas, alors $Z_k^{(i)} < 0 \leq Z_k^{(j)}$. Alors $Z_j^{(i)} < Z_j^{(j)} = 0$, donc $i \leq_Z j$. \square

Remarque 2.4. Si $i, j \in I$ et $k \in I$ est tel que $k > i, j$. Puisque Z est un processus de marches coalescentes,

$$Z_k^{(i)} < Z_k^{(j)} \implies i \leq_Z j.$$

Un ordre total sur un ensemble fini peut se voir comme une permutation de cet ensemble, d'où la définition suivante :

Définition 2.5. Soit $n \geq 1$ et $Z \in \mathfrak{C}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. On définit $\text{CP}(Z)$ comme l'unique permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que

$$\sigma(i) \leq \sigma(j) \iff i \leq_Z j.$$

Autrement dit,

$$\sigma^{-1}(1) \leq_Z \sigma^{-1}(2) \leq_Z \dots \leq_Z \sigma^{-1}(n).$$

On va montrer le théorème suivant :

Théorème 2.6. *Le diagramme ci-dessous commute :*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_n & \xrightarrow{\text{OP}} & \mathcal{P}_n \\
 \text{OW} \downarrow & & \uparrow \text{CP} \\
 \mathcal{W}_n & \xrightarrow{\text{WC}} & \mathcal{C}_n
 \end{array}$$

Pour cela, si $m \in \mathcal{O}_n$, on va récupérer l'arbre $T(m^*)$ à partir du processus de marches coalescentes associé à m . Mais avant, on a besoin d'introduire un autre objet généralisant les arbres plans.

Définition 2.7. — *Un arbre plan planté en \mathbb{Z} est un arbre plan (enraciné) dont la racine est équipée d'une arête supplémentaire (identifiée à la racine) qui a un indice dans \mathbb{Z} .*

— *Une forêt plane plantée sur \mathbb{Z} est un ℓ -uplet (T_1, \dots, T_ℓ) d'arbres plans plantés sur \mathbb{Z} tels que les indices de chacune des racines soient croissants.*

Remarque 2.8. *Une forêt admet un processus d'exploration : la concaténation des explorations des T_i dans l'ordre de la suite.*

Définition 2.9. *Soit $Z \in \mathfrak{C}(I)$ où I est un intervalle fini de \mathbb{Z} . On définit sa forêt coalescente $\text{LFor}(Z)$ comme la forêt plane dont les arêtes sont étiquetées par I telle que :*

- *l'ensemble des arêtes s'identifie avec I .*
- *pour tous $i < j \in I$, l'arête i est un fils de l'arête j si $(j, 0)$ est le point coalescent de $Z^{(i)}$ et $Z^{(j)}$ et si $Z^{(i)}$ ne s'annule pas sur $\llbracket i+1, j-1 \rrbracket$.*
- *les enfants sont ordonnés par \leq_Z .*
- *les arbres ainsi obtenus sont ordonnés dans le ℓ -uplet de sorte que leurs racines soient croissantes pour \leq_Z .*
- *l'indice de l'arbre de racine i est $Z_{\max I}^{(i)}$.*

Remarquons que si $i < j \in I$, l'arête j est l'ancêtre de l'arête i si et seulement si $Z_j^{(i)} = 0$.

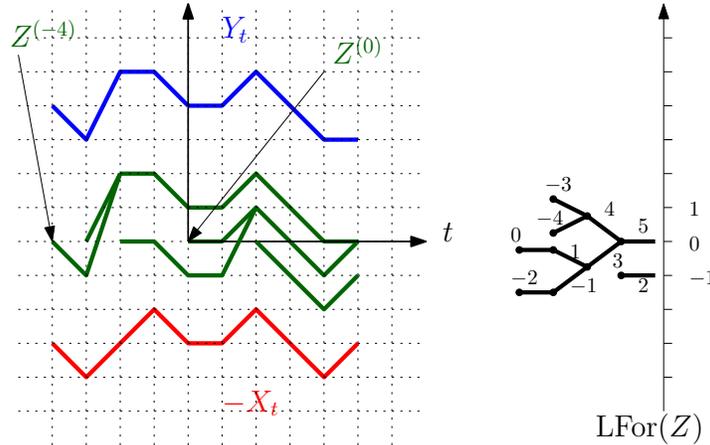


FIGURE 6 – À gauche, le processus Z de marches coalescentes obtenu dans la figure 5 et à droite la forêt coalescente $\text{LFor}(Z)$ associée.

Proposition 2.10. $\text{LFor}(Z)$ est une forêt plane plantée sur \mathbb{Z} munie d'un étiquetage des arêtes par I . De plus, l'ordre total \leq_Z coïncide avec l'ordre d'exploration de la forêt.

Démonstration. La première partie est immédiate. Montrons la deuxième partie. Les ordres coïncident entre les racines des arbres par construction. Regardons à l'intérieur d'un arbre. Si j est un ancêtre de i , alors $Z_j^{(i)} = 0$. Soient maintenant $i \neq j \in I$. Soit k leur plus proche ancêtre commun, i_0 le fils de k qui est l'ancêtre (au sens large) de i et j_0 le fils de k qui est l'ancêtre de j . On peut supposer $i_0 < j_0$.

- Si $i_0 \leq_Z j_0$, comme à partir de l'instant j_0 les marches $Z^{(i)}$ et $Z^{(i_0)}$ ont coalescé ainsi que $Z^{(j)}$ et $Z^{(j_0)}$, on a $Z_{j_0}^{(i)} = Z_{j_0}^{(i_0)} < 0 = Z_{j_0}^{(j)}$, donc $i \leq_Z j$ par la remarque 2.4, ce qu'on voulait.
- Si $j_0 \leq_Z i_0$, on a forcément $Z_{j_0}^{(i_0)} > 0$ (car sinon i_0 serait le descendant de j_0). On conclut comme ci-dessus.

□

Remarque 2.11. En particulier, si $I = \llbracket 1, n \rrbracket$, par définition de $\sigma = \text{CP}(Z)$, $\sigma(i)$ est la position de l'arête i dans l'exploration de $\text{LFor}(Z)$.

Définition 2.12. Soit $m \in \mathbf{m}(I)$, où I est un intervalle fini de \mathbb{Z} . Rappelons que l'on note e_i l'arête étiquetée par $i \in I$ dans m et e_i^* son arête duale. On définit sa forêt plane étiquetée $\text{DualF}(m)$ comme la restriction de $T(m^*)$ aux arêtes $(e_i^*)_{i \in I}$ (et ces arêtes sont étiquetées par les éléments de I). Plus précisément,

- les arêtes de $\text{DualF}(m)$ sont les e_i^* pour $i \in I$.
- une arête e_i^* est fils de e_j^* si c'est le cas dans $T(m^*)$
- les arêtes e_i^* sans père sont plantées sur \mathbb{Z} de la façon suivante :
 1. si e_i est sur la frontière droite de m , on indexe e_i^* par la hauteur relative (négative) de e_i par rapport à l'arête active.
 2. sinon, l'arête duale de l'arête e (inexplorée) en haut à droite de la face droite de e_i est le père de e_i^* dans $T(m^*)$. On prend pour indice la hauteur relative (strictement positive) de e par rapport à l'arête active.

Remarque 2.13. Si $m \in \mathcal{O}_n$, $\text{DualF}(m)$ est obtenu en détachant la racine de $T(m^*)$, en étiquetant les arêtes selon leur position dans l'exploration de $T(m)$ et en indexant les arêtes-racines par leur hauteur (négative) relative dans la frontière droite de m (par rapport à l'arête du haut).

Proposition 2.14. Soit $I \subset \mathbb{Z}$ un intervalle fini de \mathbb{Z} et $W \in \mathfrak{W}_A(I)$. Soit $Z = \text{WC}(W)$ et $m = \Theta(W)$. Alors

$$\text{DualF}(m) = \text{LFor}(Z).$$

Par les remarques 2.11 et 2.13, la proposition ci-dessus implique le théorème 2.6. Montrons désormais cette proposition.

Démonstration. Montrons le par récurrence sur $|I|$. Si $I = \{k\}$, alors l'unique élément m de $\mathbf{m}(I)$ est constitué d'une seule arête étiquetée k , donc $\text{DualF}(m)$ est la forêt constituée d'une seule arête étiquetée k et plantée en 0. De l'autre côté, le processus de marches coalescentes associé Z est constitué d'une seule marche $Z^{(k)}$ définie seulement à l'instant k , donc on a bien $\text{LFor}(Z) = \text{DualF}(m)$. Supposons maintenant $I = \llbracket \ell, k + 1 \rrbracket$ avec $\ell \leq k$. Soient $W \in \mathfrak{W}_A(I)$ et $m = \Theta(W) \in \mathbf{m}(I)$.

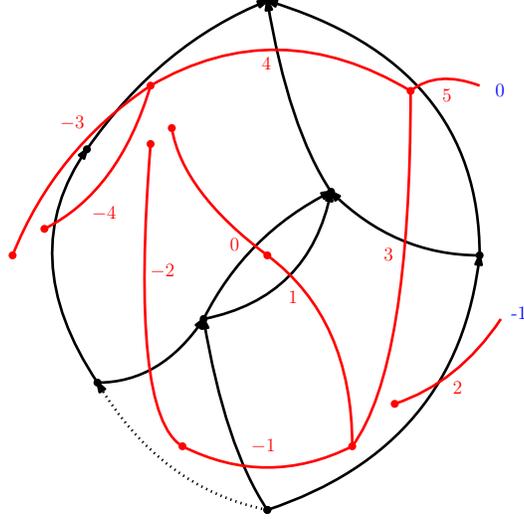


FIGURE 7 – La forêt $\text{DualF}(m)$ associée à la carte marquée $m = \Theta(W)$.

On note toujours $(e_i)_{i \in I}$ les arêtes explorées de m . Soient $m' = \Theta(W|_{[\ell, k]})$, $F = \text{DualF}(m)$ et $F' = \text{DualF}(m')$.

Dans le premier cas, où $W_{k+1} - W_k = (1, -1)$, m s'obtient à partir de m' en remontant de un l'arête active. La forêt F a donc une arête supplémentaire par rapport à F' , c'est e_{k+1}^* . Cette arête est sans père, a pour indice 0 et est le père de toutes des arêtes qui étaient d'indice 1. Toutes les autres arêtes sans parent le restent et leurs indices décroissent de 1.

Dans l'autre cas, $W_{k+1} - W_k = (-i, j)$ pour $i, j \geq 0$. L'orientation marquée m s'obtient en collant une face f de degré gauche $i + 1$ et de degré droit $j + 1$ à la frontière droite de m' . La précédente arête active e_k est en haut à gauche de f tandis que la nouvelle arête active e_{k+1} est en bas à droite de f . Les arêtes sans parent d'indices strictement positifs restent sans parent et leur indice augmente de j , celles d'indices strictement inférieurs à $-i$ restent sans parent et leur indice augmente de i . Les arêtes sans parent d'indices dans $[-i, 0]$ sont les fils dans $T(m^*)$ de l'arête duale de l'arête \bar{e} en haut à droite de f . Il faut alors distinguer deux sous-cas :

- si $j = 0$, alors $\bar{e} = e_{k+1}$. Donc les arêtes sans père dans F' d'indices $-i, \dots, 0$ deviennent les fils de la nouvelle arête sans parent e_{k+1}^* d'indice 0.

- Si $j > 0$, alors \bar{e} n'est pas une arête explorée, donc les arêtes sans père de F' d'indices $-i, \dots, 0$ restent sans parent mais leur indice est maintenant la hauteur de \bar{e} , c'est-à-dire j .

La nouvelle arête sans parent e_{k+1}^* d'indice 0 n'a dans ce cas pas de fils.

Regardons maintenant comment obtenir $\text{LFor}(Z)$ à partir de $\text{LFor}(Z|_{[\ell, k]})$ (voir figure 9).

Dans le premier cas, $W_{k+1} - W_k = (+1, -1)$, donc $\forall t \leq k, Z_{k+1}^{(t)} = Z_k^{(t)} - 1$ et $Z_{k+1}^{(k+1)} = 0$. On rajoute donc une arête sans père d'indice 0 qui devient le père des arêtes qui étaient d'indice 1. Toutes les autres arêtes sans parent le restent et leur indice décroît de 1.

Dans le second cas, $W_{k+1} - W_k = (-i, j)$. On a pour tout $t \leq k, Z_k^{(t)} \geq 0 \implies Z_{k+1}^{(t)} = Z_k^{(t)} + j$ et

$$Z_k^{(t)} < 0 \implies Z_{k+1}^{(t)} = \begin{cases} Z_k^{(t)} + i & \text{si } Z_k^{(t)} + i < 0 \\ j & \text{sinon.} \end{cases}$$

On distingue deux sous-cas :

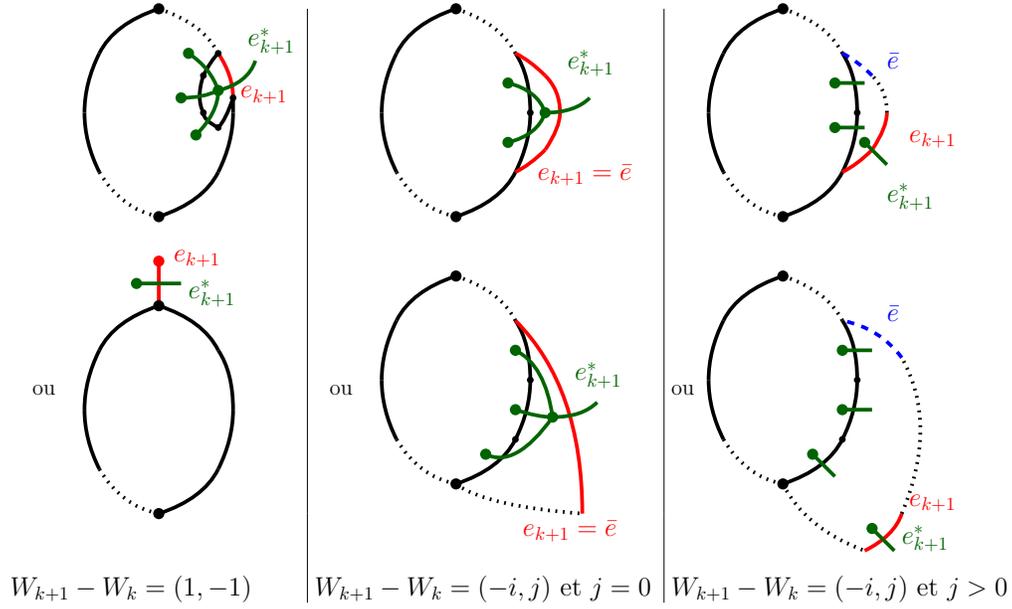


FIGURE 8 – Évolution de la forêt $\text{DualF}(m)$ selon le pas de la marche W

- si $j = 0$, les arêtes plantées en des indices positifs restent sur place et les arêtes plantées en des indices strictement inférieurs à $-i$ montent de i . Les arêtes plantées en des indices dans $\llbracket -i, 0 \rrbracket$ deviennent les enfants de la nouvelle arête $k + 1$ plantée en 0.
- si $j > 0$, les arêtes plantées en des indices positifs montent de j et les arêtes plantées en des indices strictement inférieurs à $-i$ montent de i tandis que les arêtes plantées en des indices dans $\llbracket -i, 0 \rrbracket$ sont replantées en j . Enfin, une nouvelle arête ($k + 1$) est plantée en 0.

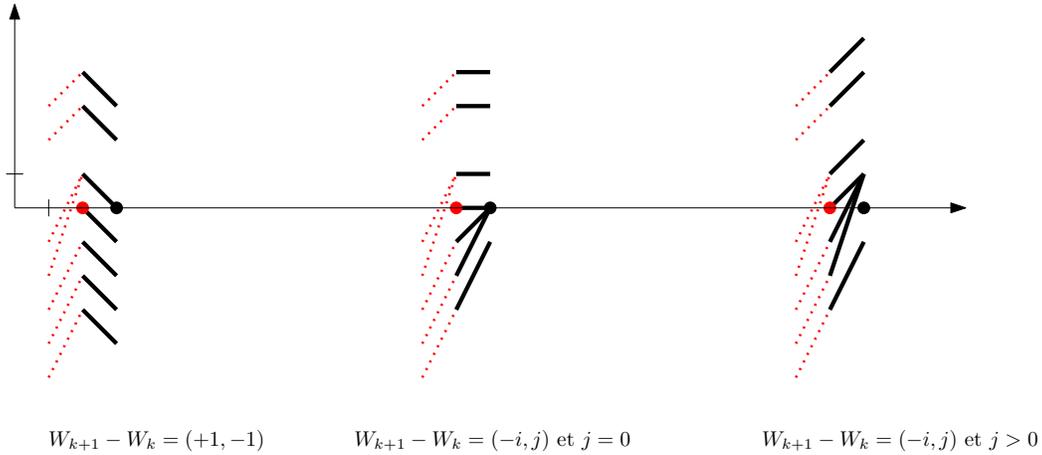


FIGURE 9 – Évolution du processus de marches coalescentes Z selon le pas de la marche W

Ainsi, par récurrence, $\text{LFor}(Z) = \text{DualF}(m)$. □

Une conséquence de la proposition est le corollaire suivant :

Corollaire 2.15. Soit $Z \in \mathcal{C}_n$ et soient m, W, σ les objets associés par le diagramme commutatif. On note $L_Z = \left(L_Z^{(i)}(j) \right)_{1 \leq i \leq j \leq n}$ la famille des processus de temps locaux en zéro des marches $Z^{(i)}$ définie par

$$L_Z^{(i)}(j) = \#\{k \in \llbracket i, j \rrbracket; Z_k^{(i)} = 0\}.$$

Notons $W^* = (X_i^*, Y_i^*)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} = \text{OW}(m^*)$. Alors, si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$X_{\sigma(i)}^* = L_Z^{(i)}(n) - 1.$$

Plus généralement, si on note P_i la lignée ancestrale de l'arête e_i^* dans $T(m^*)$, alors pour tous $1 \leq i \leq j \leq n$, $L_Z^{(i)}(j)$ est égal au nombre d'arêtes dans P_i avec une $T(m)$ -étiquette inférieure ou égale à j .

Démonstration. Par définition, $X_{\sigma(i)}^*$ est la hauteur dans $T(m^*)$ du sommet en bas de l'arête visitée à l'instant $\sigma(i)$ dans l'exploration de $T(m^*)$, c'est-à-dire e_i^* . Mais, par définition, $L_Z^{(i)}(n) - 1$ est le nombre d'ancêtres stricts de i dans $\text{LFor}(Z)$. Or la hauteur dans $T(m^*)$ est la hauteur dans $\text{DualF}(m) = \text{LFor}(Z)$, d'où la première égalité.

De plus, les zéros de $Z^{(i)}$ correspondent aux arêtes de la lignée ancestrale P_i et leur position est leur $T(m)$ -étiquette. Or $L_Z^{(i)}(j)$ est égal au nombre de zéros de $Z^{(i)}$ positionnés jusqu'en j , donc est aussi égal au nombre d'arêtes de P_i ayant une $T(m)$ -étiquette inférieure ou égale à j . \square

Enfin, on aura besoin dans la suite de la proposition ci-dessous qui souligne un lien entre les arêtes sortant d'une arête e_i et la marche $Z^{(i)}$.

Proposition 2.16. Soit $I \subset \mathbb{Z}$ un intervalle fini de \mathbb{Z} et $W \in \mathfrak{W}_A(I)$. Soit $Z = \text{WC}(W)$ et $m = \Theta(W)$. Soient $i \in I$, e_i l'arête étiquetée i dans m , v le sommet du haut de e_i . Si $j > i$ est le plus petit indice (s'il existe) après i tel que $Z_j^{(i)} = 0$ et $Z_{j+1}^{(i)} < 0$ et $s > j + 1$ est le plus petit indice (s'il existe) après $j + 1$ tel que $Z_s^{(i)} \geq 0$, alors le nombre d'arêtes sortantes de v est d'au plus $s - j - 1$.

Démonstration. Déjà, les arêtes sortant de v doivent avoir des étiquettes plus grandes que i . Mais comme $Z^{(i)}|_{\llbracket i, j \rrbracket} \geq 0$, $Z^{(i)}|_{\llbracket i, j \rrbracket}$ coïncide (à une constante) près avec $Y|_{\llbracket i, j \rrbracket}$. En particulier, pour tout $k \in \llbracket i, j \rrbracket$, $Y_k \geq Y_i$. Donc les arêtes e_k pour $k \in \llbracket i + 1, j \rrbracket$ sont toutes des descendantes (pas forcément les filles) du sommet v dans $T(m^{**})$, tout comme e_i . Elles ne peuvent alors pas être des arêtes sortant de v dans m . De plus, comme $Z_j^{(i)} = 0$, l'arête e_j sort de v dans $T(m^{**})$. À l'inverse, $Z^{(i)}|_{\llbracket j+1, s-1 \rrbracket} < 0$, donc $Z^{(i)}|_{\llbracket j+1, s-1 \rrbracket}$ coïncide avec $-X|_{\llbracket j+1, s-1 \rrbracket}$. Ainsi, les arêtes e_k pour $k \in \llbracket j+1, s-1 \rrbracket$ sont les descendantes (pas forcément les filles) de e_j dans $T(m)$, elles peuvent donc éventuellement sortir de v dans m . Enfin, puisque $Z_s^{(i)} \geq 0$, $X_s \leq X_j$ et e_s n'est pas une descendante de e_j , ce qui signifie qu'on a fini l'exploration des descendants de e_j . Ainsi, les seules arêtes qui peuvent sortir de v dans m sont les arêtes e_k pour $k \in \llbracket j + 1, s - 1 \rrbracket$ (voir la figure 10). \square

2.3 Le comportement de ces bijections vis-à-vis de la dualité

On note $\star = \{\emptyset, *, **, ***\}$ le groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ agissant par dualité sur les orientations bipolaires. Soit $m \in \mathcal{O}_n$. Pour tout $\theta \in \star$, on note $W^\theta = (X^\theta, Y^\theta)$, Z^θ , σ^θ et $L^\theta = L_{Z^\theta}$ les différents

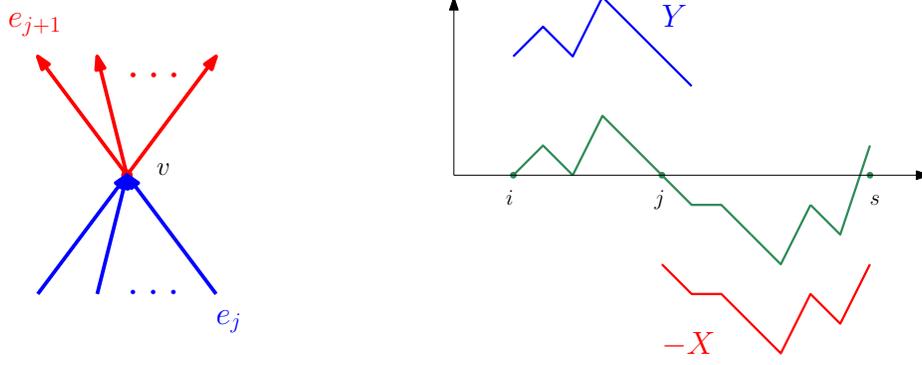


FIGURE 10 – À gauche, les arêtes entrantes et sortantes de v . L'arête e_j est l'arête entrante la plus à droite tandis que l'arête e_{j+1} est l'arête sortante la plus à gauche. À droite, la marche processus $Z^{(i)}$ ainsi que les marches $-X$ et Y qui la définissent.

objets définis précédemment² correspondant à l'orientation m^θ . On sait déjà (remarque 1.11) que $\forall \theta \in \star, \overleftarrow{W}^\theta = W^{\theta**}$ et par le corollaire 2.15 que

$$\forall \theta \in \star, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_{\sigma^\theta(i)}^{\theta*} = L^{\theta, (i)}(n) - 1. \quad (2.1)$$

En particulier, on a

Proposition 2.17. W^* s'obtient à partir de Z et $Z^{**} = \text{WC}(\overleftarrow{W})$ par les relations

$$(X_i^*)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} = \left(L^{(\sigma^{-1}(i))}(n) - 1 \right)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \text{ et } (Y_i^*)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} = \left(L^{**, (\sigma^*(i))}(n) - 1 \right)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $Y_i^* = X_{n+1-i}^{***}$ puis de montrer que $\sigma^*(n+1-i) = (\sigma^{**})^{-1}(i)$, ce qui est évident par définition de σ^* . \square

2.4 Permutations et orientations infinies

En vue des résultats de limites locales, on doit définir les notions de permutation infinie et d'orientation infinie étiquetées par un intervalle $I \subset \mathbb{Z}$ infini.

Définition 2.18. Une "permutation" de I est un ordre total sur I .

On note $\mathfrak{S}(I)$ l'ensemble des permutations de I . L'application CP s'étend à $\mathfrak{S}(I)$ en la définissant directement comme $Z \mapsto \leq_Z$. Pour les cartes, c'est un peu plus complexe.

Définition 2.19. Une quasi-carte infinie orientée est une collection (ensemble avec répétitions) infinie dénombrable de polygones finis avec des arêtes orientées collés le long de certaines arêtes en préservant l'orientation. Si le graphe correspondant (obtenu en identifiant les arêtes collées) est localement fini, on dit que la quasi-carte est une carte orientée infinie.

Définition 2.20. Si m est une carte orientée infinie, sa frontière est la collection des arêtes qui ne sont pas collées à une autre arête. De plus, on dit que m est

² La définition de σ^* correspond bien à celle donnée précédemment puisque par le théorème 1.9, $\text{OP}(m^*) = \text{OP}(m)^*$.

- simplement connexe³ si pour toute sous-carte finie $f \subset m$, il existe une sous-carte $f' \subset m$ finie qui s'identifie à une carte planaire et telle que f soit une sous-carte de f' .
- sans frontière si sa frontière est vide.

Si les deux conditions ci-dessus sont vérifiées, on dit que m est une carte planaire infinie⁴.

Remarque 2.21. Si m est une carte planaire infinie, on peut lui associer sa carte duale m^* (qui est aussi une carte planaire infinie) en plaçant des sommets sur chaque face de m et en traçant une arête d'un sommet v^* à un sommet w^* dans m^* au niveau de chaque arête de m ayant à sa gauche la face correspondant à w^* et à sa droite la face correspondant à v^* .

Étendons maintenant Θ à $\mathfrak{W}_A(I)$ pour I infini. Soit $W \in \mathfrak{W}_A(I)$. On construit la quasi-carte infinie marquée $\Theta(W)$ comme limite projective des $\Theta(W|_J)$ pour $J \subset I$ intervalle fini. Par la proposition 1.16, si $J' \subset J \subset I$ sont des sous-intervalles finis de I , l'orientation $\Theta(W|_{J'})$ est une sous-carte de $\Theta(W|_J)$ définie de manière unique. Soit maintenant J_n une suite croissante d'intervalles finis telle que $I = \bigcup_n J_n$. On définit $m = \Theta(W)$ en prenant pour collection de polygones l'union croissante des polygones des $\Theta(W|_{J_n})$ et en regroupant par paires certaines arêtes de ces polygones de la façon suivante : deux arêtes sont collées si elles le sont dans $\Theta(W|_{J_n})$ pour un certain n . Cela définit une quasi-carte orientée infinie si la marche fait un nombre infini de pas de la forme $(-i, j)$ pour $i, j \in \mathbb{N}$ (sinon on n'a pas un nombre infini de polygones). Les arêtes qui ne sont jamais explorées sont alors sur la frontière de m . Les arêtes explorées sont étiquetées par I : une arête est étiquetée i si elle est étiquetée i dans $\Theta(W|_{J_n})$ pour un certain n .

Remarque 2.22. * Si $W \in \mathfrak{W}_A(I)$ avec I infini et $m = \Theta(W)$, on peut définir \overline{m}^{**} obtenue en renversant l'orientation et en changeant l'étiquette i en $-i$. On pourrait se demander s'il est possible de définir une carte duale étiquetée m^* . On peut la définir en tant que carte planaire infinie, mais on ne peut pas l'étiqueter par I "dans l'ordre" $\sigma = \text{CP} \circ \text{WC}(W)$ (qui induit l'ordre d'exploration de $\text{DualF}(\Theta(W|_J))$ pour tout intervalle fini $J \subset \mathbb{Z}$). En effet, rien ne garantit que cet ordre total soit isomorphe à I : par exemple, l'ordre total obtenu peut pour certaines marches être isomorphe à \mathbb{Z} en partant de $I = \mathbb{N}$ ou à un ordre ayant un maximum et un minimum en partant de $I = \mathbb{Z}$ (voir figure 11). La carte duale m^* associée à $m = \Theta(W)$ peut donc être définie de manière plus faible comme la donnée de la carte planaire infinie m^* et d'un ordre total sur ses arêtes qui correspond à l'ordre total $\sigma = \text{CP} \circ \text{WC}(W)$ sur I .

3 Étude d'une marche conditionnée à rester dans le quadrant positif

Soit $\overline{W} = (\overline{X}_k, \overline{Y}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur \mathbb{Z}^2 de pas

$$\nu = \frac{1}{2}\delta_{(+1,-1)} + \sum_{i,j \geq 0} 2^{-i-j-3}\delta_{(-i,j)} = \sum_{(k,\ell) \in A} 2^{k-\ell-3}\delta_{(k,\ell)}.$$

On note dans cette section \mathbb{P}_x la loi de cette marche telle que $\overline{W}_0 = x$ (dans les sections suivantes, $\overline{W}_0 = 0$). Remarquons que $-\overline{X}_{k+1} + \overline{X}_k + 2$ et $\overline{Y}_{k+1} - \overline{Y}_k + 2$ suivent des lois géométriques (pas indépendantes) de paramètre $1/2$ (commençant en 1). En particulier, $\mathbb{E}\nu = 0$.

3. Cette définition est équivalente à la simple connexité de l'espace topologique quotient formé du recollement des polygones. En effet, un compact de cet espace est forcément contenu dans un ensemble fini de polygones.

4. L'espace topologique (non compact) associé est d'ailleurs homéomorphe au plan par la classification des surfaces de dimension 2.

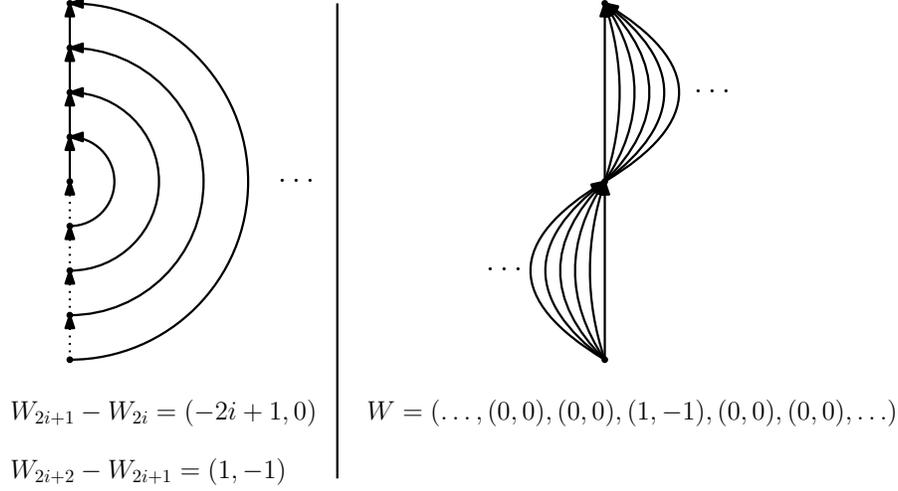


FIGURE 11 – À gauche, la carte associée à une marche W définie sur \mathbb{N} est telle que l'ordre $\sigma = \text{CP} \circ \text{WC}(W)$ est isomorphe à \mathbb{Z} . À droite, la carte associée à une marche W définie sur \mathbb{Z} est telle que l'ordre $\sigma = \text{CP} \circ \text{WC}(W)$ est isomorphe à un ordre infini ayant un maximum et un minimum que l'on peut obtenir en mettant bout à bout deux copies de \mathbb{N} dont la deuxième serait renversée.

Relions tout d'abord cette marche \overline{W} à l'ensemble des marches en tandem \mathcal{W}_n . Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{W}_{A,\text{exc}}^n \subset \mathfrak{W}_A(\llbracket 0, n-1 \rrbracket)$ l'ensemble des marches à valeurs dans \mathbb{N}^2 de longueur n commençant et se terminant en $(0, 0)$ ayant leurs incréments dans A .

Remarque 3.1. *La restriction*

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}_{A,\text{exc}}^{n+2} &\rightarrow \mathcal{W}_n \\ W &\mapsto W|_{\llbracket 1, n \rrbracket} \end{aligned}$$

est bien définie et est une bijection. En effet, si $W \in \mathfrak{W}_{A,\text{exc}}^{n+2}$, puisque la marche est à valeurs dans \mathbb{N}^2 , le premier pas ne peut pas être $(1, -1)$, donc est de la forme $(-i, j)$ avec $i, j \geq 0$. Mais pour rester dans \mathbb{N}^2 , il faut aussi que i soit nul, donc $W_1 = (0, j)$. On raisonne de même pour le dernier pas.

Proposition 3.2. *Conditionnellement à $\{(\overline{W}_k)_{0 \leq k \leq n+1} \in \mathfrak{W}_{A,\text{exc}}^{n+2}\}$, la loi de $(\overline{W}_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ est la loi uniforme sur $\mathfrak{W}_{A,\text{exc}}^{n+2}$ et donc $(\overline{W}_k)_{1 \leq k \leq n}$ est uniforme sur \mathcal{W}_n .*

Démonstration. Soit $w \in \mathfrak{W}_{A,\text{exc}}^{n+2}$. Notons $(-i_k, j_k) = w_k - w_{k-1}$. On a

$$\mathbb{P}((\overline{W}_k)_{0 \leq k \leq n+1} = w) = \prod_{k=1}^{n+1} 2^{-i_k - j_k - 3} = 2^{-3(n+1)}$$

□

Dans le reste de cette section, on étudie les propriétés limites de cette marche, qui nous seront utiles tant pour les résultats de limites locales que pour les résultats de limites d'échelles. Si $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un processus à temps discret, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on note $Z_t = (t - \lfloor t \rfloor)Z_{\lfloor t \rfloor + 1} + (1 - t + \lfloor t \rfloor)Z_{\lfloor t \rfloor}$

l'interpolation linéaire de Z en t . Remarquons que puisque $\text{Var}(\nu) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, par le théorème de Donsker,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \overline{W}_{nt} \right)_{t \in \mathbb{R}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} (\mathcal{W}_t)_{t \in \mathbb{R}},$$

où $(\mathcal{W}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus gaussien (centré) continu à valeurs dans \mathbb{R}^2 de noyau de covariance

$$K(t, s) = \begin{pmatrix} t \wedge s & -\frac{1}{2}(t \wedge s) \\ -\frac{1}{2}(t \wedge s) & t \wedge s \end{pmatrix}.$$

Le processus $(\mathcal{W}_t)_{t \in \mathbb{R}} = (\mathcal{X}_t, \mathcal{Y}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est appelé mouvement brownien bidimensionnel standard de corrélation $-1/2$.

Énonçons quelques propriétés de la marche \overline{W} conditionnée à rester dans le quadrant positif \mathbb{N}^2 qui nous seront très utiles dans cette section ainsi que dans la suivante. La première propriété est un résultat de limite d'échelle :

Proposition 3.3. (cas particulier du théorème 4 de [10]) Soient $x, y \in \mathbb{N}^2$. Alors, dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2)$,

$$\mathbb{P}_x \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} (\overline{W}_{nt})_{0 \leq t \leq 1} \in \cdot \mid \overline{W}([0, n]) \subset \mathbb{N}^2, \overline{W}_n = y \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}(\mathcal{W}_e \in \cdot),$$

où \mathcal{W}_e est un processus continu à valeurs dans \mathbb{R}_+^2 appelé l'excursion d'un brownien bidimensionnel de corrélation $-1/2$ dans le quadrant positif \mathbb{R}_+^2 .

Pour la démontrer, nous allons énoncer deux lemmes qui nous seront très utiles dans la suite. Le premier lemme "déconditionne la loi de la marche privée de son début et de sa fin".

Lemme 3.4. Soit $h : (\mathbb{Z}^2)^{n-2m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soient $x, y \in \mathbb{N}^2$ et m un entier tel que $1 \leq m < n/2$. Alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left(h \left((\overline{W}_{i+m} - \overline{W}_m)_{0 \leq i \leq n-2m} \right) \mid \overline{W}([0, n]) \subset \mathbb{N}^2 \text{ et } \overline{W}_n = y \right) \\ &= \mathbb{E}_0 \left(h \left((\overline{W}_i)_{0 \leq i \leq n-2m} \right) \alpha_{n,m}^{x,y} \left(- \inf_{i \in [0, n-2m]} \overline{W}_i, \overline{W}_{n-2m} \right) \right) \end{aligned}$$

où

$$\alpha_{n,m}^{x,y}(a, b) = \sum_{\substack{z \in \mathbb{N}^2 \\ z-a \in \mathbb{N}^2}} \frac{\mathbb{P}_x(\overline{W}_m = z, \overline{W}([0, m]) \subset \mathbb{N}^2) \mathbb{P}_y(\overline{W}_m = \hat{z} + \hat{b}, \overline{W}([0, m]) \subset \mathbb{N}^2)}{\mathbb{P}_x(\overline{W}_n = y, \overline{W}([0, n]) \subset \mathbb{N}^2)}$$

en notant, pour tout $z \in \mathbb{R}^2$, \hat{z} le point obtenu en échangeant les deux coordonnées de z et en notant pour toute famille $(W_i)_{i \in I} = (X_i, Y_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}^2)^I$, $\inf_{i \in I} W_i = (\inf_{i \in I} X_i, \inf_{i \in I} Y_i)$.

Démonstration. Munissons \mathbb{Z}^2 de l'ordre coordonnée par coordonnée : $(x, y) \leq (z, t) \iff x \leq z$ et $y \leq t$. On réécrit l'évènement

$$\begin{aligned} \{ \overline{W}([0, n]) \subset \mathbb{N}^2 \text{ et } \overline{W}_n = y \} &= \{ \overline{W}_m + \inf_{m \leq i \leq n-m} (\overline{W}_i - \overline{W}_m) \geq (0, 0) \} \\ &\cap \{ \inf_{0 \leq i \leq m} \overline{W}_i \geq (0, 0) \} \\ &\cap \{ \inf_{0 \leq i \leq m} (\overline{W}_{n-i} - \overline{W}_n + y) \geq (0, 0) \} \\ &\cap \{ \overline{W}_{n-m} - \overline{W}_n + y = \overline{W}_m + (\overline{W}_{n-m} - \overline{W}_m) \}. \end{aligned}$$

Puis on décompose selon la valeur de \overline{W}_m , ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\overline{W}(\llbracket 0, n \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2 \text{ et } \overline{W}_n = y} &= \sum_{\substack{z \in \mathbb{N}^2 \\ z + \inf_{m \leq i \leq n-m} (\overline{W}_i - \overline{W}_m) \geq (0,0)}} \mathbf{1}_{\overline{W}_m = z} \times \mathbf{1}_{\inf_{0 \leq i \leq m} \overline{W}_i \geq (0,0)} \\ &\quad \times \mathbf{1}_{\inf_{0 \leq i \leq m} (\overline{W}_{n-i} - \overline{W}_n + y) \geq (0,0)} \times \mathbf{1}_{(\overline{W}_{n-m} - \overline{W}_n + y) = z + (\overline{W}_{n-m} - \overline{W}_m)}. \end{aligned}$$

Mais par indépendance des incréments de la marche, on isole dans l'expression ci-dessus trois groupes de v.a. indépendants : celles qui dépendent de $\overline{W}_i - \overline{W}_m$ pour $i \in \llbracket m, n-m \rrbracket$, celles qui dépendent de \overline{W}_i pour $i \leq m$ et celles qui dépendent de $\overline{W}_{n-i} - \overline{W}_n$ pour $i \leq m$. Donc

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_x \left(\overline{W}(\llbracket 0, n \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2 \text{ et } \overline{W}_n = y \mid (\overline{W}_{i+m} - \overline{W}_m)_{0 \leq i \leq n-2m} \right) \\ &= \sum_{\substack{z \in \mathbb{N}^2 \\ z + \inf_{m \leq i \leq n-m} (\overline{W}_i - \overline{W}_m) \geq (0,0)}} \mathbb{P}_x(\overline{W}_m = z \text{ et } \overline{W}(\llbracket 0, m \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2) \\ &\quad \times \mathbb{P}_x \left(\forall i \leq m, \overline{W}_{n-i} - \overline{W}_n + y \in \mathbb{N}^2 \text{ et } \overline{W}_{n-m} - \overline{W}_n + y = z + (\overline{W}_{n-m} - \overline{W}_m) \mid (\overline{W}_{i+m} - \overline{W}_m)_{0 \leq i \leq n-2m} \right). \end{aligned}$$

Mais dans la probabilité de droite, $\overline{W}_{n-m} - \overline{W}_m$ est une fonction de $(\overline{W}_{i+m} - \overline{W}_m)_{0 \leq i \leq n-2m}$ et le reste est indépendant. De plus, la marche $(\overline{W}_{n-i} - \overline{W}_n)_{0 \leq i \leq n}$ a pour pas $\nu(-x, -y) = \nu(y, x)$ donc a même loi que $(\widehat{W}_i)_{0 \leq i \leq m}$ issue de 0. Ainsi, $(\overline{W}_{n-i} - \overline{W}_n + y)_{0 \leq i \leq m}$ a même loi que $(\widehat{W}_i)_{0 \leq i \leq n}$ issue de y . On peut donc écrire pour tout $b \in \mathbb{Z}^2$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_x \left(\forall i \leq m, \overline{W}_{n-i} - \overline{W}_n + y \in \mathbb{N}^2 \text{ et } \overline{W}_{n-m} - \overline{W}_n + y = z + b \right) \\ &= \mathbb{P}_y \left(\forall i \leq m, \widehat{W}_i \in \mathbb{N}^2 \text{ et } \widehat{W}_m = z + b \right) \\ &= \mathbb{P}_y \left(\overline{W}(\llbracket 0, m \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2 \text{ et } \overline{W}_m = \hat{z} + \hat{b} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, par définition de $\alpha_{n,m}^{x,y}$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_x \left(\overline{W}(\llbracket 0, n \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2 \text{ et } \overline{W}_n = y \mid (\overline{W}_{i+m} - \overline{W}_m)_{0 \leq i \leq n-2m} \right) \\ &= \mathbb{P}_x \left(\overline{W}_n = y \text{ et } \overline{W}(\llbracket 0, n \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2 \right) \alpha_{n,m}^{x,y} \left(- \inf_{0 \leq i \leq n-2m} \widetilde{W}_i, \widetilde{W}_{n-2m} \right) \end{aligned}$$

où $\widetilde{W}_i = \overline{W}_{i+m} - \overline{W}_m$, ce qui conclut. \square

Le deuxième lemme montre quant à lui la convergence uniforme de la fonction $\alpha_{n,[n\varepsilon]}^{x,y}$ à un changement d'échelle près.

Lemme 3.5. Soient $x, y \in \mathbb{N}^2$, soit $\varepsilon \in]0, 1/2[$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\substack{a \in \mathbb{N}^2 \\ b \in \mathbb{Z}^2}} \left| \alpha_{n,[n\varepsilon]}^{x,y}(a, b) - \alpha_\varepsilon \left(\frac{a}{\sqrt{2n}}, \frac{b}{\sqrt{2n}} \right) \right| = 0$$

où $\alpha_\varepsilon : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction continue bornée définie par

$$\alpha_\varepsilon(a, b) = \frac{\sqrt{3}}{8\varepsilon^5} \int_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \\ x \geq a}} g \left(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}} \right) g \left(\frac{x+b}{\sqrt{2\varepsilon}} \right) dx \quad (3.1)$$

où $g(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} x_1 x_2 (x_1 + x_2) e^{-\frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)}$.

Pour montrer ce lemme on va utiliser les estimations ci-dessous (admisses) :

Lemme 3.6. (propositions 8.2, 8.3 et 8.6 de [7]⁵) Soit $x \in \mathbb{N}^2$. Il existe une fonction $V : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\mathbb{P}_x(\overline{W}(\llbracket 0, n \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\sqrt{\pi}} V(x) n^{-3/2}, \quad (3.2)$$

$$\delta_1(x, n) := \sup_{y \in \mathbb{N}^2} \left| n^{5/2} \mathbb{P}_x(\overline{W}_n = y, \overline{W}(\llbracket 0, n \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2) - \frac{V(x)}{8\sqrt{\pi}} g\left(\frac{y}{\sqrt{2n}}\right) \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (3.3)$$

et

$$\mathbb{P}_x(\overline{W}_n = y \text{ et } \overline{W}(\llbracket 0, n \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2) \sim \frac{1}{8\sqrt{3\pi}} \frac{V(x)V(\hat{y})}{n^4}. \quad (3.4)$$

Démonstration du lemme 3.5. On note $m = \lfloor n\varepsilon \rfloor$. Considérons $\alpha_{n,m}^{x,y}(a, b)$. Par (3.4), on voit que le dénominateur, qui ne dépend pas de a et b , est équivalent à

$$\frac{1}{8\sqrt{3\pi}} \frac{V(x)V(\hat{y})}{n^4}.$$

Regardons le numérateur. On coupe la somme selon si $|z| > t\sqrt{n}$ ou non pour $t > 0$. Le reste de la somme est majoré par

$$R_n := \sum_{|z| > t\sqrt{n}} \mathbb{P}_x(\overline{W}_m = z \text{ et } \overline{W}(\llbracket 0, m \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2) \mathbb{P}_{\hat{y}}(\overline{W}_m = \hat{z} + \hat{b} \text{ et } \overline{W}(\llbracket 0, m \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2)$$

Mais d'une part

$$\mathbb{P}_{\hat{y}}(\overline{W}_m = \hat{z} + \hat{b} \text{ et } \overline{W}(\llbracket 0, m \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2) \leq \frac{\sup_k \delta_1(\hat{y}, k)}{m^{5/2}} + \frac{V(\hat{y}) \sup_{\mathbb{R}_+^2} g}{8\sqrt{\pi} m^{5/2}} \leq \frac{C(y, \varepsilon)}{n^{5/2}},$$

d'autre part,

$$\mathbb{P}_x(\overline{W}_m = z \text{ et } \overline{W}(\llbracket 0, m \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2) = \mathbb{P}_x(\overline{W}_m = z | \overline{W}(\llbracket 0, m \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2) \mathbb{P}_x(\overline{W}(\llbracket 0, m \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2)$$

et $\mathbb{P}_x(\overline{W}(\llbracket 0, m \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2)$ ne dépend pas de z et est équivalent par (3.2) à $\frac{1}{4\sqrt{\pi}} V(x) m^{-3/2}$. Donc

$$\begin{aligned} R_n &\leq C(x, y, \varepsilon) n^{-3/2} n^{-5/2} \sum_{|z| > t\sqrt{n}} \mathbb{P}_x(\overline{W}_m = z | \overline{W}(\llbracket 0, m \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2) \\ &= C(x, y, \varepsilon) n^{-4} \mathbb{P}_x(|\overline{W}_{\lfloor n\varepsilon \rfloor}| > t\sqrt{n} | \overline{W}(\llbracket 0, \lfloor n\varepsilon \rfloor \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2) \end{aligned}$$

Mais par un théorème central limite sur la marche \overline{W} conditionnée à rester dans \mathbb{N}^2 (proposition 8.5 de [7]), on a la convergence étroite de mesures de probabilité

$$\mathbb{P}_x \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \overline{W}_n \in \cdot \mid \overline{W}(\llbracket 0, n \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(u, v) \mathbf{1}_{u, v \geq 0} du dv.$$

Ainsi, en notant

$$\delta_2(x, y, \varepsilon, n, t) = C(x, y, \varepsilon) \mathbb{P}_x(|\overline{W}_{\lfloor n\varepsilon \rfloor}| > t\sqrt{n} | \overline{W}(\llbracket 0, \lfloor n\varepsilon \rfloor \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2),$$

5. Ces résultats sont aussi prouvés sans les constantes explicites mais dans un contexte plus général dans [9]

on a $n^4 R_n \leq \delta_2(x, y, \varepsilon, n, t)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \delta_2(x, y, \varepsilon, n, t) = 0$.

Posons maintenant

$$B_n = \sum_{\substack{z \in \mathbb{N}^2 \\ z-a \in \mathbb{N}^2 \text{ et } |z| \leq t\sqrt{n}}} \mathbb{P}_x(\overline{W}_m = z \text{ et } \overline{W}([0, m]) \subset \mathbb{N}^2) \mathbb{P}_{\hat{y}}(\overline{W}_m = \hat{z} + \hat{b} \text{ et } \overline{W}([0, m]) \subset \mathbb{N}^2).$$

En utilisant deux fois (3.3) et que g est bornée,

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{m^5} \frac{V(x)V(\hat{y})}{(8\sqrt{\pi})^2} \sum_{\substack{z \in \mathbb{N}^2 \\ z-a \in \mathbb{N}^2 \text{ et } |z| \leq t\sqrt{n}}} g\left(\frac{z}{\sqrt{2\varepsilon n}}\right) g\left(\frac{\hat{z} + \hat{b}}{\sqrt{2\varepsilon n}}\right) \\ &\quad + O(1)(t\sqrt{n})^2 \frac{1}{m^5} (\delta_1(x, m) + \delta_1(\hat{y}, m)) \end{aligned}$$

où le $O(1)$ ne dépend que de n (et pas de t) et le $(t\sqrt{n})^2$ vient de la majoration du nombre de termes dans la somme.

Finalement, comme

$$|\mathbb{P}_x(\overline{W}_n = y \text{ et } \overline{W}([0, n]) \subset \mathbb{N}^2) \alpha_{n, [\varepsilon n]}^{x, y}(a, b) - B_n| \leq R_n,$$

et puisque $\delta_1(x, [\varepsilon n]) \rightarrow 0$, $\delta_1(\hat{y}, [\varepsilon n]) \rightarrow 0$, on a

$$\alpha_{n, [\varepsilon n]}^{x, y}(a, b) = O(1)n^4 R_n + o(1) + \frac{1}{\varepsilon^5 n} \frac{8\sqrt{3}\pi + o(1)}{(8\sqrt{\pi})^2} \sum_{\substack{z \in \mathbb{N}^2 \\ z-a \in \mathbb{N}^2 \text{ et } |z| \leq t\sqrt{n}}} g\left(\frac{z}{\sqrt{2\varepsilon n}}\right) g\left(\frac{z+b}{\sqrt{2\varepsilon n}}\right)$$

(les chapeaux disparaissent dans g car g est symétrique). On utilise ensuite l'uniforme continuité de g et le fait que le nombre de points au bord du disque est de l'ordre de $\sqrt{n} = o(n)$ (et que g est bornée) pour remplacer la somme par une intégrale. Enfin en effectuant le changement de variable $w = \frac{z}{\sqrt{n}}$,

$$\alpha_{n, [\varepsilon n]}^{x, y}(a, b) = O(1)n^4 R_n + o(1) + \frac{1}{\varepsilon^5} \frac{\sqrt{3} + o(1)}{8} \int_{w \geq \frac{a}{\sqrt{n}} \text{ et } |w| \leq t} g\left(\frac{w}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) g\left(\frac{w + \frac{b}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) dw$$

Tous les termes d'erreur sont uniformes en a et b et seul le premier $o(1)$ dépend de t . Or

$$\alpha_\varepsilon\left(\frac{a}{\sqrt{n}}, \frac{b}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8\varepsilon^5} \int_{w \geq \frac{a}{\sqrt{n}}} g\left(\frac{w}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) g\left(\frac{w + \frac{b}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) dw.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| \alpha_{n, [\varepsilon n]}^{x, y}(a, b) - \alpha_\varepsilon\left(\frac{a}{\sqrt{n}}, \frac{b}{\sqrt{n}}\right) \right| &= O(1)n^4 R_n + o(1) + O(1) \int_{|w| > t} g\left(\frac{w}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) g\left(\frac{w + \frac{b}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) dw \\ &= O(1)n^4 R_n + o(1) + O(1) \int_{|w| > t} g\left(\frac{w}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) dw \end{aligned}$$

où les $O(1)$ ne dépendent pas de t . On fait donc d'abord tendre n vers l'infini, puis t vers l'infini. \square

Il ne reste plus beaucoup de travail pour démontrer la proposition 3.3 :

Démonstration de la proposition 3.3. Par les lemmes 3.4 et 3.5, si $h : \mathcal{C}([0, 1 - 2\varepsilon], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left(h \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} (\overline{W}_{nt + [n\varepsilon]} - \overline{W}_{[n\varepsilon]})_{0 \leq t \leq 1 - 2\varepsilon} \right) \middle| \overline{W}([0, n]) \subset \mathbb{N}^2 \text{ et } \overline{W}_n = y \right) \\ &= \mathbb{E}_0 \left(h \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \overline{W}_{nt} \right)_{0 \leq t \leq 1 - 2\varepsilon} \right) \alpha_{n, [n\varepsilon]}^{x, y} \left(- \inf_{0 \leq i \leq n - 2[n\varepsilon]} \overline{W}_i, \overline{W}_{n - 2[n\varepsilon]} \right) \right) \\ &= \mathbb{E}_0 \left(h \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \overline{W}_{nt} \right)_{0 \leq t \leq 1 - 2\varepsilon} \right) \alpha_\varepsilon \left(- \inf_{0 \leq t \leq 1 - 2\varepsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \overline{W}_{nt} \right) + \eta_n, \frac{1}{\sqrt{2n}} \overline{W}_{n(1 - 2\varepsilon)} + \delta_n \right) \right) \\ &+ o(1), \end{aligned}$$

où le $o(1)$ vient du lemme 3.5 et où $\delta_n, \eta_n \rightarrow 0$ p.s. par le fait que $(1/\sqrt{n}) \max_{1 \leq i \leq n} (|X_i - X_{i-1}| + |Y_i - Y_{i-1}|) \rightarrow 0$ p.s. (par exemple parce que la loi géométrique de paramètre $1/2$ admet un moment d'ordre 4). On applique ensuite Donsker pour conclure que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left(h \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} (\overline{W}_{nt + [n\varepsilon]} - \overline{W}_{[n\varepsilon]})_{0 \leq t \leq 1 - 2\varepsilon} \right) \middle| \overline{W}([0, n]) \subset \mathbb{N}^2 \text{ et } \overline{W}_n = y \right) \\ & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(h(\mathcal{W}|_{[0, 1 - 2\varepsilon]}) \alpha_\varepsilon \left(- \inf_{[0, 1 - 2\varepsilon]} \mathcal{W}, \mathcal{W}_{1 - 2\varepsilon} \right) \right). \end{aligned}$$

Par un calcul d'intégrales, on vérifie que $\mathbb{E}(\alpha_\varepsilon(-\inf_{[0, 1 - 2\varepsilon]} \mathcal{W}, \mathcal{W}_{1 - 2\varepsilon})) = 1$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on a la convergence en loi désirée sur $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. De plus, puisque $x/\sqrt{2n} \rightarrow 0$ et $y/\sqrt{2n} \rightarrow 0$, on a la convergence des fini-dimensionnelles. Reste la tension sur $[0, 1]$ tout entier. Pour l'obtenir, il suffit par les critères usuels de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\delta > 0$, il existe $\eta > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$\mathbb{P}_x \left(\sup_{t \in [0, \eta]} \frac{1}{\sqrt{2n}} |\overline{W}_{nt} - \overline{W}_0| \geq \delta \text{ ou } \sup_{t \in [1 - \eta, 1]} \frac{1}{\sqrt{2n}} |\overline{W}_{nt} - \overline{W}_n| \geq \delta \middle| \overline{W}([0, n]) \subset \mathbb{N}^2 \text{ et } \overline{W}_n = y \right) \leq \varepsilon.$$

Par retournement du temps, il suffit se concentrer sur l'intervalle $[0, \eta]$. Nous ne détaillerons pas la fin de la preuve (on n'a détaillé que les étapes de la preuve qui seront utiles dans la suite). On renvoie notamment à [10] pour une preuve complète dans un cadre plus général. \square

Un corollaire de la preuve ci-dessus est un résultat d'absolue continuité de la loi de $\mathcal{W}_e|_{[\varepsilon, 1 - \varepsilon]} - \mathcal{W}_e(\varepsilon)$ par rapport à celle de \mathcal{W} .

Corollaire 3.7. *Pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute fonction $h : \mathcal{C}([0, 1 - 2\varepsilon], \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable,*

$$\mathbb{E} h((\mathcal{W}_e(\varepsilon + t) - \mathcal{W}_e(\varepsilon))_{0 \leq t \leq 1 - 2\varepsilon}) = \mathbb{E} \left(h(\mathcal{W}|_{[0, 1 - 2\varepsilon]}) \alpha_\varepsilon \left(- \inf_{[0, 1 - 2\varepsilon]} \mathcal{W}, \mathcal{W}_{1 - 2\varepsilon} \right) \right).$$

4 Limites locales

4.1 Les objets limites et quelques unes de leurs propriétés

On a déjà introduit un premier objet : la marche \overline{W} . Ici, et dans toute la suite, $\overline{W}_0 = 0$ et on étend l'espace de temps à \mathbb{Z} tout entier. On a notamment vu dans la proposition 3.2 qu'en

conditionnant cette marche de façon appropriée, $(\overline{W}_t)_{1 \leq t \leq n}$ était uniforme sur \mathcal{W}_n , ce qui donne un avant-goût de son rôle de limite locale. Étudions ici $\overline{Z} = \text{WC}(\overline{W})$, $\overline{\sigma} = \text{CP}(\overline{Z})$ et $\overline{m} = \Theta(\overline{W})$ les objets aléatoires associés à \overline{W} .

Proposition 4.1. *Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\overline{Z}^{(t)}$ a la loi d'une marche aléatoire commencée en 0 au temps t de même pas que \overline{Y} (c'est à dire $\mathcal{G}(1/2) - 2$).*

Remarque 4.2. *Pourtant, les incréments d'une marche de \overline{Z} ne sont pas toujours égaux à ceux de $-\overline{X}$ ou \overline{Y} (quand la marche passe de négative à positive).*

Démonstration. Soit $k \geq t$. Par construction, $(\overline{Z}_s^{(t)})_{t \leq s \leq k}$ est une fonction mesurable de $(\overline{W}_s)_{t \leq s \leq k}$.

Donc $\overline{W}_{k+1} - \overline{W}_k$ est indépendant de $(\overline{Z}_s^{(t)})_{t \leq s \leq k}$. Mais on peut écrire

$$\overline{W}_{k+1} - \overline{W}_k = B(1, -1) + (1 - B)(-U, V)$$

où $B \sim \mathcal{B}(1/2)$ et $U + 1, V + 1 \sim \mathcal{G}(1/2)$ sont indépendantes et indépendantes de $(\overline{Z}_s^{(t)})_{t \leq s \leq k}$. Mais par définition de \overline{Z} , on a

$$\overline{Z}_{k+1}^{(t)} - \overline{Z}_k^{(t)} = \underbrace{-B}_{\overline{W}_{k+1} - \overline{W}_k = (1, -1)} + (1 - B) \left(\underbrace{\mathbf{1}_{\overline{Z}_k^{(t)} \geq 0} V}_{\text{varie comme } \overline{Y}} + \mathbf{1}_{\overline{Z}_k^{(t)} < 0} \left(\underbrace{U \mathbf{1}_{U < -\overline{Z}_k^{(t)}}}_{\text{varie comme } -\overline{X}} + \underbrace{(V - \overline{Z}_k^{(t)}) \mathbf{1}_{U \geq -\overline{Z}_k^{(t)}}}_{\text{rejoint } \overline{Z}^{(k)} \text{ en } V} \right) \right)$$

Ainsi, conditionnellement à $(\overline{Z}_s^{(t)})_{t \leq s \leq k}$,

$$\overline{Z}_{k+1}^{(t)} - \overline{Z}_k^{(t)} = \begin{cases} -B + (1 - B)V & \text{si } \overline{Z}_k^{(t)} \geq 0 \\ -B + (1 - B)(U \mathbf{1}_{U < q} + (V + q) \mathbf{1}_{U \geq q}) & \text{si } \overline{Z}_k^{(t)} = -q < 0. \end{cases}$$

Mais par l'absence de mémoire de la loi géométrique, $U \mathbf{1}_{U < q} + (V + q) \mathbf{1}_{U \geq q}$ a même loi que V quel que soit $q \geq 0$. Ainsi, conditionnellement à $(\overline{Z}_s^{(t)})_{t \leq s \leq k}$, la loi de $\overline{Z}_{k+1}^{(t)} - \overline{Z}_k^{(t)}$ est la loi de $-B + (1 - B)V$. \square

Considérons maintenant \overline{m} .

Proposition 4.3. *Presque sûrement \overline{m} est une carte planaire infinie dont les arêtes sont étiquetées par \mathbb{Z} .*

Démonstration. Déjà, \overline{m} est p.s. une quasi-carte infinie puisque la marche a p.s. un nombre infini de pas de la forme $(-i, j)$ et donc \overline{m} a un nombre infini de polygones. Il faut maintenant vérifier qu'elle est localement finie, simplement connexe et sans frontière.

Pour la finitude locale, soit $i \in \mathbb{Z}$ l'indice d'une arête e de \overline{m} (les arêtes non étiquetées ne sont pas importantes pour la finitude locale car chaque sommet n'est relié qu'à au plus deux arêtes non étiquetées, on verra même ensuite que p.s. toutes les arêtes sont explorées). Soit $j \geq i$ le plus petit indice (aléatoire) tel que $\overline{Z}_j^{(i)} = 0$ et $\overline{Z}_{j+1}^{(i)} < 0$ et soit $s \geq j + 1$ le plus petit indice (aléatoire) tel que $\overline{Z}_s^{(i)} \geq 0$. Ces deux indices existent p.s. car \overline{Y} est récurrente. Ainsi, par le corollaire 2.16, le nombre d'arêtes sortant de e est d'au plus $s - j - 1$ dans toutes les sous-cartes finies de la forme $\Theta(\overline{W}|_I)$

pour I intervalle fini de \mathbb{Z} et donc aussi pour \bar{m} . Pour les arêtes entrantes, il suffit de considérer la quasi-carte \bar{m}^{**} obtenue en renversant l'orientation et de remarquer que $\bar{m}^{**} = \Theta \left(\overleftarrow{\bar{W}} \right)$, où $\overleftarrow{\bar{W}} = (\bar{Y}_{-t}, \bar{X}_{-t})_{t \in \mathbb{Z}}$ (cela se vérifie facilement par la définition comme limite projective). Mais $\nu(-i, j) = \nu(-j, i)$ pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, donc \bar{m}^{**} a même loi que \bar{m} . Ainsi, presque sûrement, le nombre d'arêtes entrant dans e dans \bar{m} est fini. Comme il y a un nombre dénombrable d'arêtes, p.s. pour toute arête le nombre d'arêtes sortantes et entrantes est p.s. fini. Mais comme la marche est récurrente, tout sommet admet une arête entrante et une arête sortante explorées (en effet, si on se donne un sommet v qui n'ait par exemple pas d'arête entrante, alors il est sur les deux frontières de toute sous-carte finie où il apparaît. Mais comme la marche est récurrente, il existe un sommet parcouru après lui de hauteur relative strictement inférieure, contradiction). Ainsi, \bar{m} est p.s. localement finie.

Pour la frontière, vérifions déjà que p.s. il n'y a pas d'arête inexplorée. Quitte à regarder \bar{m}^{**} , il suffit de montrer qu'il n'y a pas d'arête restant inexplorée sur la frontière droite. Supposons donc que dans $\Theta(\bar{W}|_{\llbracket -i, i \rrbracket})$ il y ait h arêtes inexplorées au dessus de l'arête active e_i . Mais par la récurrence de la marche $-\bar{Y}$ (et car $-\bar{Y}$ ne monte que par pas de $+1$), il existe un temps $j > i$ tel que $-\bar{Y}_j + \bar{Y}_i = h$. Mais, pour $t \in \llbracket i, j \rrbracket$, $-\bar{Y}_t + \bar{Y}_i - h$ est la hauteur de l'arête active e_t relativement au puits. Celle-ci s'annule en $t = j$, donc toutes les arêtes inexplorées au dessus de e_i ont été explorées. Ainsi, toutes les arêtes sont étiquetées. Soit maintenant $i \in \mathbb{Z}$ l'indice de $e_i \in \bar{m}$ et $j > i$ le plus petit indice tel que $\bar{Z}_j^{(i)} = 0$ (qui existe p.s. par récurrence de la marche. Alors en notant $m = \Theta(\bar{W}|_{\llbracket i, j \rrbracket})$, l'arête e_i^* est fille de l'arête e_j^* dans $\text{DualF}(m)$ donc il y a une face à droite de e_i . En regardant \bar{m}^{**} , on voit aussi que e_i admet une face à gauche. Ainsi, p.s. \bar{m} est sans frontière.

Enfin, la simple connexité est triviale puisque par définition de \bar{m} , toute sous-carte finie de \bar{m} est incluse dans une carte plane de la forme $\Theta(\bar{W}|_J)$ où J est un intervalle fini de \mathbb{Z} . \square

4.2 Topologies locales

Les résultats limites locaux concernent la carte vue autour d'une arête fixée, ou la marche vue depuis un temps fixé... On doit donc introduire les notions de marche enracinée, de processus de marches coalescentes enraciné, de permutation enracinée et de carte enracinée. On pose donc

$$\widetilde{\mathfrak{W}}_{\bullet} = \bigsqcup_{I \ni 0} \mathfrak{W}(I), \quad \widetilde{\mathfrak{C}}_{\bullet} = \bigsqcup_{I \ni 0} \mathfrak{C}(I), \quad \widetilde{\mathfrak{S}}_{\bullet} = \bigsqcup_{I \ni 0} \mathfrak{S}(I).$$

La taille d'un objet (notée $|\cdot|$) de $\widetilde{\mathfrak{W}}_{\bullet}, \widetilde{\mathfrak{C}}_{\bullet}$ ou $\widetilde{\mathfrak{S}}_{\bullet}$ est définie comme la taille de l'intervalle I sur lequel il est défini. Si $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, \mathfrak{W}_{\bullet}^n est l'ensemble des marches enracinées de taille n . On définit de même \mathfrak{C}_{\bullet}^n et \mathfrak{S}_{\bullet}^n . On note aussi $\mathfrak{W}_{\bullet}, \mathfrak{C}_{\bullet}$ et \mathfrak{S}_{\bullet} les ensembles d'objets de taille finie. On a les identifications suivantes qui montrent en quoi les objets définis ci-dessus sont bien des objets

"enracinés" :

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{W}_n \times \llbracket 1, n \rrbracket & \longrightarrow & \mathfrak{W}_\bullet^n \\
(W, i) & \mapsto & (W_{i+t})_{t \in \llbracket -i+1, n-i \rrbracket} \in \mathfrak{W}(\llbracket -i+1, n-i \rrbracket) \\
\\
\mathcal{C}_n \times \llbracket 1, n \rrbracket & \longrightarrow & \mathfrak{C}_\bullet^n \\
(Z, i) & \mapsto & (Z_{i+t}^{(i+s)})_{s,t \in \llbracket -i+1, n-i \rrbracket} \in \mathfrak{C}(\llbracket -i+1, n-i \rrbracket) \\
\\
\mathcal{S}_n \times \llbracket 1, n \rrbracket & \longrightarrow & \mathfrak{S}_\bullet^n \\
(\sigma, i) & \mapsto & \preceq_{\sigma, i} \in \mathfrak{S}(\llbracket -i+1, n-i \rrbracket)
\end{array}$$

où $\preceq_{\sigma, i}$ est défini par $\ell \preceq_{\sigma, i} j \iff \sigma(\ell + i) \leq \sigma(j + i)$. Les deux premières identifications ne sont que des injections tandis que la troisième est une bijection. Munissons les espaces $\widetilde{\mathfrak{W}}_\bullet$, $\widetilde{\mathfrak{C}}_\bullet$ et $\widetilde{\mathfrak{S}}_\bullet$ d'une topologie. Pour cela, si $h \in \mathbb{N}^*$, notons r_h la fonction qui à un objet défini sur un intervalle entier I associe sa restriction à l'intervalle $I \cap \llbracket -h, h \rrbracket$. La fonction r_h est donc définie de $\widetilde{\mathfrak{W}}_\bullet$, $\widetilde{\mathfrak{C}}_\bullet$ et $\widetilde{\mathfrak{S}}_\bullet$ à valeurs dans \mathfrak{W}_\bullet , \mathfrak{C}_\bullet et \mathfrak{S}_\bullet . Les distances locales sur $\widetilde{\mathfrak{W}}_\bullet$, $\widetilde{\mathfrak{C}}_\bullet$ et $\widetilde{\mathfrak{S}}_\bullet$ sont définies par

$$d(\square_1, \square_2) = 2^{-\sup\{h \geq 1; r_h(\square_1) = r_h(\square_2)\}}$$

où par convention $\sup \emptyset = 0$, $\sup \mathbb{N}^* = \infty$ et $2^{-\infty} = 0$. Autrement dit, deux objets sont proches si les restrictions autour de leur racine coïncident le plus loin possible.

Proposition 4.4. *L'espace métrique $(\widetilde{\mathfrak{S}}_\bullet, d)$ est compact.*

Démonstration. Soit \leq_n une suite de $\widetilde{\mathfrak{S}}_\bullet$. Comme \mathfrak{S}_\bullet^h est fini pour tout $h \in \mathbb{N}^*$ on extrait pour tout $h \in \mathbb{N}^*$ des sous suites telles que pour tout $h \geq 1$,

$$r_h(\leq_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_h(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \preceq_h$$

Puis on remarque que si $h \geq k$, alors $r_k(\preceq_h) = \preceq_k$. On définit alors \preceq comme la limite projective des \preceq_h ($i \preceq j$ si $i \preceq_h j$ pour un certain h). Alors $\preceq_h = r_h(\preceq)$. On conclut par extraction diagonale. \square

Proposition 4.5. *Les espaces métriques $\widetilde{\mathfrak{W}}_\bullet$ et $\widetilde{\mathfrak{C}}_\bullet$ sont polonais mais non compacts.*

Démonstration. La séparabilité est immédiate par densité des ensembles dénombrables \mathfrak{W}_\bullet et \mathfrak{C}_\bullet . Montrons maintenant la complétude pour $\widetilde{\mathfrak{W}}_\bullet$ (le même raisonnement fonctionne pour $\widetilde{\mathfrak{C}}_\bullet$). Soit (W_n) une suite de Cauchy. Alors pour tout $h \geq 1$, $r_h(W_n)$ stationne en un certain W^h . Remarquons que forcément si $h \geq k$, $W^k = r_k(W^h)$. On définit alors W comme la limite projective des W^h . Alors pour tout $h \geq 1$, $r_h(W_n)$ stationne en $W^h = r_h(W)$. Donc $W_n \rightarrow W$. Enfin, \mathfrak{W}_\bullet est non compact puisque $((0, 0), (-i, j))_{i, j \geq 0}$ est une famille qui n'admet pas de sous-suite convergente (on en trouve facilement une analogue pour $\widetilde{\mathfrak{C}}_\bullet$). \square

Proposition 4.6. *Les applications $WC : \widetilde{\mathfrak{W}}_\bullet \rightarrow \widetilde{\mathfrak{C}}_\bullet$ et $CP : \widetilde{\mathfrak{C}}_\bullet \rightarrow \widetilde{\mathfrak{S}}_\bullet$ sont 1-lipschitziennes.*

Démonstration. Par définition de WC (définie pas à pas) et CP (l'ordre relatif de $i < j$ ne dépend que de $Z_j^{(i)}$), on a $r_h \circ WC = WC \circ r_h$ et $r_h \circ CP = CP \circ r_h$. Donc

$$r_h(W) = r_h(W') \implies r_h(WC(W)) = r_h(WC(W')).$$

De même pour CP . \square

Proposition 4.7. * Si $i \leq j$ sont deux entiers relatifs, l'application $Z \mapsto L_Z^{(i)}(j)$ de $\tilde{\mathfrak{C}}_\bullet$ dans \mathbb{N} définie par $L_Z^{(i)}(j) = \#\{k \in \llbracket i, j \rrbracket; Z_k^{(i)} = 0\}$ (temps local discret de la marche $Z^{(i)}$ en zéro de l'instant i à l'instant j) est continue.

Démonstration. C'est évident puisque le temps local ne dépend que de $r_h(Z)$ pour $h = \max(|i|, |j|)$. \square

Proposition 4.8. * Si $W = (X, Y) \in \mathfrak{W}_A(I)$ avec $I \ni 0$, notons $\overleftarrow{I} = \{-i; i \in I\}$ et $\overleftarrow{W} \in \mathfrak{W}_A(\overleftarrow{I})$ la marche définie par $\overleftarrow{W}_{-i} = (Y_i, X_i)$. Alors l'application de \mathfrak{M}_\bullet dans lui-même qui à W associe \overleftarrow{W} est une isométrie. Si $W \in \widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$, on pose aussi $\overleftarrow{Z} = \text{WC}(\overleftarrow{W})$. Alors $W \mapsto \overleftarrow{Z}$ est 1-lipschitzienne de $\widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$ dans $\tilde{\mathfrak{C}}_\bullet$ comme composition d'applications 1-lipschitziennes.

Démonstration. Cela vient du fait que $r_h(\overleftarrow{W}) = \overleftarrow{r_h(W)}$. \square

Dans le cas des cartes la théorie est légèrement différente de celle présentée auparavant. Pour un intervalle entier I , on note $\mathfrak{M}(I)$ l'ensemble des cartes planaires orientées (c'est-à-dire dont chaque arête est orientée) dont les arêtes sont étiquetées par I (ce n'est pas du tout l'ensemble $\mathfrak{m}(I)$ utilisé dans la section précédente puisque l'étiquetage ne suit pas forcément l'exploration). On note

$$\mathfrak{M}_\bullet = \bigsqcup_{\substack{I \ni 0 \\ |I| < \infty}} \mathfrak{M}(I).$$

L'arête étiquetée par 0 est appelée la racine. La taille d'un objet est toujours la taille de l'intervalle sur lequel il est défini. On note \mathfrak{M}_\bullet^n l'ensemble des cartes planaires orientées étiquetées par un intervalle entier de taille n contenant zéro. On a l'identification (bijective)

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\llbracket 1, n \rrbracket) \times \llbracket 1, n \rrbracket &\rightarrow \mathfrak{M}_\bullet^n \\ (m, i) &\mapsto m \quad \text{avec des étiquettes translatées de } -i. \end{aligned}$$

On a aussi une injection naturelle de \mathcal{O}_n dans $\mathfrak{M}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ en étiquetant les arêtes dans l'ordre d'exploration de $T(m)$. Pour définir la distance locale, il faut se donner des boules autour de la racine. Si $m \in \mathfrak{M}_\bullet$, on définit donc la boule $B_h(m)$ de rayon h dans m autour du sommet v en bas de la racine comme la sous carte (étiquetée) composée des faces de m contenant un sommet à distance au plus h de v . On définit la distance locale sur \mathfrak{M}_\bullet par

$$d(m, m') = 2^{-\sup\{h \geq 1; B_h(m) = B_h(m')\}}.$$

On note $\widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$ la complétion de $(\mathfrak{M}_\bullet, d)$. Remarquons que les cartes planaires infinies munies d'un bon étiquetage sont dans $\widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$ en tant que limites d'une suite de sous-cartes finies qui soient des cartes planaires orientées. L'étiquetage choisi n'est par contre pas arbitraire : il faut que, quitte à bien choisir la suite on puisse étiqueter chacune des sous-cartes de la suite par un sous-intervalle fini J contenant 0 et que les étiquetages coïncident sur toute boule de taille fixée arbitrairement grande à partir d'un certain rang. Cette condition est clairement vérifiée p.s. par l'étiquetage de $\Theta(\overline{W})$. Donc p.s. $\Theta(\overline{W}) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$. On a même mieux :

Proposition 4.9. *La fonction*

$$\Theta : \widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet \rightarrow \widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$$

dont le domaine de définition contient p.s. $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^} (\mathcal{W}_n \times \llbracket 1, n \rrbracket) \cup \{\overline{W}\}$ est p.s. continue en \overline{W} .*

Démonstration. Par la proposition 4.3, on peut supposer que $\bar{m} = \Theta(\overline{W})$ est une carte planaire infinie enracinée (quitte à se placer sur un évènement de probabilité 1). Soit $h > 0$. $B_h(\bar{m})$ est une sous-carte finie de \bar{m} donc pour n assez grand, $B_h(\bar{m}) \subset \Theta(\overline{W}|_{[-n,n]})$. Soit $W' \in \widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$ dans le domaine de Θ telle que $d(W', \overline{W}) \leq 2^{-n}$, alors $\overline{W}|_{[-n,n]} = W'|_{[-n,n]}$. Ainsi, $B_h(\bar{m}) = B_h(\Theta(W'))$. \square

Remarque 4.10. *Si $I \ni 0$ est un intervalle entier et $w \in \mathfrak{W}_A(I)$, $\Theta(w)$ n'est pas forcément dans $\widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$. Par exemple, si I est fini, certaines arêtes ne sont pas nécessairement explorées, donc pas étiquetées. Pour un intervalle I infini, l'exemple de gauche de la figure 11 montre une quasi-carte dont certaines arêtes ne sont pas étiquetées et l'exemple de droite de la même figure montre une quasi-carte dont le graphe sous-jacent n'est pas localement fini. Dans ces deux exemples $\Theta(w)$ n'est donc pas limite de cartes planaires orientées étiquetées finies.*

Si $m \in \mathfrak{M}_\bullet$, on peut étiqueter l'arête e^* de m^* par la même étiquette que e . Si $m \in \widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$, on définit sa carte duale m^* comme la limite des cartes duales d'une suite de cartes finies convergeant vers m .

Proposition 4.11. ** L'application de $\widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$ dans lui-même qui à une carte étiquetée m associe sa carte duale (où l'arête e^* a la même étiquette que e) est continue.*

Démonstration. Soit $h \in \mathbb{N}$. Soit $m \in \widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$. Considérons l'ensemble des faces de m dont l'un des sommets est sur une face telle qu'il existe une suite d'au plus $h + 1$ faces de sorte que deux faces consécutives aient une arête en commun et que la dernière face soit la face à droite de l'arête racine. Alors cet ensemble correspond aux sommets de $B_h(m^*)$. Soit k la distance maximale d'un sommet d'une face de cet ensemble au sommet v en bas de l'arête racine. Alors, si $B_k(m') = B_k(m)$, on a $B_h(m'^*) = B_h(m^*)$. \square

D'autre part, compte tenu de la remarque 2.22, on introduit un autre espace de cartes : l'espace des cartes (planaires) orientées ordonnées enracinées. On note \mathfrak{D}_\bullet l'ensemble des triplets (m, \preceq, e) où m est carte finie orientée, \preceq est un ordre total sur les arêtes de m et e est une arête de m appelée l'arête racine. On définit la sous-carte (non étiquetée) $B_h(m)$ comme la boule de rayon h dans m autour du sommet en bas de la racine. On munit cet espace d'une topologie locale autour de la racine métrisée par la distance

$$d((m, \preceq, e), (m', \preceq', e')) = 2^{-\sup\{h \geq 1; B_h(m) = B_h(m') \text{ et } \preceq|_{B_h(m)} = \preceq'|_{B_h(m')}\}}$$

Notons $\widetilde{\mathfrak{D}}_\bullet$ le complété de \mathfrak{D}_\bullet . Par construction, c'est un espace polonais. Remarquons que si m est une carte planaire finie munie d'un étiquetage par un intervalle $I \ni 0$, c'est-à-dire d'une bijection f des arêtes de m dans I , cet étiquetage induit un ordre total \preceq_f sur les arêtes (isomorphe à l'ordre usuel sur I) défini par

$$e \preceq_f e' \iff f(e) \leq f(e').$$

Cela nous définit une injection de \mathfrak{M}_\bullet dans \mathfrak{D}_\bullet qui consiste à oublier l'étiquetage des arêtes et à ne retenir que l'ordre dans lequel elles sont étiquetées (et laquelle est étiquetée 0). Comme tout ordre total fini est isomorphe à un intervalle entier, l'injection $\Psi : (m, f) \mapsto (m, \preceq_f, f^{-1}(0))$ est en fait une bijection de \mathfrak{M}_\bullet dans \mathfrak{D}_\bullet .

Proposition 4.12. ** La bijection $\Psi : \mathfrak{M}_\bullet \longrightarrow \mathfrak{D}_\bullet$ est 1-lipschitzienne et se prolonge donc en une application Ψ 1-lipschitzienne de $\widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$ dans $\widetilde{\mathfrak{D}}_\bullet$.*

Démonstration. Cela vient du fait que $\preceq_{f|_{B_h(m)}} = \preceq_f|_{B_h(m)}$. \square

Remarque 4.13. * Si m est une carte planaire infinie étiquetée par une bijection f de ses arêtes vers un intervalle infini $I \ni 0$ telle que $(m, f) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$, alors $\Psi((m, f))$ peut s'identifier au triplet $(m, \preceq_f, f^{-1}(0))$.

Remarque 4.14. * La réciproque $\Psi^{-1} : \mathfrak{D}_\bullet \rightarrow \mathfrak{M}_\bullet$ n'est pas continue puisque dans \mathfrak{D}_\bullet seul l'ordre autour de la racine est considéré, peu importe si une arête loin de la racine est étiquetée par un petit indice.

On aura aussi besoin de la continuité de l'application qui à une carte étiquetée par I et un ordre total sur I associe la carte ordonnée par le tiré en arrière de cet ordre par l'étiquetage.

Proposition 4.15. * Notons $\widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet \boxtimes \widetilde{\mathfrak{S}}_\bullet$ l'adhérence de

$$\bigsqcup_{I \ni 0, |I| < \infty} \mathfrak{M}(I) \times \mathfrak{S}(I)$$

dans $\widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet \times \widetilde{\mathfrak{S}}_\bullet$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet \boxtimes \widetilde{\mathfrak{S}}_\bullet &\longrightarrow \widetilde{\mathfrak{D}}_\bullet \\ ((m, f), \preceq) &\mapsto (m, \preceq \circ f, f^{-1}(0)) \end{aligned}$$

est continue, où $\preceq \circ f$ est défini par

$$e(\preceq \circ f)e' \iff f(e) \preceq f(e').$$

Démonstration. Supposons $B_h(m) = B_h(m')$ (en tant que boules étiquetées, c'est-à-dire aussi $f|_{B_h(m)} = f'|_{B_h(m')}$). Soit ℓ tel que $f(B_h(m)) \subset \llbracket -\ell, \ell \rrbracket$. Supposons de plus $r_\ell(\preceq) = r_\ell(\preceq')$. Alors

$$(\preceq \circ f)|_{B_h(m)} = (\preceq' \circ f')|_{B_h(m')}.$$

\square

Enfin, introduisons l'espace des bijections enracinées $\text{Bij}_\bullet = \bigsqcup_{I \ni 0} \text{Bij}(I)$ où $\text{Bij}(I)$ est l'ensemble des bijections de l'intervalle entier I dans lui-même fixant zéro. On le munit d'une topologie locale définie comme les précédentes à l'aide de la restriction $r_h(\tau) = \tau|_{\llbracket -h, h \rrbracket}$ pour $h \in \mathbb{N}$. L'espace métrique ainsi obtenu n'est pas complet mais est séparable. La topologie associée n'est rien d'autre que la topologie de la convergence simple. De plus, on a une injection continue évidente de Bij_\bullet dans $\widetilde{\mathfrak{S}}_\bullet$. La proposition ci-dessous énonce quant à elle la continuité de l'application qui à une carte étiquetée et une bijection fixant 0 (définies sur le même intervalle) associe la carte étiquetée obtenue en composant la bijection avec l'étiquetage.

Proposition 4.16. * Notons $\widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet \boxtimes \text{Bij}_\bullet$ l'adhérence de

$$\bigsqcup_{I \ni 0, |I| < \infty} \mathfrak{M}(I) \times \text{Bij}(I)$$

dans $\widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet \times \text{Bij}_\bullet$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet \boxtimes \text{Bij}_\bullet &\longrightarrow \widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet \\ ((m, f), \tau) &\mapsto (m, \tau \circ f) \end{aligned}$$

est continue.

Démonstration. Supposons $B_h(m) = B_h(m')$ (en tant que boules étiquetées, c'est-à-dire aussi $f|_{B_h(m)} = f'|_{B_h(m')}$). Soit ℓ tel que $f(B_h(m)) \subset \llbracket -\ell, \ell \rrbracket$. Supposons de plus $\tau|_{\llbracket -\ell, \ell \rrbracket} = \tau'|_{\llbracket -\ell, \ell \rrbracket}$. Alors

$$(\tau \circ f)|_{B_h(m)} = (\tau' \circ f')|_{B_h(m')}.$$

□

4.3 Les résultats limites locaux

Nous pouvons maintenant énoncer les résultats limites locaux. Le premier est un résultat de convergence de Benjamini-Schramm trempée ("quenched" en anglais)⁶.

Théorème 4.17. *Soit W_n uniforme sur \mathcal{W}_n et Z_n, σ_n, m_n les objets associés. Soit i_n choisi indépendamment de W_n uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors dans $\widetilde{\mathfrak{W}}_\bullet \times \widetilde{\mathfrak{E}}_\bullet \times \widetilde{\mathfrak{S}}_\bullet \times \widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$, on a*

$$\mathcal{L}(((W_n, i_n), (Z_n, i_n), (\sigma_n, i_n), (m_n, i_n)) | W_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mathcal{L}(\overline{W}, \overline{Z}, \overline{\sigma}, \overline{m})$$

Le résultat ci-dessus entraîne par convergence dominée une convergence de Benjamini-Schramm recuite ("annealed" en anglais).

Corollaire 4.18. *On a la convergence en loi dans $\widetilde{\mathfrak{W}}_\bullet \times \widetilde{\mathfrak{E}}_\bullet \times \widetilde{\mathfrak{S}}_\bullet \times \widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$:*

$$((W_n, i_n), (Z_n, i_n), (\sigma_n, i_n), (m_n, i_n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{loi} (\overline{W}, \overline{Z}, \overline{\sigma}, \overline{m}).$$

Pour montrer le théorème 4.17, on se concentrera sur l'étude de la marche W_n pour ensuite étendre le résultat limite aux autres objets grâce aux propriétés de continuité énoncées dans la sous-section précédente. On s'appuiera en particulier sur les deux lemmes ci-dessous :

Lemme 4.19. *Soient $h \in \mathbb{N}$, $I = \llbracket -h, h \rrbracket$ et $W \in \mathfrak{W}_A(I) \subset \mathfrak{W}_\bullet^{2h+1}$. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Alors uniformément sur i tel que $\lfloor n\varepsilon \rfloor + h < i < \lfloor (1 - \varepsilon)n \rfloor - h$,*

$$\mathbb{P}(r_h(W_n, i) = W) \rightarrow \mathbb{P}(r_h(\overline{W}) = W)$$

Lemme 4.20. *Soient $h \in \mathbb{N}$, $I = \llbracket -h, h \rrbracket$ et $W \in \mathfrak{W}_A(I) \subset \mathfrak{W}_\bullet^{2h+1}$. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Alors uniformément sur i, j tels que $\lfloor n\varepsilon \rfloor + h < i, j < \lfloor (1 - \varepsilon)n \rfloor - h$ et $|i - j| > 2h$,*

$$\mathbb{P}(r_h(W_n, i) = r_h(W_n, j) = W) \rightarrow \mathbb{P}(r_h(\overline{W}) = W)^2.$$

Avant de se lancer dans la preuve de ces deux lemmes, en commençant par celle du second, la plus technique, énonçons une remarque évidente qui sera à cette fin très utile.

Remarque 4.21. *Soit $x = (x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} = \left(\sum_{j=1}^i y_j \right)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une marche dans \mathbb{Z}^2 issue de $(0, 0)$ de taille $n + 1$. Soient $h \in \mathbb{N}$ et $x' = (x'_i)_{i \in \llbracket 0, h \rrbracket} = \left(\sum_{j=1}^i y'_j \right)_{i \in \llbracket 0, h \rrbracket}$. Fixons $k < \ell$ dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Soit $x'' = (x''_i)_{i \in \llbracket 0, n+2h \rrbracket}$ la marche obtenue en insérant deux copies de x' dans x aux temps k et ℓ . Alors*

$$\inf_{0 \leq i \leq n+2h} x''_i = \inf_{0 \leq i \leq n} x_i + \Delta$$

6. La terminologie trempé/recuit vient du vocabulaire de la métallurgie : la trempe et le recuit sont deux procédés métallurgiques différents. Ici, dire que le résultat est trempé signifie qu'on fixe le milieu aléatoire W_n et regarde comment la loi de la carte enracinée (W_n, i_n) conditionnellement à W_n . À l'inverse, le résultat suivant est dit recuit dans la mesure où l'on regarde la loi de (W_n, i_n) sans conditionner par rapport à W_n .

où l'infimum est pris coordonnée par coordonnée, $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2) = \Delta(x, k, \ell, x')$, $|\Delta_1| \leq 2 \sum_{j=1}^h |y'_{j,1}|$ et $|\Delta_2| \leq 2 \sum_{j=1}^h |y'_{j,2}|$ avec $y'_j = (y'_{j,1}, y'_{j,2})$.

Démonstration du lemme 4.20. Posons $E = \{r_h(\bar{W}|_{[1,n]}, i) = r_h(\bar{W}|_{[1,n]}, j) = W\}$. Par la proposition 3.2,

$$\mathbb{P}(r_h(W_n, i) = r_h(W_n, j) = W) = \mathbb{P}\left(E \mid (\bar{W}_t)_{0 \leq t \leq n+1} \in \mathfrak{W}_{A, \text{exc}}^{n+2}\right).$$

Mais, par le lemme 3.4, si $\lfloor n\varepsilon \rfloor + h < i, j < \lfloor (1 - \varepsilon)n \rfloor - h$,

$$\mathbb{P}\left(E \mid (\bar{W}_t)_{0 \leq t \leq n+1} \in \mathfrak{W}_{A, \text{exc}}^{n+2}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\tilde{E}} \alpha_{n+1, \lfloor n\varepsilon \rfloor}^{0,0} \left(- \inf_{\llbracket 0, n+1-2\lfloor n\varepsilon \rfloor \rrbracket} \bar{W}, \bar{W}_{n+1-2\lfloor n\varepsilon \rfloor}\right)\right) \quad (4.1)$$

où $\tilde{E} = \{r_h(\bar{W}|_{[1,n]}, i - \lfloor n\varepsilon \rfloor) = r_h(\bar{W}|_{[1,n]}, j - \lfloor n\varepsilon \rfloor) = W\}$. De plus, par la remarque 4.21, sous \tilde{E} ,

$$\left(- \inf_{\llbracket 0, n+1-2\lfloor n\varepsilon \rfloor \rrbracket} \bar{W}, \bar{W}_{n+1-2\lfloor n\varepsilon \rfloor}\right) = \left(- \inf_{\llbracket 0, n+1-2\lfloor n\varepsilon \rfloor - 2(2h+1) \rrbracket} \bar{S} - \Delta, \bar{S}_{n+1-2\lfloor n\varepsilon \rfloor - 2(2h+1)} + 2\delta\right) =: f(\bar{S})$$

où $\bar{S} = (\bar{S}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est la marche obtenue à partir de \bar{W} en enlevant les $2h$ pas autour de $i - \lfloor n\varepsilon \rfloor$ et autour de $j - \lfloor n\varepsilon \rfloor$, $\Delta = \Delta(\bar{S}, i - h - \lfloor n\varepsilon \rfloor, j - 3h - \lfloor n\varepsilon \rfloor, W)$ est une variable aléatoire bornée par une constante ne dépendant que de W et $\delta = W_h - W_{-h}$. En effet, sous \tilde{E} , les deux morceaux de la marche qui sont retirés coïncident avec la marche W . Ainsi, le terme de droite de (4.1) est

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\tilde{E}} \alpha_{n+1, \lfloor n\varepsilon \rfloor}^{0,0} (f(\bar{S}))\right) = \mathbb{P}(\tilde{E}) \mathbb{E} \alpha_{n+1, \lfloor n\varepsilon \rfloor}^{0,0} (f(\bar{S}))$$

En effet, \tilde{E} ne dépend que des deux morceaux retirés donc est indépendant de \bar{S} . De plus, $\mathbb{P}(\tilde{E}) = \mathbb{P}(r_h(\bar{W}) = W)^2$ car $|i - j| > 2h$ et par indépendance des incréments. Il ne reste plus qu'à montrer que

$$\mathbb{E} \alpha_{n+1, \lfloor n\varepsilon \rfloor}^{0,0} (f(\bar{S})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

uniformément en i, j . Mais par le lemme 3.5,

$$\sup_{i,j} \left| \mathbb{E} \alpha_{n+1, \lfloor n\varepsilon \rfloor}^{0,0} (f(\bar{S})) - \mathbb{E} \alpha_\varepsilon \left(g(\bar{S}) - \left(\frac{\Delta}{\sqrt{n}}, 0\right)\right) \right| \rightarrow 0$$

avec

$$g(\bar{S}) = \left(- \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\inf_{\llbracket 0, n+1-2\lfloor n\varepsilon \rfloor - 2(2h+1) \rrbracket} \bar{S}\right), \frac{1}{\sqrt{n}} (\bar{S}_{n+1-2\lfloor n\varepsilon \rfloor - 2(2h+1)} + 2\delta)\right).$$

Il suffit donc de montrer que $\mathbb{E} \alpha_\varepsilon \left(g(\bar{S}) - \left(\frac{\Delta}{\sqrt{n}}, 0\right)\right) \rightarrow 1$ uniformément en i, j . Pour cela, on remarque d'abord que la loi de \bar{S} ne dépend pas de i, j (contrairement à celle de Δ). De plus, par Donsker,

$$g(\bar{S}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \left(- \inf_{0 \leq t \leq 1-2\varepsilon} \mathcal{W}_t, \mathcal{W}_{1-2\varepsilon}\right)$$

Par le théorème de représentation de Skorokhod, on peut trouver un même espace de probabilité dans lequel la convergence ait lieu presque sûrement. Mais alors, puisque Δ est bornée,

$$\sup_{i,j} \left| g(\bar{S}) - \left(\frac{\Delta}{\sqrt{n}}, 0\right) - \left(- \inf_{0 \leq t \leq 1-2\varepsilon} \mathcal{W}_t, \mathcal{W}_{1-2\varepsilon}\right) \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0$$

Ainsi, par continuité de α_ε , $\alpha_\varepsilon \left(g(\bar{S}) - \left(\frac{\Delta}{\sqrt{n}}, 0 \right) \right) \rightarrow \alpha_\varepsilon \left(- \inf_{0 \leq t \leq 1-2\varepsilon} \mathcal{W}_t, \mathcal{W}_{1-2\varepsilon} \right)$ uniformément en i, j p.s. donc par convergence dominée (comme α_ε est bornée),

$$\mathbb{E} \alpha_\varepsilon \left(g(\bar{S}) - \left(\frac{\Delta}{\sqrt{n}}, 0 \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \alpha_\varepsilon \left(- \inf_{0 \leq t \leq 1-2\varepsilon} \mathcal{W}_t, \mathcal{W}_{1-2\varepsilon} \right)$$

uniformément en i, j . Enfin, le terme de droite est égal à 1 par le corollaire 3.7. \square

Démonstration du lemme 4.19. On commence comme avant :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(r_h(W_n, i) = W) &= \mathbb{P} \left(r_h(\bar{W}, i) = W \mid (\bar{W}_t)_{0 \leq t \leq n+1} \in \mathfrak{W}_{A, \text{exc}}^{n+2} \right) \text{ (par la proposition 3.2)} \\ &= \mathbb{E} \mathbf{1}_{\tilde{E}} \alpha_{n+1, [n\varepsilon]}^{0,0} \left(- \inf_{[0, n+1-2[n\varepsilon]]} \bar{W}, \bar{W}_{n+1-2[n\varepsilon]} \right) \text{ (par le lemme 3.4)} \end{aligned}$$

où $\tilde{E} = \{r_h(\bar{W}, i - [n\varepsilon]) = W\}$. Mais, sous \tilde{E} (par une remarque analogue à la remarque 4.21 où l'on n'insère qu'une seule marche x' dans x),

$$\left(- \inf_{[0, n+1-2[n\varepsilon]]} \bar{W}, \bar{W}_{n+1-2[n\varepsilon]} \right) = \left(- \inf_{[0, n+1-2[n\varepsilon]-(2h+1)]} \bar{S} - \Delta, \bar{S}_{n+1-2[n\varepsilon]-(2h+1)} + \delta \right)$$

avec \bar{S} la marche obtenue de \bar{W} en retirant les $2h$ pas autour de $i - [n\varepsilon]$, $\delta = W_h - W_{-h}$ et Δ est une fonction de \bar{S} , $i - [n\varepsilon] - h$ et W bornée par une constante ne dépendant que de W . On utilise ensuite l'indépendance de \tilde{E} et de \bar{S} ainsi que le fait que $\mathbb{P}(\tilde{E}) = \mathbb{P}(r_h(\bar{W}) = W)$ pour obtenir

$$\mathbb{P}(r_h(W_n, i) = W) = \mathbb{P}(r_h(\bar{W}) = W) \mathbb{E} \alpha_{n+1, [n\varepsilon]}^{0,0} \left(- \inf_{[0, n+1-2[n\varepsilon]-(2h+1)]} \bar{S} - \Delta, \bar{S}_{n+1-2[n\varepsilon]-(2h+1)} + \delta \right).$$

On conclut en montrant de la même manière que précédemment que le facteur de droite converge vers 1 uniformément en i . \square

Nous avons désormais tous les outils pour montrer le théorème 4.17.

Démonstration du théorème 4.17. Pour montrer le théorème 4.17, il suffit par les résultats de continuité énoncés précédemment de prouver que

$$\mu_n := \mathcal{L}((W_n, i_n) | W_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mathcal{L}(\bar{W}).$$

En effet, la fonction

$$\begin{aligned} \Phi : \tilde{\mathfrak{W}}_\bullet &\longrightarrow \tilde{\mathfrak{W}}_\bullet \times \tilde{\mathfrak{C}}_\bullet \times \tilde{\mathfrak{S}}_\bullet \times \tilde{\mathfrak{M}}_\bullet \\ W &\longmapsto (W, \text{WC}(W), \text{CP}(\text{WC}(W)), \Theta(W)) \end{aligned}$$

dont le domaine de définition contient $\bigcup_{n \geq 1} \text{supp } \mu_n \cup \text{supp } \mathcal{L}(\bar{W}) \bmod 0$ est p.s. continue en \bar{W} par les propositions 4.6 et 4.9. De plus, $\mathcal{L}(\Phi((W_n, i_n) | W_n)) = \mathcal{L}((W_n, i_n) | W_n) \circ \Phi^{-1} = \mu_n \circ \Phi^{-1}$. Supposons avoir montré que $\mu_n \rightarrow \mathcal{L}(\bar{W})$ en probabilité. Soit $\varphi(n)$ une extractrice, alors il existe une extractrice $\psi(n)$ telle que $\mu_{\varphi \circ \psi(n)}$ converge p.s. vers $\mathcal{L}(\bar{W})$. Donc pour toute fonction $f : \tilde{\mathfrak{W}}_\bullet \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée continue p.s. en \bar{W} , p.s. $\mu_{\varphi \circ \psi(n)}(f) \rightarrow \mathcal{L}(\bar{W})(f)$. Ainsi, pour toute fonction $f : \tilde{\mathfrak{W}}_\bullet \times \tilde{\mathfrak{C}}_\bullet \times \tilde{\mathfrak{S}}_\bullet \times \tilde{\mathfrak{M}}_\bullet \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact, p.s. $\mu_{\varphi \circ \psi(n)}(f \circ \Phi) \rightarrow \mathcal{L}(\bar{W})(f \circ \Phi)$.

Donc, par séparabilité de l'espace des fonctions continues à support compact définies sur un espace polonais, p.s. $\mu_{\varphi \circ \psi(n)} \circ \Phi^{-1}$ converge p.s. vers $\mathcal{L}(\overline{W}) \circ \Phi^{-1} = \mathcal{L}(\overline{W}, \overline{Z}, \overline{\sigma}, \overline{m})$, ce qu'on voulait.

Mais puisque la limite de la suite est déterministe, il suffit de montrer que

$$\mathcal{L}((W_n, i_n) | W_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{L}(\overline{W}).$$

En réalité, on a juste à vérifier que pour tout $h \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $W \in \mathfrak{W}_A([-h, h]) \subset \mathfrak{W}_\bullet$,

$$\mathbb{P}(r_h(W_n, i_n) = W | W_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathbb{P}(r_h(\overline{W}) = W). \quad (4.2)$$

En effet, si on suppose (4.2), alors puisque $r_h(W_n, i_n)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs

$$\forall h \in \mathbb{N}^*, \mathcal{L}(r_h(W_n, i_n) | W_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{L}(r_h(\overline{W})).$$

Soit $f : \widetilde{\mathfrak{W}}_\bullet \rightarrow \mathbb{R}$ bornée 1-lipschitzienne. Alors $f \circ r_h \rightarrow f$ uniformément quand $h \rightarrow +\infty$ car $d(r_h(w), w) \leq 2^{-h}$. Or si (4.2) est vraie, alors

$$\mathbb{E}(f(r_h(W_n, i_n)) | W_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}f(r_h(\overline{W})),$$

ce qui permet de voir que

$$\mathbb{E}(f((W_n, i_n)) | W_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}f(\overline{W}).$$

Ainsi, on doit seulement montrer (4.2). Pour ce faire, remarquons que

$$\mathbb{P}(r_h(W_n, i_n) = W | W_n) = \frac{1}{n} \#\{j \in \llbracket 1, n \rrbracket; r_h(W_n, j) = W\} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{r_h(W_n, j)=W}.$$

Déjà,

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{r_h(W_n, j)=W} \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(r_h(W_n, j) = W).$$

Mais si on fixe $\varepsilon > 0$, par le lemme 4.19,

$$\sup_{\lfloor n\varepsilon \rfloor + h < i < \lfloor (1-\varepsilon)n \rfloor - h} |\mathbb{P}(r_h(W_n, i) = W) - \mathbb{P}(r_h(\overline{W}) = W)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\mathbb{P}(r_h(W_n, i_n) = W | W_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}(r_h(\overline{W}) = W).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{r_h(W_n, j)=W} \right)^2 \right) &= \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ |i-j| > 2h}} \mathbb{P}(r_h(W_n, i) = r_h(W_n, j) = W) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}(r_h(\overline{W}) = W)^2 \quad (\text{par le lemme 4.20}). \end{aligned}$$

Alors $\mathbb{P}(r_h(W_n, i_n) = W | W_n) \rightarrow \mathbb{P}(r_h(\overline{W}) = W)$ dans L^2 et donc aussi en loi, d'où (4.2). □

4.4 Comportement de la limite locale vis-à-vis de la dualité

Dans la remarque 2.22, nous avons constaté que pour certaines marches infinies, la permutation (c'est-à-dire l'ordre total) associée n'était pas forcément isomorphe à un intervalle de \mathbb{Z} , ce qui entravait la définition de l'étiquetage de la carte duale. On souhaiterait que ces cas pathologiques n'apparaissent qu'avec une probabilité nulle.

On reprend donc les notations du théorème 4.17 et celles de la sous-section 2.3. On note par ailleurs

$$i_n^* = \sigma_n(i_n), \quad i_n^{**} = n + 1 - i_n = \sigma_n^*(i_n^*) \text{ et } i_n^{***} = n + 1 - \sigma_n(i_n) = \sigma_n^{**}(i_n^{**}).$$

Alors pour tout $\theta \in \star$, i_n^θ est uniforme sur $[[1, n]]$ et indépendant de W_n . Ainsi, par le théorème 4.17, on obtient

$$\mathcal{L} \left(((W_n^\theta, i_n^\theta), (Z_n^\theta, i_n^\theta), (\sigma_n^\theta, i_n^\theta), (m_n^\theta, i_n^\theta)) \middle| W_n \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mathcal{L}(\overline{W}, \overline{Z}, \overline{\sigma}, \overline{m}), \quad (4.3)$$

où m_n^θ est étiquetée selon l'exploration de $T(m_n^\theta)$. On aimerait avoir la convergence de

$$\mathcal{L} \left(((W_n^\theta, i_n^\theta), (Z_n^\theta, i_n^\theta), (\sigma_n^\theta, i_n^\theta), (m_n^\theta, i_n^\theta))_{\theta \in \star} \middle| W_n \right).$$

On sait que $((W_n, i_n), (Z_n, i_n), (m_n, i_n), (\sigma_n, i_n))$ converge en loi vers $(\overline{W}, \overline{Z}, \overline{m}, \overline{\sigma})$. On peut donc supposer par le théorème de représentation de Skorokhod que la convergence est presque sûre. Alors, si on étiquette la carte duale m_n^* selon l'exploration de $T(m_n)$, par la proposition 4.11, on a

$$(m_n^*, i_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \overline{m}^*. \quad (4.4)$$

Or, si on étiquette m_n^* en remplaçant l'étiquette i (selon l'exploration de $T(m_n)$) par l'étiquette $\sigma_n(i)$, on a par (4.3)

$$(m_n^*, \sigma_n(i_n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \overline{m}$$

De cette remarque découle la proposition suivante :

Proposition 4.22. * L'ordre $\overline{\sigma}$ est isomorphe à \mathbb{Z} p.s.

Démonstration. La limite en loi écrite précédemment a lieu dans $\widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet$, donc aussi dans $\widetilde{\mathfrak{D}}_\bullet$ en composant par Ψ , qui est continue par la proposition 4.12. Notons f_n l'étiquetage de m_n et de m_n^* selon l'exploration de $T(m_n)$ translaté de $-i_n$. Notons aussi \bar{f} l'étiquetage de \overline{m} . Remarquons que $(m_n^*, \sigma_n(i_n))$ a pour étiquetage $f_n^* = (\sigma_n(\cdot + i_n) - \sigma_n(i_n)) \circ f_n$. On peut donc réécrire

$$\Psi(m_n^*, f_n^*) = (m_n^*, (\sigma_n, i_n) \circ f_n, f_n^{-1}(0)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \Psi(\overline{m}, \bar{f}) = (\overline{m}, \preceq_{\bar{f}}, \bar{f}^{-1}(0))$$

dans $\widetilde{\mathfrak{D}}_\bullet$. De plus, par (4.4) et par la convergence p.s. de (σ_n, i_n) vers $\overline{\sigma}$,

$$((m_n^*, f_n), (\sigma_n, i_n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} ((\overline{m}^*, \bar{f}), \overline{\sigma})$$

dans $\widetilde{\mathfrak{M}}_\bullet \boxtimes \widetilde{\mathfrak{S}}_\bullet$. Donc, par la proposition 4.15,

$$(m_n^*, (\sigma_n, i_n) \circ f_n, f_n^{-1}(0)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} (\overline{m}^*, \overline{\sigma} \circ \bar{f}, \bar{f}^{-1}(0))$$

dans $\tilde{\mathfrak{D}}_\bullet$. Ainsi, $\bar{\sigma} \circ \bar{f}$ a même loi que $\preceq_{\bar{f}}$. Donc p.s. (quitte à compléter la tribu) $\bar{\sigma} \circ \bar{f} = \preceq_{g(\omega)}$ pour une certaine bijection $g(\omega)$ de l'ensemble des arêtes vers \mathbb{Z} , d'où

$$\bar{\sigma} = \preceq_{g(\omega)} \circ \bar{f}^{-1} = \preceq_{g(\omega) \circ \bar{f}^{-1}} \simeq \mathbb{Z}.$$

□

Comme $\bar{\sigma}$ est p.s. isomorphe à \mathbb{Z} , on peut définir une bijection $\bar{\sigma} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ par $\bar{\sigma}(0) = 0$ et, si $i, j \in \mathbb{Z}$, $\bar{\sigma}(j) = \bar{\sigma}(i) + 1$ si et seulement si j est le successeur de i dans l'ordre $\bar{\sigma}$. On peut aussi définir p.s. son inverse $\bar{\sigma}^{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ainsi que sa permutation conjuguée $\bar{\sigma}^* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $\bar{\sigma}^*(i) = -\bar{\sigma}^{-1}(i)$.

Lemme 4.23. * Soient $i < j \in \mathbb{Z}$. Alors p.s. il existe $k > j$ tel que $\bar{Z}_k^{(i)} = \bar{Z}_k^{(j)}$. Autrement dit, les marches $\bar{Z}^{(i)}$ et $\bar{Z}^{(j)}$ coalescent p.s.

Démonstration. On sait qu'il n'y a p.s. qu'un nombre fini d'indices strictement compris entre i et j selon l'ordre $\bar{\sigma}$ (car il est isomorphe à \mathbb{Z}). Donc p.s., puisque $\bar{\sigma} = \text{CP}(\bar{Z})$, si $\bar{Z}^{(i)}$ et $\bar{Z}^{(j)}$ ne se rejoignent pas, par exemple si $\bar{Z}_t^{(i)} > \bar{Z}_t^{(j)}$ pour tout $t \geq j$, alors, à partir d'un certain rang, à chaque fois que $\bar{Z}_t^{(i)} \geq 0 > \bar{Z}_t^{(j)}$, on a $\bar{Z}_t^{(i)} = 0$ et $\bar{Z}_t^{(j)} = -1$ (car sinon il y aurait une infinité d'indices entre i et j selon l'ordre $\bar{\sigma}$). Or les marches $\bar{Z}^{(i)}$ et $\bar{Z}^{(j)}$ sont récurrentes ne peuvent descendre que de -1 . Ainsi, $\bar{Z}_t^{(j)} = -1$ infiniment souvent p.s. et donc $(\bar{Z}_t^{(i)}, \bar{Z}_t^{(j)}) = (0, -1)$ infiniment souvent p.s. Or, avec probabilité $1/4$, l'incrément de \bar{W} est de la forme $(-\ell, k)$ avec $\ell \geq 1$ et $k \geq 0$, et dans ce cas les marches $\bar{Z}^{(i)}$ et $\bar{Z}^{(j)}$ qui étaient en 0 et en -1 coalescent. Ainsi, l'évènement " $\bar{Z}^{(i)}$ et $\bar{Z}^{(j)}$ ne se rejoignent pas" est de probabilité nulle. □

Soit $i \in \mathbb{Z}$. Par la convergence p.s. de (Z_n, i_n) vers \bar{Z} , pour n grand les marches $Z_n^{(i+i_n)}$ et $Z_n^{(i_n)}$ coalescent en un temps $i_n + k$ (où k est aléatoire, fonction de \bar{Z}). Donc aucun indice plus grand que k ne peut être entre 0 et i selon l'ordre (σ_n, i_n) pour n grand. En renversant l'orientation et en considérant \bar{Z} , on montre de même qu'il existe un indice aléatoire $-\ell$ fonction de \bar{Z} tel qu'aucun indice plus petit que $-\ell$ ne puisse être entre 0 et i selon l'ordre (σ_n, i_n) . Mais alors, par la convergence de l'ordre (σ_n, i_n) vers l'ordre $\bar{\sigma}$, on en déduit que

$$\sigma_n(i + i_n) - \sigma_n(i_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \bar{\sigma}(i). \quad (4.5)$$

Donc, p.s. pour n grand $\sigma_n(i + i_n) - \sigma_n(i_n) = \bar{\sigma}(i)$. Cela s'interprète comme la convergence de $(\sigma_n, i_n) := \sigma_n(\cdot + i_n) - \sigma_n(i_n)$ vers la bijection $\bar{\sigma}$ dans Bij_\bullet . En injectant dans la définition de σ_n^* , on récupère

$$\sigma_n^*(\sigma_n(i_n) + \bar{\sigma}(i)) = n + 1 - (i + i_n) = -i + \sigma_n^*(\sigma_n(i_n)).$$

Ainsi, en posant $j = \bar{\sigma}(i)$, p.s. pour n grand,

$$\sigma_n^*(\sigma_n(i_n) + j) = \bar{\sigma}^*(j) + \sigma_n^*(\sigma_n(i_n)),$$

ce qui démontre que

$$(\sigma_n^*, i_n^*) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \bar{\sigma}^* \text{ et } (\sigma_n^{-1}, i_n^*) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \bar{\sigma}^{-1},$$

la convergence ayant lieu dans Bij_\bullet , donc aussi dans $\tilde{\mathfrak{S}}_\bullet$.

On peut redéfinir la carte duale \overline{m}^* en étiquetant les arêtes selon l'ordre $\overline{\sigma}$ (en remplaçant l'étiquette i par $\overline{\sigma}(i)$) et en gardant la même racine (l'arête racine e étiquetée 0 dans \overline{m} correspond à l'arête racine e^* étiquetée 0 dans \overline{m}^*). On a alors par la proposition 4.16, par (4.5) et (4.4),

$$(m_n^*, i_n^*) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \overline{m}^*.$$

Ainsi, pour tout $\theta \in \star$,

$$(m_n^\theta, i_n^\theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \overline{m}^\theta$$

où \overline{m}^θ est la carte planaire infinie θ -duale de \overline{m} étiquetée en composant l'étiquetage de \overline{m} par la bijection τ^θ de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} fixant zéro définie par : $\tau = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$, $\tau^* = \overline{\sigma}$, $\tau^{**} = \overline{\sigma}^* \circ \overline{\sigma} = -\text{Id}$ et $\tau^{***} = \overline{\sigma}^{**} \circ \overline{\sigma}^* \circ \overline{\sigma} = -\overline{\sigma}$. En effet, $\sigma_n^*(\sigma_n(i)) = n+1-i$ et $\sigma_n^{**}(n+1-i) = n+1-(\sigma_n^*)^{-1}(n+1-i) = n+1-\sigma_n(i)$.

Tournons notre attention vers les marches. On a par la proposition 2.17,

$$X_n^*(\sigma_n(i)) = L_{Z_n}^{(i)}(n) - 1.$$

Donc

$$X_n^*(\sigma_n(i+i_n) - \sigma_n(i_n) + \sigma_n(i_n)) - X_n^*(\sigma_n(i_n)) = L_{Z_n}^{(i+i_n)}(n) - L_{Z_n}^{(i_n)}(n) = \begin{cases} L_{Z_n}^{(i+i_n)}(i_n - 1) & \text{si } i < 0 \\ -L_{Z_n}^{(i_n+1)}(i + i_n) & \text{si } i > 0 \\ 0 & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Mais par continuité en Z du temps local (proposition 4.7),

$$\begin{aligned} L_{Z_n}^{(i+i_n)}(i_n - 1) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} L_{\overline{Z}}^{(i)}(-1) & \text{si } i < 0 \\ -L_{Z_n}^{(i_n+1)}(i + i_n) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} -L_{\overline{Z}}^{(1)}(i) & \text{si } i > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, p.s. pour n assez grand,

$$X_n^*(\overline{\sigma}(i) + \sigma_n(i_n)) - X_n^*(\sigma_n(i_n)) = \begin{cases} L_{\overline{Z}}^{(i)}(-1) & \text{si } i < 0 \\ -L_{\overline{Z}}^{(1)}(i) & \text{si } i > 0 \\ 0 & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Donc $(X_n^*, i_n^*) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \overline{X}^*$, où

$$\overline{X}_i^* = \begin{cases} L_{\overline{Z}}^{(\overline{\sigma}^{-1}(i))}(-1) & \text{si } \overline{\sigma}^{-1}(i) < 0 \\ -L_{\overline{Z}}^{(1)}(\overline{\sigma}^{-1}(i)) & \text{si } \overline{\sigma}^{-1}(i) > 0 \\ 0 & \text{si } \overline{\sigma}^{-1}(i) = 0 \end{cases}$$

De même, en combinant la proposition 4.8 et la proposition 2.17, on montre que $(Y_n^*, i_n^*) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \overline{Y}^*$, où

$$\overline{Y}_i^* = \begin{cases} L_{\overline{Z}}^{(\overline{\sigma}^*(i))}(-1) & \text{si } \overline{\sigma}^*(i) < 0 \\ -L_{\overline{Z}}^{(1)}(\overline{\sigma}^*(i)) & \text{si } \overline{\sigma}^*(i) > 0 \\ 0 & \text{si } \overline{\sigma}^*(i) = 0. \end{cases}$$

On a donc le résultat limite local recuit suivant :

Théorème 4.24. * Dans $\widetilde{\mathfrak{W}}_{\bullet} \times \widetilde{\mathfrak{C}}_{\bullet} \times \widetilde{\mathfrak{S}}_{\bullet} \times \widetilde{\mathfrak{M}}_{\bullet}$.

$$((W_n^\theta, i_n^\theta), (Z_n^\theta, i_n^\theta), (\sigma_n^\theta, i_n^\theta), (m_n^\theta, i_n^\theta))_{\theta \in \star} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} (\overline{W}^\theta, \overline{Z}^\theta, \overline{\sigma}^\theta, \overline{m}^\theta)_{\theta \in \star}$$

où $\overline{\sigma}^{\theta*} = -(\overline{\sigma}^\theta)^{-1}$, où $\overline{m}^{\theta*}$ s'obtient à partir de \overline{m}^θ et de $\overline{\sigma}^\theta$ de la même manière que \overline{m}^* à partir de \overline{m} et $\overline{\sigma}$, où $\overline{W}^\theta = (\overline{X}^\theta, \overline{Y}^\theta)$ est définie par

$$\overline{X}_i^{\theta*} = \begin{cases} L_{\overline{Z}^\theta}^{((\overline{\sigma}^\theta)^{-1}(i))}(-1) & \text{si } (\overline{\sigma}^\theta)^{-1}(i) < 0 \\ -L_{\overline{Z}^\theta}^{(1)((\overline{\sigma}^\theta)^{-1}(i))} & \text{si } (\overline{\sigma}^\theta)^{-1}(i) > 0 \\ 0 & \text{si } (\overline{\sigma}^\theta)^{-1}(i) = 0 \end{cases}$$

et

$$\overline{Y}_i^{\theta*} = \begin{cases} L_{\overline{Z}^\theta}^{(\overline{\sigma}^{\theta*}(i))}(-1) & \text{si } \overline{\sigma}^{\theta*}(i) < 0 \\ -L_{\overline{Z}^\theta}^{(1)}(\overline{\sigma}^{\theta*}(i)) & \text{si } \overline{\sigma}^{\theta*}(i) > 0 \\ 0 & \text{si } \overline{\sigma}^{\theta*}(i) = 0 \end{cases}$$

et où $\overline{Z}^\theta = \text{WC}(\overline{W}^\theta)$. La convergence en loi des permutations (qui sont bien p.s. des bijections) ci-dessus a aussi lieu pour la topologie de la convergence simple, c'est-à-dire dans Bij_{\bullet} . De plus,

$$\overleftarrow{\overline{W}^\theta} = \overline{W}^{\theta**}$$

et pour tout $\theta \in \star$, $(\overline{W}^\theta, \overline{Z}^\theta, \overline{\sigma}^\theta, \overline{m}^\theta)$ a même loi que $(\overline{W}, \overline{Z}, \overline{\sigma}, \overline{m})$.

Remarque 4.25. * Remarquons au passage que la limite $\overline{\sigma}$ vue comme une bijection de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} fixant zéro est une permutation de Baxter infinie au sens où il n'existe pas d'entiers relatifs $i < j < k$ tels que

$$\overline{\sigma}(j+1) < \overline{\sigma}(i) < \overline{\sigma}(k) < \overline{\sigma}(j) \text{ ou } \overline{\sigma}(j) < \overline{\sigma}(k) < \overline{\sigma}(i) < \overline{\sigma}(j+1).$$

C'est une conséquence du fait que $(\sigma_n(i+i_n) - \sigma_n(i_n))_{i \in \mathbb{Z}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} (\overline{\sigma}(i))_{i \in \mathbb{Z}}$.

En réalité, on obtient aussi le résultat limite local trempé

Théorème 4.26. * Dans $(\widetilde{\mathfrak{W}}_{\bullet} \times \widetilde{\mathfrak{C}}_{\bullet} \times \text{Bij}_{\bullet} \times \widetilde{\mathfrak{M}}_{\bullet})^4$

$$\mathcal{L} \left(((W_n^\theta, i_n^\theta), (Z_n^\theta, i_n^\theta), (\sigma_n^\theta, i_n^\theta), (m_n^\theta, i_n^\theta))_{\theta \in \star} \middle| W_n \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mathcal{L} \left((\overline{W}^\theta, \overline{Z}^\theta, \overline{\sigma}^\theta, \overline{m}^\theta)_{\theta \in \star} \right).$$

Démonstration. On se donne une extractrice $\varphi(n)$. Par le théorème 4.17, il existe une extractrice ψ_n telle que

$$\mathcal{L} \left(\left(\begin{array}{c} (W_{\varphi \circ \psi(n)}, i_{\varphi \circ \psi(n)}) \\ (Z_{\varphi \circ \psi(n)}, i_{\varphi \circ \psi(n)}) \\ (\sigma_{\varphi \circ \psi(n)}, i_{\varphi \circ \psi(n)}) \\ (m_{\varphi \circ \psi(n)}, i_{\varphi \circ \psi(n)}) \end{array} \right) \middle| W_{\varphi \circ \psi(n)} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \mathcal{L}(\overline{W}, \overline{Z}, \overline{\sigma}, \overline{m}).$$

Soit $\omega \in \Omega$ tel que cet évènement soit réalisé. Alors, par le théorème de représentation de Skorokhod, on peut trouver un espace de probabilité Ω' dans lequel

$$\begin{pmatrix} (W_{\varphi \circ \psi(n)}, i_{\varphi \circ \psi(n)}) \\ (Z_{\varphi \circ \psi(n)}, i_{\varphi \circ \psi(n)}) \\ (\sigma_{\varphi \circ \psi(n)}, i_{\varphi \circ \psi(n)}) \\ (m_{\varphi \circ \psi(n)}, i_{\varphi \circ \psi(n)}) \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} (\overline{W}, \overline{Z}, \overline{\sigma}, \overline{m}).$$

On raisonne ensuite comme précédemment. □

5 Limites d'échelle

5.1 Limite d'échelle des marches coalescentes

5.1.1 Résultat de limite d'échelle non conditionné

Soit $\mathcal{W} = (\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un processus gaussien centré continu sur \mathbb{R} de noyau de covariance

$$K(t, s) = \begin{pmatrix} t \wedge s & \rho(t \wedge s) \\ \rho(t \wedge s) & t \wedge s \end{pmatrix}$$

avec $\rho \in]-1, 1[$ (mouvement brownien bidimensionnel de corrélation ρ). On s'appuiera sur le théorème d'existence et d'unicité suivant (dont on omet la preuve) pour définir les marches coalescentes continues.

Théorème 5.1. (propositions 2.1 et 2.2 de [8] utilisant le théorème 2 de [12]) Soit $T \in]0, +\infty]$ alors on a unicité trajectorielle et existence d'une solution forte pour l'EDS

$$\begin{cases} d\mathcal{Z}(t) = \mathbf{1}_{\mathcal{Z}(t) > 0} d\mathcal{Y}(t) - \mathbf{1}_{\mathcal{Z}(t) \leq 0} d\mathcal{X}(t) & \text{sur } [0, T[\\ \mathcal{Z}(0) = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Autrement dit, si $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles (filtration continue à droite et complète) et \mathcal{W} est un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien alors

- si $\mathcal{Z}, \tilde{\mathcal{Z}}$ sont deux processus continus (\mathcal{F}_t) -adaptés satisfaisant (5.1), alors ils sont indistinguables.
- il existe un processus continu (\mathcal{F}_t) -adapté \mathcal{Z} satisfaisant (5.1) p.s.

On peut même faire en sorte que ce processus soit adapté par rapport à la filtration naturelle (complétée) de \mathcal{W} . En particulier, pour tout $t \in [0, T]$, il existe une fonction mesurable $F_t : \mathcal{C}([0, t]) \rightarrow \mathcal{C}([0, t])$ telle que

- $F_t(\mathcal{W}|_{[0, t]})$ satisfait (5.1) p.s. sur l'intervalle $[0, t]$.
- Pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$, $F_t(\mathcal{W}|_{[0, t]})|_{[0, s]} = F_s(\mathcal{W}|_{[0, s]})$

À partir de maintenant on suppose $\rho = -1/2$. Soit (\mathcal{F}_t) la filtration naturelle (complétée) de \mathcal{W} . Le processus \mathcal{W} correspond alors à celui introduit dans la section 3. Pour tout $u \in \mathbb{R}$ posons

$$\mathcal{Z}^{(u)}(t) = \begin{cases} F_\infty((\mathcal{W}(u+s) - \mathcal{W}(u))_{s \in \mathbb{R}_+})(t-u) & \text{si } t \geq u \\ 0 & \text{si } t < u. \end{cases}$$

Alors $\mathcal{Z}^{(u)}$ est clairement (\mathcal{F}_t) -adapté, est continu et satisfait p.s. l'EDS

$$\begin{cases} d\mathcal{Z}^{(u)}(t) = \mathbf{1}_{\mathcal{Z}^{(u)}(t) > 0} d\mathcal{Y}(t) - \mathbf{1}_{\mathcal{Z}^{(u)}(t) \leq 0} d\mathcal{X}(t) & \text{sur } [u, +\infty[\\ \mathcal{Z}^{(u)}(t) = 0. & \text{sur }]-\infty, u]. \end{cases} \quad (5.2)$$

Par cette construction et puisque F_∞ est mesurable, l'application $(\omega, u) \mapsto \mathcal{Z}^{(u)}(\omega)$ est mesurable. Cela entraîne par une application de Fubini-Tonelli que p.s. pour Lebesgue presque tout u dans \mathbb{R} , $\mathcal{Z}^{(u)}$ satisfait (5.2). En effet, à t fixé,

$$\int_{u \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left(\left(\mathcal{Z}^{(u)}(t) - \int_u^t (\mathbf{1}_{\mathcal{Z}^{(u)}(s) > 0} d\mathcal{Y}(s) - \mathbf{1}_{\mathcal{Z}^{(u)}(s) \leq 0} d\mathcal{X}(s)) \right)^2 \right) du = 0$$

Donc, en appliquant Fubini-Tonelli pour échanger intégrale et espérance, on a p.s. pour Lebesgue presque tout $u \leq t$,

$$\mathcal{Z}^{(u)}(t) = \int_u^t (\mathbf{1}_{\mathcal{Z}^{(u)}(s) > 0} d\mathcal{Y}(s) - \mathbf{1}_{\mathcal{Z}^{(u)}(s) \leq 0} d\mathcal{X}(s)).$$

Mais par continuité en t , cette égalité est aussi vraie p.s. pour Lebesgue presque tout $u \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \geq u$, ce qu'on voulait. Par contre, on ne peut pas trouver d'évènement presque sûr sur lequel l'EDS (5.2) soit satisfaite pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Remarque 5.2. Si $t \geq u$, on calcule $\langle \mathcal{Z}^{(u)}, \mathcal{Z}^{(u)} \rangle_t = t - u$. Donc par le théorème de Lévy, $\mathcal{Z}^{(u)}$ est un mouvement brownien standard sur $[u, +\infty[$. On peut donc définir son temps local en 0 défini sur $[u, +\infty[$ noté $\mathcal{L}^{(u)}$. On le prolonge par continuité en posant $\mathcal{L}^{(u)}(t) = 0$ pour $t \leq u$.

Définition 5.3. La famille $(\mathcal{Z}^{(u)})_{u \in \mathbb{R}}$ est appelée processus continu de marches coalescentes (dirigé par \mathcal{W}).

Comme dans la section précédente, notons $\overline{W} = (\overline{X}_k, \overline{Y}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ la marche bidimensionnelle bi-infinie de pas ν telle que $\overline{X}_0 = \overline{Y}_0 = 0$. On note aussi $\overline{Z} = \text{WC}(\overline{W})$ et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\overline{L}^{(i)} = L_{\overline{Z}}^{(i)}$ le temps local (discret) de la marche $\overline{Z}^{(i)}$ en 0 à partir du temps i défini dans la proposition 4.7. On étend $\overline{Z}^{(i)}$ et $\overline{L}^{(i)}$ à \mathbb{Z} tout entier les prolongeant par 0 sur $]]-\infty, i[$. Si $t \in \mathbb{R}$, on note $\overline{W}_t, \overline{Z}_t^{(i)}$ et $\overline{L}_t^{(i)}$ les interpolations linéaires en t de $\overline{W}, \overline{Z}^{(i)}$ et $\overline{L}^{(i)}$. Notons pour tous $n \in \mathbb{N}^*, u \in \mathbb{R}$, $\overline{W}_n, \overline{Z}_n^{(u)}, \overline{\mathcal{L}}_n^{(u)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les versions rééchelonnées de ces objets :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \overline{W}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \overline{W}_{nt}, \overline{Z}_n^{(u)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \overline{Z}_{nt}^{(\lceil nu \rceil)}, \overline{\mathcal{L}}_n^{(u)} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \overline{L}_{nt}^{(\lceil nu \rceil)}.$$

Le résultat de limite d'échelle porte sur une seule marche du processus \overline{Z} , à savoir la marche $\overline{Z}^{(\lceil nu \rceil)}$:

Théorème 5.4. Soit $u \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergent vers u . Alors dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^4$,

$$(\overline{W}_n, \overline{Z}_n^{(u_n)}, \overline{\mathcal{L}}_n^{(u_n)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{loi} (\mathcal{W}, \mathcal{Z}^{(u)}, \mathcal{L}^{(u)})$$

Démonstration. Le premier terme du triplet converge en loi vers \mathcal{W} comme remarqué en section 3 par le théorème de Donsker. Considérons les deux derniers termes du triplet. Par la proposition 4.1, $(\bar{Z}_i^{(k)})_{i \in \mathbb{Z}}$ a même loi que $(\bar{Y}_{i-k} \mathbf{1}_{i \geq k})_{i \in \mathbb{Z}}$. Donc pour tout $n \geq 1$,

$$(\bar{Z}_n^{(u_n)}, \bar{\mathcal{L}}_n^{(u_n)}) \stackrel{\text{loi}}{\equiv} \left((\bar{Y}_n(t - u_n) \mathbf{1}_{t \geq u_n})_{t \in \mathbb{R}}, (\mathcal{L}_n^{\bar{Y}}(t - u_n) \mathbf{1}_{t \geq u_n})_{t \in \mathbb{R}} \right)$$

où $\mathcal{L}_n^{\bar{Y}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2n}} L_{\bar{Y}}^{(0)}(nt)$ avec $L_{\bar{Y}}^{(i)}(j) = \#\{k \in \llbracket i, j \rrbracket; \bar{Y}_k = 0\}$. Or \bar{Y} est une marche apériodique récurrente de pas à variance finie égale à 2. Ainsi, par le théorème 1.1 de [3],

$$\left(\bar{\mathcal{Y}}_n|_{\mathbb{R}_+}, \mathcal{L}_n^{\bar{Y}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \left(\mathcal{Y}|_{\mathbb{R}_+}, L^{\mathcal{Y}} \right),$$

où $L^{\mathcal{Y}}$ est le temps local du mouvement brownien standard $\mathcal{Y}|_{\mathbb{R}_+}$ en 0. Mais par la remarque 5.2, $(\mathcal{Y}|_{\mathbb{R}_+}, L^{\mathcal{Y}})$ a même loi que $(\mathcal{Z}^{(u)}(u+t), \mathcal{L}^{(u)}(u+t))_{t \geq 0}$. Ainsi, on obtient sans trop d'effort que

$$\left(\bar{Z}_n^{(u_n)}, \bar{\mathcal{L}}_n^{(u_n)} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \left(\mathcal{Z}^{(u)}, \mathcal{L}^{(u)} \right).$$

En particulier, par le théorème de Prokhorov et puisqu'un produit de compacts est compact, la suite $(\bar{\mathcal{W}}_n, \bar{Z}_n^{(u_n)}, \bar{\mathcal{L}}_n^{(u_n)})$ est tendue.

Montrons l'unicité de la limite. Supposons que le long d'une sous-suite, $(\bar{\mathcal{W}}_n, \bar{Z}_n^{(u_n)}, \bar{\mathcal{L}}_n^{(u_n)})$ converge en loi vers $(\widetilde{\mathcal{W}}, \widetilde{\mathcal{Z}}, \widetilde{\mathcal{L}})$. Comme $\widetilde{\mathcal{W}}$ a même loi que \mathcal{W} on enlève le tilde (quitte à changer \mathcal{W} en $\widetilde{\mathcal{W}}$). De plus, on sait aussi par ce qui précède que $\widetilde{\mathcal{Z}}$ est un mouvement brownien commençant au temps u et que $\widetilde{\mathcal{L}}$ est son temps local en 0 à partir du temps u . Montrons que $\widetilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}^{(u)}$ p.s., où $\mathcal{Z}^{(u)}$ est bien entendu défini à partir de \mathcal{W} comme auparavant. Par le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que la convergence a lieu p.s. Notons $\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{W}(s), \widetilde{\mathcal{Z}}(s); s \leq t) \vee \mathcal{N}$ où \mathcal{N} désigne l'ensemble des événements de probabilité nulle. On sait que \mathcal{W} est un mouvement brownien. Montrons que c'est un \mathcal{G}_t -mouvement brownien. Il est clairement adapté par rapport à \mathcal{G}_t . Vérifions donc que $\mathcal{W}_{t+s} - \mathcal{W}_t \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_t$ pour $s \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Déjà, par indépendance des incréments de la marche,

$$(\bar{\mathcal{W}}_n(t+s) - \bar{\mathcal{W}}_n(t)) \perp\!\!\!\perp \sigma(\bar{\mathcal{W}}_k; k \leq \lfloor nt \rfloor) \supset \sigma\left(\bar{\mathcal{W}}_n(r), \bar{Z}_n^{(u_n)}(r)\right)_{r \leq \lfloor nt \rfloor / n}.$$

Si $t' < t$, alors $t' \leq \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}$ pour n grand et

$$\left(\bar{\mathcal{W}}_n(r), \bar{Z}_n^{(u_n)}(r) \right)_{r \leq t'} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \left(\mathcal{W}(r), \widetilde{\mathcal{Z}}(r) \right)_{r \leq t'}.$$

Ainsi, par convergence dominée et une caractérisation classique de l'indépendance, $\mathcal{W}_{t+s} - \mathcal{W}_t \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_t$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que presque sûrement $\widetilde{\mathcal{Z}} - \mathcal{Y}$ est localement constant sur $\{t > u; \widetilde{\mathcal{Z}}(t) > \varepsilon\}$. Pour ce faire, soit $]a, b[$ une composante connexe (aléatoire) de cet ouvert. Puisque $\bar{Z}_n^{(u_n)} \rightarrow \widetilde{\mathcal{Z}}$ p.s. uniformément sur tout compact, il existe $N \in \mathbb{N}$ (aléatoire) tel que pour tout $n \geq N$, $\bar{Z}_n^{(u_n)}|_{]a, b[} > \frac{\varepsilon}{2}$. En particulier, pour tout $t \in \left[\frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n}, \frac{\lfloor nb \rfloor}{n}\right[$, $\bar{Z}_{nt}^{(\lfloor nu_n \rfloor)} > 0$. Donc $\bar{Z}^{(\lfloor nu_n \rfloor)}$ évolue comme \bar{Y} sur $\llbracket \lfloor na \rfloor + 1, \lfloor nb \rfloor \rrbracket$. Donc $\bar{Z}_n^{(u_n)} - \bar{\mathcal{Y}}_n$ est constant sur $]a + 1/n, b[$. Ainsi, $\widetilde{\mathcal{Z}} - \mathcal{Y}$ est p.s. constant sur $]a, b[$, donc localement constant sur $\{t > u; \widetilde{\mathcal{Z}}(t) > \varepsilon\}$. Ainsi,

$$\int_u^t \mathbf{1}_{\widetilde{\mathcal{Z}}(r) > \varepsilon} d(\widetilde{\mathcal{Z}} - \mathcal{Y})(r) = 0$$

On peut ensuite séparer l'intégrale en une intégrale par rapport à $\tilde{\mathcal{Z}}$ et une autre par rapport à \mathcal{Y} grâce au fait que \mathcal{W} est un \mathcal{G}_t mouvement brownien. Le même raisonnement s'applique pour les valeurs négatives en utilisant $-\mathcal{X}$ en lieu et place de \mathcal{Y} , ce qui donne

$$\int_u^t \mathbf{1}_{|\tilde{\mathcal{Z}}(r)| > \varepsilon} d\tilde{\mathcal{Z}}(r) = \int_u^t \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Z}}(r) > \varepsilon} d\mathcal{Y}(r) - \int_u^t \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Z}}(r) < -\varepsilon} d\mathcal{X}(r)$$

Puis, en laissant tendre ε vers 0 et en appliquant une convergence dominée stochastique, on se retrouve avec

$$\int_u^t \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Z}}(r) \neq 0} d\tilde{\mathcal{Z}}(r) = \int_u^t \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Z}}(r) > 0} d\mathcal{Y}(r) - \int_u^t \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Z}}(r) < 0} d\mathcal{X}(r)$$

Or $\tilde{\mathcal{Z}}$ est un mouvement brownien commençant au temps u , donc l'ensemble de ses zéros est de mesure de Lebesgue nulle p.s., d'où

$$\int_u^t \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Z}}(r) \neq 0} d\tilde{\mathcal{Z}}(r) = \tilde{\mathcal{Z}}(t)$$

Mais alors $\tilde{\mathcal{Z}}(\cdot + u)$ satisfait l'équation (5.1) dirigée par $\mathcal{W}(\cdot + u) - \mathcal{W}(u)$. Ainsi, par l'unicité trajectorielle, $\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}^{(u)}$ p.s.. Or par la convergence de $(\bar{\mathcal{Z}}_n^{(u_n)}, \bar{\mathcal{L}}_n^{(u_n)})$, $\tilde{\mathcal{L}}$ est le temps local de $\tilde{\mathcal{Z}}$, donc $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^{(u)}$ p.s. (car le temps local d'un mouvement brownien est une fonction mesurable de ce mouvement brownien). \square

5.1.2 Résultat de limite d'échelle conditionné

Comme dans la section 4, soient W_n uniforme sur \mathcal{W}_n , $Z_n = \text{WC}(W_n)$. Notons aussi $L_n = L_{Z_n} = \left(L_n^{(i)}(j) \right)_{1 \leq i \leq j \leq n}$ le processus des temps locaux de Z_n . Si $n \geq 1$ et $u \in]0, 1[$, on note

$$\forall t \in [0, 1], \mathcal{W}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2n}} W_n(nt), \mathcal{Z}_n^{(u)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2n}} Z_n^{(\lceil nu \rceil)}(nt), \mathcal{L}_n^{(u)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2n}} L_n^{(\lceil nu \rceil)}(nt)$$

où $W_n(nt)$, $Z_n^{(\lceil nu \rceil)}(nt)$ et $L_n^{(\lceil nu \rceil)}(nt)$ sont définis par interpolation linéaire en rajoutant les conventions $W_n(0) = (0, 0)$ et $Z_n^{(i)}(k) = L_n^{(i)}(k) = 0$ pour $k \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$. Soit \mathcal{W}_e une excursion brownienne de dimension 2 de corrélation $-1/2$ dans le quadrant positif (définie par la proposition 3.3). Notons $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, 1]}, \mathbb{P}_{\text{exc}})$ l'espace canonique complété associé à \mathcal{W}_e . Par les propositions 3.2 et 3.3,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} W_{n-1}(nt) \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{W}_e$$

où $W_{n-1}(nt)$ est encore défini par interpolation en rajoutant la convention $W_{n-1}(n) = (0, 0)$. On en déduit sans peine que \mathcal{W}_n converge en loi vers \mathcal{W}_e . Nous allons donc définir un processus continu de marches coalescentes à partir de \mathcal{W}_e . Comme \mathcal{W}_e est une semi-martingale, on peut considérer des intégrales stochastiques contre ce processus. On va transférer l'existence de solutions fortes et l'unicité trajectorielle de l'EDS dirigée par \mathcal{W}_e par la propriété d'absolue continuité (venant du corollaire 3.7) :

$$\mathcal{L}(\mathcal{W}_e|_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]} - \mathcal{W}_e(\varepsilon)) \ll \mathcal{L}(\mathcal{W}|_{[0, 1-2\varepsilon]}). \quad (5.3)$$

En fait, les deux mesures sont même équivalentes puisque $\alpha_\varepsilon > 0$, car l'intégrale définissant α_ε dans (3.1) est l'intégrale d'une fonction positive et non nulle (voir l'expression de g). Notons $\mathcal{F}_t^{(u)} = \sigma((\mathcal{W}_e(s) - \mathcal{W}_e(u))_{s \in [u, t]}) \vee \mathcal{N}$.

Théorème 5.5. *Pour tout $u \in]0, 1[$, il existe un processus $\mathcal{Z}_e^{(u)}$ continu $\mathcal{F}_t^{(u)}$ -adapté sur $[u, 1[$ tel que*

1. *Pour tout $u_0 \in]0, 1[$, $(\omega, u) \mapsto \mathcal{Z}_e^{(u)}|_{[u_0, 1[}$ est mesurable de $\Omega \times]0, u_0]$ dans $\mathcal{C}([u_0, 1[)$.*
2. *Pour tout $u \in]0, 1[$, $\mathcal{Z}_e^{(u)}$ est solution de l'EDS (5.2) dirigée par \mathcal{W}_e restreinte à $[u, 1[$ p.s.*
3. *Si $0 < u < r < 1$ et $\tilde{\mathcal{Z}}$ est un processus $\mathcal{F}_t^{(u)}$ -adapté satisfaisant l'EDS (5.2) dirigée par \mathcal{W}_e sur $[u, r]$, alors $\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}_e^{(u)}|_{[u, r]}$ p.s.*

Démonstration. Pour l'existence, l'idée est de prendre une solution de l'EDS (5.2) dirigée par \mathcal{W} et d'obtenir par l'absolue continuité (5.3) une solution de l'EDS (5.2) dirigée par \mathcal{W}_e . Plus précisément, si $0 < u < r < 1$, notons $\mathcal{R}_{u,r} \in \mathcal{C}([u, r])$ la fonction définie par

$$\forall t \in [u, r], \mathcal{R}_{u,r}(t) = F_{r-u}((\mathcal{W}_e(u+s) - \mathcal{W}_e(u))_{0 \leq s \leq r-u})(t-u),$$

où F_t est la fonction définie dans le théorème 5.1. Par l'absolue continuité (5.3), $\mathcal{R}_{u,r}$ est solution de (5.2) dirigée par \mathcal{W}_e . Par ailleurs, toujours par le théorème 5.1 et par absolue continuité, si $r' \in]r, 1[$, $\mathcal{R}_{u,r} = \mathcal{R}_{u,r'}|_{[u,r]}$ p.s.. Soit r_n une suite de $]u, 1[$ croissant strictement vers 1. On définit $\mathcal{Z}_e^{(u)} \in \mathcal{C}([u, 1])$ presque sûrement en posant pour tout n

$$\mathcal{Z}_e^{(u)}|_{[u, r_n]} = \mathcal{R}_{u, r_n}.$$

Alors p.s. $\mathcal{Z}^{(u)}$ est solution de (5.2) dirigée par \mathcal{W}_e sur $[u, 1[$. De plus, comme par définition $\mathcal{R}_{u,r}$ est $\mathcal{F}_r^{(u)}$ -mesurable, $\mathcal{Z}^{(u)}$ est $\mathcal{F}_t^{(u)}$ -adaptée. Montrons aussi la mesurabilité. Déjà, l'application $(\omega, u) \mapsto F_\infty((\mathcal{W}_{u+s} - \mathcal{W}_u)_{s \in [0, +\infty[})$ est mesurable. Donc, si $0 < u_0 < r < 1$,

$$\begin{aligned} \Omega \times]0, u_0] &\longrightarrow \mathcal{C}([0, r - u_0]) \\ (\omega, u) &\longmapsto (F_\infty((\mathcal{W}_{u+s} - \mathcal{W}_u)_{s \in [0, +\infty[}))|_{[0, r-u_0]} = F_{r-u}((\mathcal{W}_{u+s} - \mathcal{W}_u)_{s \in [0, r-u]})|_{[0, r-u_0]} \end{aligned}$$

est mesurable. Donc, en passant par l'espace canonique et par absolue continuité (toujours (5.3)),

$$\begin{aligned} \Omega \times]0, u_0] &\longrightarrow \mathcal{C}([u_0, r]) \\ (\omega, u) &\longmapsto \mathcal{R}_{u,r}|_{[u_0, r]} \end{aligned}$$

est mesurable, d'où la mesurabilité voulue en passant à la limite.

Pour l'unicité, l'idée est d'utiliser l'absolue continuité dans l'autre sens et d'appliquer l'unicité trajectorielle du théorème 5.1. Soient donc $\tilde{\mathcal{Z}}$ et \mathcal{Z} deux solutions adaptées de l'EDS (5.2) dirigée par \mathcal{W}_e sur $[u, r]$. Alors puisque ces solutions sont dans l'espace canonique, il existe deux fonctions mesurables $H, \tilde{H} : \mathcal{C}([u, r]) \longrightarrow \mathcal{C}([u, r])$ telles que

$$\mathcal{Z} = H((\mathcal{W}_e(s) - \mathcal{W}_e(u))_{s \in [u, r]}) \text{ et } \tilde{\mathcal{Z}} = \tilde{H}((\mathcal{W}_e(s) - \mathcal{W}_e(u))_{s \in [u, r]}).$$

Alors par absolue continuité dans l'autre sens, $H(\mathcal{W}|_{[0, r-u]}(\cdot - u))$ et $\tilde{H}(\mathcal{W}|_{[0, r-u]}(\cdot - u))$ sont solutions de (5.2) sur $[u, r]$. Ainsi, par l'unicité trajectorielle du théorème 5.1,

$$H(\mathcal{W}|_{[0, r-u]}(\cdot - u)) = \tilde{H}(\mathcal{W}|_{[0, r-u]}(\cdot - u)) \text{ p.s.}$$

Donc, en utilisant l'absolue continuité (5.3), $\mathcal{Z} = \tilde{\mathcal{Z}}$ p.s. □

On prolonge continûment $\mathcal{Z}_e^{(u)}$ à $]0, 1[$ tout entier en posant $\mathcal{Z}_e^{(u)}(t) = 0$ pour tout $t \in [0, u]$. Le prolongement préserve la mesurabilité :

Proposition 5.6. *L'application $(\omega, u, t) \mapsto \mathcal{Z}_e^{(u)}(t)$ de $\Omega \times]0, 1[\times]0, 1[$ dans \mathbb{R} est mesurable.*

Démonstration. Par le théorème 5.5, pour tout $u_0 \in]0, 1[$, $(\omega, u) \mapsto \mathcal{Z}_e^{(u)}|_{]u_0, 1[}$ est mesurable de $\Omega \times]0, u_0]$ dans $\mathcal{C}([u_0, 1[)$. De plus, par le prolongement, pour tout $u_0 \in]0, 1[$, $(\omega, u) \mapsto \mathcal{Z}_e^{(u)}|_{]0, u_0[}$ est mesurable de $\Omega \times [u_0, 1[$ dans $\mathcal{C}([0, u_0])$ car c'est la fonction nulle. Ainsi, $(\omega, u, t) \mapsto \mathcal{Z}_e^{(u)}(t)$ est mesurable sur tous les ensembles de la forme $]0, u_0[\times [u_0, 1[\cup [u_0, 1[\times]0, u_0[$. Mais en prenant une union dénombrable d'ensembles de cette forme pour $u_0 \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}$, on obtient $[0, 1]^2$ tout entier à un ensemble de mesure nulle près. \square

De plus, de même qu'auparavant, toujours par Fubini-Tonelli, p.s. pour Lebesgue presque tout $u \in]0, 1[$, $\mathcal{Z}_e^{(u)}$ est solution de l'EDS (5.2) dirigée par \mathcal{W}_e .

Définition 5.7. $(\mathcal{Z}_e^{(u)})_{u \in]0, 1[}$ est appelé le processus continu de marches coalescentes dirigé par \mathcal{W}_e .

Notons $(\mathcal{L}_e^{(u)}(t))_{u \leq t < 1}$ le temps local en 0 de la semi-martingale $\mathcal{Z}_e^{(u)}$ sur $[u, 1[$. On pose par convention $\mathcal{L}_e^{(u)}(t) = 0$ pour $t \in [0, u]$.

Pour la limite d'échelle conditionnée, on commence comme dans le cas non conditionné par se concentrer sur une seule trajectoire.

Proposition 5.8. *Soit $u \in]0, 1[$. Alors*

$$\mathcal{Z}_e^{(u)}(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1]{p.s.} 0,$$

ce qui permet de prolonger $\mathcal{Z}_e^{(u)}$ par continuité en 1. De plus, dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$,

$$\left(\mathcal{W}_n, \mathcal{Z}_n^{(u)}, \mathcal{L}_n^{(u)}|_{[0, 1[} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{loi} \left(\mathcal{W}_e, \mathcal{Z}_e^{(u)}, \mathcal{L}_e^{(u)} \right).$$

Démonstration. On a déjà la convergence en loi du premier terme. Soit $\varepsilon \in]0, u \wedge (1 - u)[$. Alors $\left((\mathcal{W}_n - \mathcal{W}_n(u))|_{[u, 1 - \varepsilon]}, \mathcal{Z}_n^{(u)}|_{[u, 1 - \varepsilon]}, \mathcal{L}_n^{(u)}|_{[u, 1 - \varepsilon]} \right)$ est une fonction de $(W_n(k) - W_n(\lfloor \varepsilon n \rfloor))_{\lfloor \varepsilon n \rfloor \leq k \leq \lfloor (1 - \varepsilon)n \rfloor}$. Soit h une fonction continue bornée à valeurs réelles définie sur $\mathcal{C}([u, 1 - \varepsilon], \mathbb{R}^2) \times \mathcal{C}([u, 1 - \varepsilon], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([u, 1 - \varepsilon], \mathbb{R})$. Considérons

$$\mathbb{E} h \left((\mathcal{W}_n - \mathcal{W}_n(u))|_{[u, 1 - \varepsilon]}, \mathcal{Z}_n^{(u)}|_{[u, 1 - \varepsilon]}, \mathcal{L}_n^{(u)}|_{[u, 1 - \varepsilon]} \right).$$

Alors, en appliquant d'abord la proposition 3.2 pour se ramener aux objets $\overline{W}, \overline{Z}$ et $\overline{\mathcal{L}}$, puis le lemme 3.4, on se ramène à une espérance d'une fonction de $\overline{W}_{n+1}, \overline{Z}_{n+1}^{(u_n)}, \overline{\mathcal{L}}_{n+1}^{(u_n)}$ fois $\alpha_{n+1, \lfloor \varepsilon n \rfloor}^{0,0}$, où $u_n = \frac{\lfloor nu \rfloor - \lfloor n\varepsilon \rfloor}{n}$. Puis on fait tendre n vers l'infini et on applique le lemme 3.5 et le théorème 5.4, pour obtenir une convergence vers

$$\mathbb{E} \left(h \left(\mathcal{W}|_{[u - \varepsilon, 1 - 2\varepsilon]} - \mathcal{W}(u - \varepsilon), \mathcal{Z}^{(u - \varepsilon)}|_{[u - \varepsilon, 1 - 2\varepsilon]}, \mathcal{L}^{(u - \varepsilon)}|_{[u - \varepsilon, 1 - 2\varepsilon]} \right) \alpha_\varepsilon \left(- \inf_{[0, 1 - 2\varepsilon]} \mathcal{W}, \mathcal{W}_{1 - 2\varepsilon} \right) \right).$$

En appliquant enfin le corollaire 3.7, on conclut que

$$\left((\mathcal{W}_n - \mathcal{W}_n(u))|_{[u,1-\varepsilon]}, \mathcal{Z}_n^{(u)}|_{[u,1-\varepsilon]}, \mathcal{L}_n^{(u)}|_{[u,1-\varepsilon]} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \left((\mathcal{W}_e - \mathcal{W}_e(u))|_{[u,1-\varepsilon]}, \mathcal{Z}_e^{(u)}|_{[u,1-\varepsilon]}, \mathcal{L}_e^{(u)}|_{[u,1-\varepsilon]} \right)$$

En particulier, par Prokhorov et puisqu'un produit de compacts est compact, la famille

$$\left(\mathcal{W}_n, \left((\mathcal{W}_n - \mathcal{W}_n(u))|_{[u,1-\varepsilon]}, \mathcal{Z}_n^{(u)}|_{[u,1-\varepsilon]}, \mathcal{L}_n^{(u)}|_{[u,1-\varepsilon]} \right)_{\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap]0, u \wedge (1-u)[} \right)$$

est tendue. La seule limite en loi possible est

$$\left(\mathcal{W}_e, \left((\mathcal{W}_e - \mathcal{W}_e(u))|_{[u,1-\varepsilon]}, \mathcal{Z}_e^{(u)}|_{[u,1-\varepsilon]}, \mathcal{L}_e^{(u)}|_{[u,1-\varepsilon]} \right)_{\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap]0, u \wedge (1-u)[} \right)$$

En effet, la restriction à un sous-intervalle est une fonction continue donc la limite en loi d'une sous-suite de $(\mathcal{W}_n, (\mathcal{W}_n - \mathcal{W}_n(u))|_{[u,1-\varepsilon]})$ ne peut être que $(\mathcal{W}_e, (\mathcal{W}_e - \mathcal{W}_e(u))|_{[u,1-\varepsilon]})$. Par le théorème de représentation de Skorokhod, on peut donc se placer dans un espace de probabilité sur lequel p.s.

$$\mathcal{W}_n \longrightarrow \mathcal{W}_e \text{ dans } \mathcal{C}([0, 1]) \text{ et } \forall \varepsilon \in]0, u \wedge (1-u)[\cap \mathbb{Q}, \begin{cases} \mathcal{Z}_n^{(u)} \longrightarrow \mathcal{Z}_e^{(u)} \\ \mathcal{L}_n^{(u)} \longrightarrow \mathcal{L}_e^{(u)} \end{cases} \text{ dans } \mathcal{C}([u, 1-\varepsilon]).$$

Mais on voudrait en plus une convergence uniforme de $\mathcal{Z}_n^{(u)}$ sur $[u, 1]$. Pour cela, on utilise le fait que $-X_n(t) \leq \mathcal{Z}_n^{(k)}(t) \leq Y_n(t)$ pour tout $t \geq k$, qui se vérifie par une récurrence facile sur t . On a déjà

$$\sup_{k, \ell \geq n} \left\| \mathcal{Z}_k^{(u)} - \mathcal{Z}_\ell^{(u)} \right\|_{[0,1]} \leq 2 \sup_{k \geq n} \left\| \mathcal{Z}_k^{(u)} - \mathcal{Z}_e^{(u)} \right\|_{[0,1-\varepsilon]} + 2 \sup_{k \geq n} \left\| \mathcal{Z}_k^{(u)} \right\|_{[1-\varepsilon, 1]}.$$

Or

$$\left\| \mathcal{Z}_k^{(u)} \right\|_{[1-\varepsilon, 1]} \leq \|\mathcal{W}_k\|_{[1-\varepsilon, 1]} \leq \|\mathcal{W}_k - \mathcal{W}_e\|_{[1-\varepsilon, 1]} + \|\mathcal{W}_e\|_{[1-\varepsilon, 1]}$$

où la norme dans $\mathcal{C}([1-\varepsilon, 1], \mathbb{R}^2)$ est définie comme la norme infinie de la norme 1. Ainsi,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k, \ell \geq n} \left\| \mathcal{Z}_k^{(u)} - \mathcal{Z}_\ell^{(u)} \right\|_{[0,1]} \leq \|\mathcal{W}_e\|_{[1-\varepsilon, 1]},$$

puis on fait tendre ε vers 0. Ainsi, p.s. $(\mathcal{Z}_n^{(u)})_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, donc converge uniformément vers une limite qui coïncide avec $\mathcal{Z}^{(u)}$ sur $[0, 1[$. Mais comme on a montré que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\| \mathcal{Z}_k^{(u)} \right\|_{[1-\varepsilon, 1]} = 0,$$

on a en particulier $\mathcal{Z}_n^{(u)}(1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} 0$, d'où le prolongement par continuité voulu. \square

Remarquons que par Prokhorov et par le fait que $(\mathcal{Z}_e^{(u)}, \mathcal{L}_e^{(u)})$ est une fonction mesurable de \mathcal{W}_e , on a la convergence en loi pour un nombre fini de trajectoires, et donc aussi pour un nombre dénombrable.

Corollaire 5.9. *Soit $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de réels. Alors*

$$\left(\mathcal{W}_n, \left(\mathcal{Z}_n^{(u_i)}, \mathcal{L}_n^{(u_i)} \right)_{i \in \mathbb{N}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \left(\mathcal{W}_e, \left(\mathcal{Z}_e^{(u_i)}, \mathcal{L}_e^{(u_i)} \right)_{i \in \mathbb{N}} \right).$$

On peut aussi prendre les trajectoires de manière aléatoire par convergence dominée :

Corollaire 5.10. *Soit $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de v.a. uniformes sur $[0, 1]$ i.i.d. indépendantes du reste. Alors*

$$\left(\mathcal{W}_n, \left(\mathcal{Z}_n^{(u_i)}, \mathcal{L}_n^{(u_i)} \right)_{i \in \mathbb{N}} \Big|_{[0,1[} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \left(\mathcal{W}_e, \left(\mathcal{Z}_e^{(u_i)}, \mathcal{L}_e^{(u_i)} \right)_{i \in \mathbb{N}} \right).$$

5.2 Limite d'échelle des permutations de Baxter vues comme des permutons

Un moyen d'observer les limites d'échelles de permutations est de les voir comme des permutons.

Définition 5.11. *Un permuton est une mesure de probabilité μ sur $[0, 1] \times [0, 1]$ dont les marginales sont uniformes : $\mu([a, b] \times [0, 1]) = b - a$ et $\mu([0, 1] \times [a, b]) = b - a$ pour $0 \leq a \leq b \leq 1$.*

On note \mathcal{M} l'ensemble des permutons muni de la topologie de la convergence étroite. C'est un espace compact comme fermé d'un espace compact.

Proposition 5.12. *L'espace \mathcal{M} est métrisable par la distance d_{\square} définie par*

$$d_{\square}(\mu, \mu') = \sup_{R \text{ rectangle de } [0,1]^2} |\mu(R) - \mu'(R)|.$$

Démonstration. Supposons que μ_n converge étroitement vers μ . Soit $\varepsilon > 0$. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^m} \leq \varepsilon$. Soit R un rectangle de $[0, 1]^2$ dont les coordonnées des extrémités sont de la forme $\frac{k}{2^m}$ avec $k \in \mathbb{N}$. Par le théorème de Portemanteau, $\limsup_n \mu_n(R) \leq \mu(R)$. De plus, en notant R^ε l' ε -voisinage de R , on a par Portemanteau $\liminf_n \mu_n(R^\varepsilon) \geq \mu(R^\varepsilon) \geq \mu(R)$. Or $\mu_n(R^\varepsilon) \leq \mu_n(R) + 4\varepsilon$. Ainsi, pour n assez grand, pour tout rectangle ayant des coordonnées de la forme $k/2^m$, $|\mu_n(R) - \mu(R)| \leq 5\varepsilon$. Mais alors, en approximant, on a pour tout rectangle R de $[0, 1]^2$

$$|\mu_n(R) - \mu(R)| \leq \frac{4}{2^m} + 5\varepsilon + \frac{4}{2^m} \leq 9\varepsilon.$$

Réciproquement, si $d_{\square}(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$, soient $\varepsilon > 0$ et $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On l'approche par $g(x, y) = f\left(\left\lfloor \frac{x}{\eta} \right\rfloor \eta, \left\lfloor \frac{y}{\eta} \right\rfloor \eta\right)$ uniformément à ε près. Puisque g est une combinaison linéaire d'indicatrices de rectangles, $\mu_n(g) \rightarrow \mu(g)$. Donc

$$\limsup_n |\mu_n(f) - \mu(f)| \leq 2\varepsilon.$$

□

Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on peut lui associer un permuton $\mu_\sigma = n \sum_{i=1}^n \text{Leb}_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{\sigma(i)-1}{n}, \frac{\sigma(i)}{n}\right]}$. Par ailleurs, si $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) \in [0, 1]^2$ ont des coordonnées distinctes, notons $(x_{(1)}, y_{(1)}), \dots, (x_{(k)}, y_{(k)})$ la suite réordonnée en abscisses croissantes : $x_{(1)} < \dots < x_{(n)}$. On peut alors définir la permutation σ induite par l'ensemble $\{(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)\}$ par

$$\sigma(i) < \sigma(j) \iff y_{(i)} < y_{(j)}.$$

Le lemme d'approximation ci-dessous nous sera utile dans la suite. Il montre que la permutation induite par des variables aléatoires simulant un permuton approxime très bien ce permuton.

Lemme 5.13. (lemme 2.3 de [4], admis) Si ν est un permuton aléatoire, soit $(X_i, Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille de v.a.i.i.d. de loi ν conditionnellement à ν . Notons $\text{Perm}_k(\nu)$ la permutation induite par l'ensemble $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_k, Y_k)\}$. Alors il existe un rang k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, pour tout permuton aléatoire ν ,

$$\mathbb{P} \left(d_{\square} (\mu_{\text{Perm}_k(\nu)}, \nu) \geq \frac{16}{k^4} \right) \leq \frac{1}{2} e^{-\sqrt{k}}$$

Construisons maintenant le permuton limite à partir du processus continu de marches coalescentes $\mathcal{Z}_e = \left(\mathcal{Z}_e^{(t)} \right)_{t \in]0,1[}$. On définit une relation binaire aléatoire $\leq_{\mathcal{Z}_e}$ sur $]0,1[$ par

$$\begin{cases} t \leq_{\mathcal{Z}_e} t & \forall t \in]0,1[, \\ t \leq_{\mathcal{Z}_e} s & \text{pour tous } 0 < t < s < 1 \text{ tels que } \mathcal{Z}_e^{(t)}(s) < 0, \\ s \leq_{\mathcal{Z}_e} t & \text{pour tous } 0 < t < s < 1 \text{ tels que } \mathcal{Z}_e^{(t)}(s) \geq 0. \end{cases}$$

Remarquons que par cette définition, l'application $(\omega, t, s) \mapsto \mathbf{1}_{t \leq_{\mathcal{Z}_e} s}(\omega)$ est mesurable car $(\omega, t, s) \mapsto \mathcal{Z}_e^{(t)}(s)(\omega)$ est mesurable par la proposition 5.6.

Proposition 5.14. La relation $\leq_{\mathcal{Z}_e}$ est antisymétrique et réflexive. De plus, p.s. il existe $A \subset [0,1]^2$ de mesure pleine tel que $\leq_{\mathcal{Z}_e} \upharpoonright_A$ est transitive.

Démonstration. L'antisymétrie et la réflexivité sont immédiates. Soient $0 < r \leq s \leq t < 1$ tels que $\mathcal{Z}_e^{(r)}(s) \leq \mathcal{Z}_e^{(s)}(s)$. Alors $\mathcal{Z}_e^{(r)}(t) \leq \mathcal{Z}_e^{(s)}(t)$ p.s. En effet, si on avait $\mathcal{Z}_e^{(r)}(t) > \mathcal{Z}_e^{(s)}(t)$ alors en échangeant trajectoires quand elles se croisent pour la première fois, on obtient une autre solution de l'EDS, ce qui contredit l'unicité. Ainsi,

$$0 = \int_{0 \leq r \leq s \leq 1} \mathbb{E} \mathbf{1}_{\mathcal{Z}_e^{(r)}(s) \leq \mathcal{Z}_e^{(s)}(s) \text{ et } \exists t \in [s,1], \mathcal{Z}_e^{(r)}(t) > \mathcal{Z}_e^{(s)}(t)} dr ds$$

Donc, par Fubini-Tonelli, pour Lebesgue presque tous $0 < r \leq s < 1$, si $\mathcal{Z}_e^{(r)}(s) \leq \mathcal{Z}_e^{(s)}(s)$, alors $\forall t \geq s, \mathcal{Z}_e^{(r)}(t) \leq \mathcal{Z}_e^{(s)}(t)$. De même, p.s. pour Lebesgue presque tous $0 < r \leq s < 1$, si $\mathcal{Z}_e^{(r)}(s) \geq \mathcal{Z}_e^{(s)}(s)$, alors $\forall t \geq s, \mathcal{Z}_e^{(r)}(t) \geq \mathcal{Z}_e^{(s)}(t)$. Notons \tilde{A} l'ensemble des couples $r \leq s$ qui vérifient les deux conditions ci-dessus. Notons maintenant $A = \{(r, s); (r, s) \in \tilde{A} \text{ ou } (s, r) \in \tilde{A}\}$. Alors p.s. $\text{Leb}(A) = 1$. Soient $0 < r < s < t < 1$ tels que $(r, s) \in A$ et $(s, t) \in A$. On raisonne alors de la même manière que dans la preuve de la proposition 2.3 pour montrer la transitivité entre r, s et t . \square

Puisque si $\sigma = \text{CP}(Z)$ avec $Z \in \mathcal{C}_n$, on a $\sigma(i) = \#\{j \in [1, n]; j \leq_Z i\}$, définissons la fonction $\varphi_{\mathcal{Z}_e} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, qui sera en quelque sorte la "permutation associée à l'ordre $\leq_{\mathcal{Z}_e}$ ", par

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{Z}_e}(t) &= \text{Leb}\{x \in [0, 1]; x \leq_{\mathcal{Z}_e} t\} = \text{Leb}\{x \in [0, t]; \mathcal{Z}_e^{(x)}(t) < 0\} + \text{Leb}\{x \in [t, 1]; \mathcal{Z}_e^{(t)}(x) \geq 0\} \\ &= \int_0^1 \mathbf{1}_{x \leq_{\mathcal{Z}_e} t}(\omega) dx. \end{aligned}$$

Comme $(\omega, t, s) \mapsto \mathbf{1}_{t \leq_{\mathcal{Z}_e} s}(\omega)$ est mesurable, $(\omega, t) \mapsto \varphi_{\mathcal{Z}_e}(t)(\omega)$ est mesurable.

Définition 5.15. Le permuton de Baxter est la mesure de probabilité aléatoire sur $[0, 1]^2$ définie comme le poussé en avant de $\text{Leb}_{[0,1]}$ par $(\text{Id}, \varphi_{\mathcal{Z}_e})$:

$$\mu_B = \text{Leb}_{[0,1]} \circ (\text{Id}, \varphi_{\mathcal{Z}_e})^{-1}.$$

C'est une mesure ayant pour support l'adhérence du graphe de $\varphi_{\mathcal{Z}_e}$.

Décrivons plus précisément μ_B et $\leq_{\mathcal{Z}_e}$.

Lemme 5.16. *On a les trois résultats ci-dessous :*

1. *Pour tous $0 < t < s < 1$, $\mathcal{Z}_e^{(t)}(s) \neq 0$ p.s.*
2. *μ_B est p.s. un permuton, ce qui est équivalent à dire que p.s. $\varphi_{\mathcal{Z}_e} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est un isomorphisme d'espaces mesurés.*
3. *p.s. pour presque tous $t < s \in [0, 1]$, on a soit $\mathcal{Z}_e^{(t)}(s) > 0$ et $\varphi_{\mathcal{Z}_e}(s) < \varphi_{\mathcal{Z}_e}(t)$, soit $\mathcal{Z}_e^{(t)}(s) < 0$ et $\varphi_{\mathcal{Z}_e}(s) > \varphi_{\mathcal{Z}_e}(t)$*

Démonstration. Montrons 1. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $0 < t < s < 1 - \varepsilon < 1$. En appliquant la propriété d'absolue continuité (5.3) et en remarquant que

$$\begin{cases} \left(\mathcal{Z}_e^{(t)}(t+r) \right)_{0 \leq r \leq 1-t-\varepsilon} = F_{1-\varepsilon-t}((\mathcal{W}_e(t+r') - \mathcal{W}_e(t))_{0 \leq r' \leq 1-t-\varepsilon}) \\ \left(\mathcal{Z}^{(t)}(t+r) \right)_{0 \leq r \leq 1-t-\varepsilon} = F_{1-\varepsilon-t}((\mathcal{W}(t+r') - \mathcal{W}(t))_{0 \leq r' \leq 1-t-\varepsilon}), \end{cases}$$

on en déduit que que

$$\mathcal{L} \left(\left(\mathcal{Z}_e^{(t)}(t+r) \right)_{0 \leq r \leq 1-t-\varepsilon} \right) \ll \mathcal{L} \left(\left(\mathcal{Z}^{(t)}(t+r) \right)_{0 \leq r \leq 1-t-\varepsilon} \right) = \mathcal{L} (B|_{[0, 1-t-\varepsilon]}).$$

Ainsi, si $1 > s > t > 0$ p.s. $\mathcal{Z}_e^{(t)}(s) \neq 0$.

Pour 2., μ_B est évidemment une probabilité et sa première marginale est bien uniforme. Il reste à voir que p.s. pour tout $A \in \mathcal{B}([0, 1])$

$$\mu_B([0, 1] \times A) = \text{Leb}(A),$$

c'est-à-dire que p.s. $\text{Leb}_{[0,1]} \circ \varphi_{\mathcal{Z}_e}^{-1} = \text{Leb}_{[0,1]}$. Soient U_i pour $i \in \mathbb{N}^*$ des v.a.i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes de \mathcal{W}_e . Posons pour tout $k \geq 2$ et tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$

$$U_{j,k} = \frac{1}{k-1} \#\{i \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \{j\}; U_i \leq_{\mathcal{Z}_e} U_j\} = \frac{1}{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq j}} \mathbf{1}_{U_i \leq_{\mathcal{Z}_e} U_j}$$

Conditionnellement à \mathcal{W}_e et U_1 , les $\mathbf{1}_{U_i \leq_{\mathcal{Z}_e} U_1}$ sont des Bernoulli i.i.d. de paramètre $\varphi_{\mathcal{Z}_e}(U_1)$ par définition de $\varphi_{\mathcal{Z}_e}$. Ainsi, $U_{1,k} \rightarrow \varphi_{\mathcal{Z}_e}(U_1)$ p.s. quand $k \rightarrow +\infty$. Par ailleurs, la famille (U_i) est échangeable et, conditionnellement à \mathcal{W}_e , $U_{j,k}$ est la position de U_j parmi les U_i selon \mathcal{Z}_e . Or p.s. les U_i sont distincts. Ainsi, pour toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f(U_{1,k}) &= \mathbb{E} \frac{1}{k} (f(U_{1,k}) + \dots + f(U_{k,k})) \\ &= \frac{1}{k} \left(f(0) + \dots + f\left(\frac{k-1}{k}\right) \right) \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx, \end{aligned}$$

ce qui veut dire que $U_{1,k}$ converge en loi vers $\mathcal{U}([0, 1])$. Ainsi, $\varphi_{\mathcal{Z}_e}(U_1) \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

Montrons pour finir le troisième point. Soient $U \perp\!\!\!\perp V \sim \mathcal{U}([0, 1])$ indépendantes de \mathcal{W}_e . Si $U < V$ et $\mathcal{Z}_e^{(U)}(V) > 0$, alors $V \leq_{\mathcal{Z}_e} U$, donc $\varphi_{\mathcal{Z}_e}(V) \leq \varphi_{\mathcal{Z}_e}(U)$ p.s. (car $\leq_{\mathcal{Z}_e}$ est p.s. une relation d'ordre sur un ensemble de mesure pleine). À l'inverse, si $U < V$ et $\mathcal{Z}_e^{(U)}(V) < 0$, alors $U \leq_{\mathcal{Z}_e} V$ et donc $\varphi_{\mathcal{Z}_e}(U) \leq \varphi_{\mathcal{Z}_e}(V)$ p.s.. Mais p.s. par le point 1. on est forcément dans un de ces deux cas. On exclut aussi le cas d'égalité $\varphi_{\mathcal{Z}_e}(V) = \varphi_{\mathcal{Z}_e}(U)$ puisque par 2., $\varphi_{\mathcal{Z}_e}(V) \perp\!\!\!\perp \varphi_{\mathcal{Z}_e}(U)$ et sont toutes les deux uniformes sur $[0, 1]$. □

Établissons maintenant le résultat limite de cette sous-section. On se donne comme précédemment $W_n \sim \mathcal{U}(\mathcal{W}_n)$, $Z_n = \text{WC}(W_n)$, $\sigma_n = \text{CP}(Z_n)$.

Théorème 5.17. *Soit $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de v.a.i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$ indépendante du reste. Alors*

$$\left(\mu_{\sigma_n}, \mathcal{W}_n, \left(\mathcal{Z}_n^{(u_i)}, \mathcal{L}_n^{(u_i)} \Big|_{[0, 1[} \right)_{i \in \mathbb{N}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \left(\mu_B, \mathcal{W}_e, \left(\mathcal{Z}_e^{(u_i)}, \mathcal{L}_e^{(u_i)} \right)_{i \in \mathbb{N}} \right).$$

Démonstration. Par Prokhorov et par le fait que \mathcal{M} est compact, la famille ci-dessus est tendue. Il ne reste plus qu'à identifier les limites possibles. Supposons que le long d'une sous-suite

$$\left(\mu_{\sigma_n}, \mathcal{W}_n, \left(\mathcal{Z}_n^{(u_i)}, \mathcal{L}_n^{(u_i)} \Big|_{[0, 1[} \right)_{i \in \mathbb{N}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \left(\tilde{\mu}, \mathcal{W}_e, \left(\mathcal{Z}_e^{(u_i)}, \mathcal{L}_e^{(u_i)} \right)_{i \in \mathbb{N}} \right).$$

Vérifions que p.s. $\tilde{\mu} = \mu_B$. Par le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer la convergence presque sûre. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons ρ_n^k la permutation induite par σ_n sur les indices $[nu_1], \dots, [nu_k]$ (s'ils sont distincts). Remarquons que $\rho_n^k = \text{Perm}_k(\mu_{\sigma_n})$. En effet, soient v_i pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ des v.a.i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes du reste, alors conditionnellement à σ_n ,

$$\left(u_i, \frac{\sigma_n([nu_i]) - v_i}{n} \right) \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mu_{\sigma_n}$$

et ρ_n^k est la permutation induite par les points $\left(u_i, \frac{\sigma_n([nu_i]) - v_i}{n} \right)$ pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Notons, si les u_1, \dots, u_k sont distincts, $u_{(1)} < \dots < u_{(k)}$ la famille réordonnée. Puisque $\mathcal{Z}_n^{(u)} \left(\frac{k}{n} \right) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \mathcal{Z}_n^{([nu])}(k)$, on a pour tous $i < j \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$\text{sgn} \left(\mathcal{Z}_n^{([nu_{(i)})]}([nu_{(j)}]) \right) = \text{sgn} \left(\mathcal{Z}_n^{(u_{(i)})} \left(\frac{[nu_{(j)}]}{n} \right) \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \text{sgn} \left(\mathcal{Z}_e^{(u_{(i)})}(u_{(j)}) \right). \quad (5.4)$$

La convergence ci-dessus vient du fait que sgn est p.s. continue en $\mathcal{Z}_e^{(u_{(i)})}(u_{(j)})$ puisque par le lemme 5.16 $\mathcal{Z}_e^{(u_{(i)})}(u_{(j)}) \neq 0$ p.s. car p.s. $u_{(i)} < u_{(j)}$ et car les u_i sont indépendants de \mathcal{Z}_e . Mais les signes à gauche de l'équation (5.4) pour $i < j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ déterminent l'ordre induit par \leq_{Z_n} sur les $[nu_1], \dots, [nu_k]$, et donc ρ_n^k . À droite de (5.4), les termes limites déterminent eux aussi une permutation ρ^k telle que

$$\rho^k(i) < \rho^k(j) \iff \mathcal{Z}_e^{(u_{(i)})}(u_{(j)}) < 0 \iff \varphi_{\mathcal{Z}_e}(u_{(i)}) < \varphi_{\mathcal{Z}_e}(u_{(j)}),$$

où la dernière équivalence (presque sûre) provient du lemme 5.16. Ainsi, ρ^k est la permutation induite par $(u_i, \varphi_{\mathcal{Z}_e}(u_i))_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$. L'équation (5.4) se réinterprète alors comme la convergence p.s. de

ρ_n^k vers ρ^k . Or, par le lemme 5.13 appliqué à $\rho_n^k = \text{Perm}_k(\mu_{\sigma_n})$, pour k assez grand (mais fixé pour l'instant),

$$\mathbb{P} \left(d_{\square}(\mu_{\rho_n^k}, \mu_{\sigma_n}) > 16k^{-\frac{1}{4}} \text{ ou } \rho_n^k \text{ n'est pas définie} \right) \leq \frac{1}{2}e^{-\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

En effet,

$$\mathbb{P}(\exists i \neq j \in \llbracket 1, k \rrbracket; \lceil nu_i \rceil = \lceil nu_j \rceil) \leq \frac{k^2}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or $\rho_n^k \rightarrow \rho^k$ et $\mu_{\sigma_n} \rightarrow \tilde{\mu}$ p.s. quand $n \rightarrow +\infty$, ainsi par le lemme de Fatou

$$\mathbb{P} \left(d_{\square}(\mu_{\rho^k}, \tilde{\mu}) > 16k^{-\frac{1}{4}} \right) \leq \frac{1}{2}e^{-\sqrt{k}}.$$

En sommant sur k et en appliquant Borel-Cantelli, on en déduit que

$$\mu_{\rho^k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \tilde{\mu}.$$

Or, par définition de μ_B et la caractérisation de ρ^k , $\rho^k = \text{Perm}_k(\mu_B)$. Donc, toujours par le lemme 5.13,

$$\mathbb{P} \left(d_{\square}(\mu_{\rho^k}, \mu_B) > 16k^{-\frac{1}{4}} \right) \leq \frac{1}{2}e^{-\sqrt{k}},$$

d'où

$$\mu_{\rho^k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \mu_B.$$

Ainsi, $\tilde{\mu} = \mu_B$ p.s. □

5.3 Limite d'échelle des orientations bipolaires

La convergence en loi de \mathcal{W}_n vers \mathcal{W}_e peut être réinterprétée comme la convergence en loi au sens de Gromov-Hausdorff des arbres $T(m_n)$ et $T(m_n^{**})$ vus comme des arbres continus et correctement renormalisés vers un couple d'arbres browniens. On aimerait avoir aussi un résultat de limite d'échelle des cartes vus comme des espaces métriques avec deux racines (les deux pôles) munis de deux explorations par des chemins càdlàg. L'article [11] décrit l'objet limite comme un recollement de ces deux arbres browniens au moyen des excursions browniennes qui les définissent. Si $m \in \mathcal{O}_n$, on peut aussi obtenir m (vue comme un espace dont les arêtes sont des copies de l'intervalle $[0, 1]$) en recollant les arbres $T(m)$ et $T(m^{**})$ (vus comme des arbres continus) d'une bonne manière. Ce recollement se fait à l'aide des deux processus de hauteur (dont l'un est renversé) de m . Commençons par définir une fonction qui à deux fonctions càdlàg associe un espace métrique compact.

Définition 5.18. Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions càdlàg (donc bornées). Soit $C > 0$ assez grand de sorte que $C - g > f$. Soit G l'union des graphes de $C - g$ et de f (partie relativement compacte de \mathbb{R}^2). On définit la relation d'équivalence \mathcal{R} sur l'adhérence \bar{G} de G comme la plus petite relation d'équivalence telle que :

- pour tout $t \in [0, 1]$, $(t, f(t))\mathcal{R}(t, C - g(t))$,
- si $s < t \in [0, 1]$, si $f(s) = f(t)$ et, pour tout $u \in]s, t[$, $f(u) > f(s)$, alors $(s, f(s))\mathcal{R}(t, f(t))$,
- si $s < t \in [0, 1]$, si $g(s) = g(t)$ et, pour tout $u \in]s, t[$, $g(u) > g(s)$, alors $(s, C - g(s))\mathcal{R}(t, C - g(t))$.

Notons $d_{\mathcal{R}}$ la distance sur \overline{G} associée à \mathcal{R} définie par

$$d_{\mathcal{R}}(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^k d(p_i, q_{i+1}); k \in \mathbb{N}, (p_i)_{0 \leq i \leq k}, (q_i)_{1 \leq i \leq k+1} \in G^{k+1}, p_0 = x, p_{k+1} = y \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, p_i \mathcal{R} q_i \right\}.$$

On définit alors l'espace quotient $M(f, g) = \overline{G}/d_{\mathcal{R}}$ obtenu en identifiant les points à distance nulle. On peut identifier deux points (correspondant aux pôles) sur cet espace métrique : la classe d'équivalence des points d'ordonnée minimale et la classe d'équivalence des points d'ordonnée maximale. De plus, si on voit f et g à valeurs dans le quotient, ces deux fonctions définissent des explorations càdlàg de $M(f, g)$.

Introduisons maintenant les fonctions f et g que nous allons utiliser pour récupérer l'orientation bipolaire à un changement d'échelle près. Soient $m \in \mathcal{O}_n$ et $W = (X, Y) = \text{OW}(m)$. Posons

$$\forall t \in [0, 1[, f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2n}}(X_{\lfloor nt \rfloor + 1} + (nt - \lfloor nt \rfloor)) \text{ et } g_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2n}}(Y_{\lfloor nt \rfloor + 1} + (1 + \lfloor nt \rfloor - nt)).$$

On prolonge ces deux fonctions dessinées en figure 12 par continuité à $[0, 1]$ tout entier.

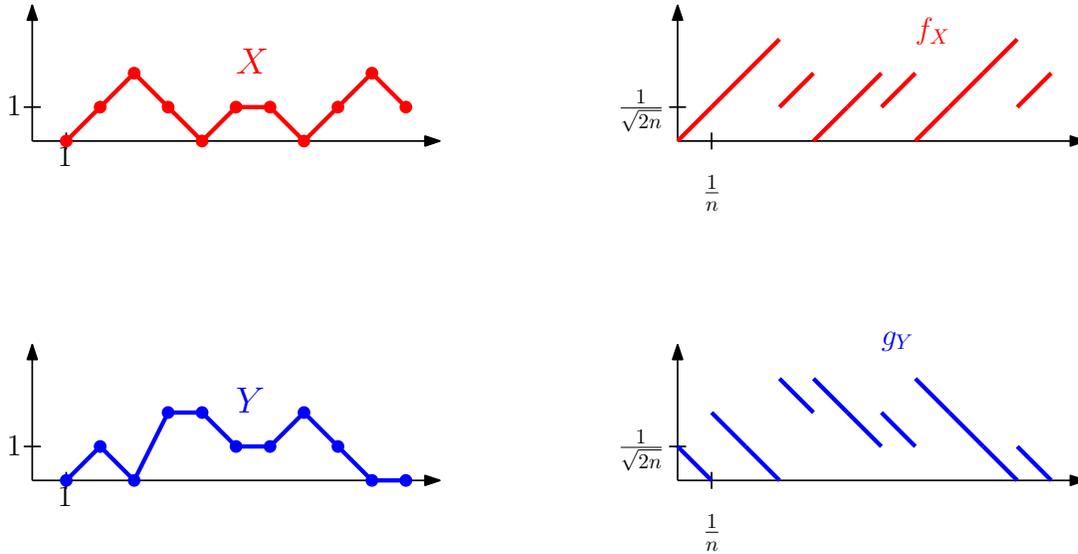


FIGURE 12 – À gauche, les composantes X, Y d'une marche $W \in \mathcal{W}_n$. À droite, les deux fonctions f_X et g_Y associées.

Proposition 5.19. *L'espace $M(f_X, g_Y)$ est égal (à un changement d'échelle $1/\sqrt{2n}$ près) à l'espace m , les deux pôles et les explorations coïncident aussi.*

Démonstration. En effet, on peut se convaincre que l'espace obtenu est égal à un changement d'échelle près à une orientation bipolaire m' . Or $T(m')$ et $T(m'^{**})$ sont identiques à $T(m)$ et $T(m^{**})$ (en commençant par replier horizontalement selon la relation d'équivalence). Mais le couple $(T(m), T(m^{**}))$ caractérise m . Ainsi, $m' = m$. \square

Munissons l'espace d'arrivée de M de la topologie la plus fine qui rend M continue, appelée topologie de la Peanosphère. Alors, de la convergence en loi de \mathcal{W}_n vers $\mathcal{W}_e = (\mathcal{X}_e, \mathcal{Y}_e)$, on déduit que

$$M(f_{X_n}, g_{Y_n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} M(\mathcal{X}_e, \mathcal{Y}_e).$$

Ce résultat n'est pas totalement satisfaisant puisqu'on aimerait avoir une convergence au sens de Gromov-Hausdorff.

5.4 Comportement de la limite d'échelle vis-à-vis de la dualité

Comme auparavant on se donne $m_n \sim \mathcal{U}(\mathcal{O}_n)$. En reprenant les notations de la sous-section 2.3, on note pour tout $\theta \in \star$, $W_n^\theta = (X_n^\theta, Y_n^\theta)$, Z_n^θ et σ_n^θ les objets aléatoires uniformes correspondant à m_n^θ par le diagramme commutatif du théorème 2.6. Notons aussi L_n^θ le processus des temps locaux de Z_n^θ . De la même manière que précédemment, on note pour tout $u \in]0, 1[$, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\mathcal{W}_n^\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2n}} W_n^\theta(nt), \quad \mathcal{Z}_n^{\theta,(u)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2n}} Z_n^{\theta,(\lceil nu \rceil)}(nt) \text{ et } \mathcal{L}_n^{\theta,(u)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2n}} L_n^{\theta,(\lceil nu \rceil)}(nt)$$

où les processus discrets ont été interpolés linéairement et où par convention $W_n^\theta(0) = (0, 0)$ et $Z_n^{\theta,(i)}(k) = L_n^{\theta,(i)}(k) = 0$ pour $k \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(u_{n,i}, u_{n,i}^*)_{i \geq 1}$ une famille de v.a.i.i.d. de loi μ_{σ_n} conditionnellement à m_n . Définissons aussi $u_{n,i}^{**} = 1 - u_{n,i}$ et $u_{n,i}^{***} = 1 - u_{n,i}^*$. Remarquons que puisque μ_{σ_n} est un permuton, pour tout $\theta \in \star$, $(u_{n,i}^\theta)_{i \geq 1}$ est une famille de v.a.i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$ conditionnellement à m_n donc est indépendante de m_n . Notons enfin

$$\begin{aligned} s : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2) &\longrightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2) \\ (f, g) &\longmapsto (g(1 - \cdot), f(1 - \cdot)). \end{aligned}$$

Théorème 5.20. *Soit \mathcal{Z}_e le processus continu de marches coalescentes associé à l'excursion \mathcal{W}_e et soit \mathcal{L}_e le processus des temps locaux de \mathcal{Z}_e . Soit $u \sim \mathcal{U}([0, 1])$ indépendante de \mathcal{W}_e . Alors*

1. *p.s. $\mathcal{L}_e^{(u)}$ se prolonge par continuité en 1.*
2. *Il existe une fonction $r : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2)$ mesurable qui joue le rôle de la dualité dans le cadre continu. Plus précisément, on a p.s., en notant $(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{Y}}) = r(\mathcal{W}_e)$,*

$$\tilde{\mathcal{X}}(\varphi_{\mathcal{Z}_e}(u)) = \mathcal{L}_e^{(u)}(1) \text{ et } r(s(\mathcal{W}_e)) = s(r(\mathcal{W}_e))$$

(ce qui détermine r de manière unique \mathbb{P}_{exc} presque partout). De plus,

$$r(\mathcal{W}_e) \stackrel{\text{loi}}{=} \mathcal{W}_e, \quad r^2 = s \text{ et } r^4 = \text{Id} \quad \mathbb{P}_{\text{exc}} - \text{p.s.}$$

3. *Soit $(u_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$ indépendante de \mathcal{W}_e . Pour tout $\theta \in \{\emptyset, *, **\}$, soient $\mathcal{W}_e^{\theta*} = r(\mathcal{W}_e^\theta)$ et $u_i^{\theta*} = \varphi_{\mathcal{Z}_e^\theta}(u_i)$ pour $i \geq 1$. Soit aussi \mathcal{Z}_e^θ le processus continu de marches coalescentes associé à \mathcal{W}_e^θ et \mathcal{L}_e^θ son processus des temps locaux. Notons également $\mu_{\mathcal{Z}_e^\theta}$ le permuton de Baxter associé. Alors*

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{W}_n^\theta \\ \mu_{\sigma_n^\theta} \\ \left(u_{n,i}^\theta, \mathcal{Z}_n^{\theta,(u_{n,i}^\theta)}, \mathcal{L}_n^{\theta,(u_{n,i}^\theta)} \right)_{i \in \mathbb{N}^*} \end{array} \right)_{\theta \in \star} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \left(\begin{array}{c} \mathcal{W}_e^\theta \\ \mu_{\mathcal{Z}_e^\theta} \\ \left(u_i^\theta, \mathcal{Z}_e^{\theta,(u_i^\theta)}, \mathcal{L}_e^{\theta,(u_i^\theta)} \right)_{i \in \mathbb{N}^*} \end{array} \right)_{\theta \in \star}$$

dans $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2) \times ([0, 1] \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}))^{\mathbb{N}^*} \times \mathcal{M})^4$.

4. Dans ce couplage, on a p.s.

$$\forall \theta \in \star, \varphi_{\mathcal{Z}_e^{\theta*}} \circ \varphi_{\mathcal{Z}_e^\theta} = 1 - \text{Id}.$$

Remarque 5.21. Comme dans le cas discret, puisque $\mu_{\mathcal{Z}_e^\theta}$ est un permuton, $(u_i^\theta)_{i \geq 1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{W}_e^\theta$ pour tout $\theta \in \star$ et est une suite de v.a.i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$.

Remarque 5.22. Les relations entre objets limites établies dans ce théorème sont les analogues continues des relations discrètes décrites dans la remarque 1.11, dans l'équation (2.1) ainsi que dans le théorème 1.9.

Pour montrer le théorème, on admettra pour l'instant le lemme suivant, démontré à la fin de la section.

Lemme 5.23. Soit $u \sim \mathcal{U}([0, 1])$ indépendante de W_n . Alors la suite $(\mathcal{L}_n^{(u)})_{n \geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Dans la preuve du théorème, on aura aussi recours au lemme ci-dessous.

Lemme 5.24. Supposons que μ_n pour $n \geq 1$ et μ_∞ soient des mesures de probabilité aléatoires sur un espace polonais E . Pour tout $n \in \llbracket 1, \infty \rrbracket$, soit $(X_i^n)_{i \geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi μ_n conditionnellement à μ_n . Supposons que μ_n converge en loi vers μ_∞ pour la topologie de la convergence étroite. Alors

$$(\mu_n, (X_i^n)_{i \geq 1}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} (\mu_\infty, (X_i^\infty)_{i \geq 1})$$

Démonstration du lemme 5.24. Soient $f_0 : \mathcal{M}_1(E) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1 : E \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_k : E \rightarrow \mathbb{R}$ continues bornées. Alors

$$\mathbb{E} f_0(\mu_n) f_1(X_1^n) \cdots f_k(X_k^n) = \mathbb{E} \left(f_0(\mu_n) \prod_{i=1}^k \int f_i d\mu_n \right) = \mathbb{E} g(\mu_n)$$

avec $g(\mu) = f_0(\mu) \prod_{i=1}^k \int f_i d\mu$ qui est une fonction continue bornée sur $\mathcal{M}_1(E)$. On applique alors la convergence en loi de μ_n vers μ_∞ , ce qui montre que

$$\mathbb{E} f_0(\mu_n) f_1(X_1^n) \cdots f_k(X_k^n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E} f_0(\mu_\infty) f_1(X_1^\infty) \cdots f_k(X_k^\infty) \quad (5.5)$$

D'autre part, la suite $(\mu_n, (X_i^n)_{i \geq 1})_{n \geq 1}$ est tendue puisque ses coordonnées sont tendues. Enfin, par un argument de classes monotones et de densité des fonctions continues, la convergence (5.5) implique l'unicité de la limite. \square

Démonstration du théorème 5.20. Vérifions d'abord la tension. Comme $*$: $\mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n$ est bijective, on a l'égalité en loi

$$\forall \theta \in \star, \left(\begin{array}{c} \mathcal{W}_n^\theta \\ \mu_{\sigma_n^\theta} \\ (u_{n,i}^\theta, \mathcal{Z}_n^{\theta, (u_{n,i}^\theta)}, \mathcal{L}_n^{\theta, (u_{n,i}^\theta)})_{i \in \mathbb{N}^*} \end{array} \right) \stackrel{\text{loi}}{=} \left(\begin{array}{c} \mathcal{W}_n \\ \mu_{\sigma_n} \\ (u_{n,i}, \mathcal{Z}_n^{(u_{n,i})}, \mathcal{L}_n^{(u_{n,i})})_{i \in \mathbb{N}^*} \end{array} \right) \quad (5.6)$$

Alors par le théorème 5.17, par le lemme 5.23 et par le théorème de Prokhorov, la famille

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{W}_n^\theta \\ \mu_{\sigma_n^\theta} \\ (u_{n,i}^\theta, \mathcal{Z}_n^{\theta,(u_{n,i}^\theta)}, \mathcal{L}_n^{\theta,(u_{n,i}^\theta)})_{i \in \mathbb{N}^*} \end{array} \right)_{\theta \in \star}$$

est bien tendue. Supposons désormais que le long d'une sous-suite

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{W}_n^\theta \\ \mu_{\sigma_n^\theta} \\ (u_{n,i}^\theta, \mathcal{Z}_n^{\theta,(u_{n,i}^\theta)}, \mathcal{L}_n^{\theta,(u_{n,i}^\theta)})_{i \in \mathbb{N}^*} \end{array} \right)_{\theta \in \star} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \left(\begin{array}{c} \mathcal{W}_e^\theta \\ \mu_{\mathcal{Z}_e^\theta} \\ (u_i^\theta, \mathcal{Z}_e^{\theta,(u_i^\theta)}, \mathcal{L}_e^{\theta,(u_i^\theta)})_{i \in \mathbb{N}^*} \end{array} \right)_{\theta \in \star}$$

On sait déjà par (5.6) et par le théorème 5.17 (accompagné du lemme 5.23) que pour tout $\theta \in \star$,

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{W}_n^\theta \\ \mu_{\sigma_n^\theta} \\ (u_{n,i}^\theta, \mathcal{Z}_n^{\theta,(u_{n,i}^\theta)}, \mathcal{L}_n^{\theta,(u_{n,i}^\theta)})_{i \in \mathbb{N}^*} \end{array} \right)_{n \rightarrow +\infty} \xrightarrow{\text{loi}} \left(\begin{array}{c} \mathcal{W}_e \\ \mu_B \\ (u_i, \mathcal{Z}_e^{(u_i)}, \mathcal{L}_e^{(u_i)})_{i \in \mathbb{N}^*} \end{array} \right)$$

où $\mathcal{L}_e^{(u_i)}$ est prolongée par continuité en 1 (grâce à la tension de $\mathcal{L}_n^{(u_{n,i}^\theta)}$ et à l'unicité de la limite : une fonction continue croissante sur $[0, 1]$ est déterminée par sa restriction à $[0, 1]$).

Montrons les égalités presque sûres suivantes :

$$\mathcal{W}_e^{**} = s(\mathcal{W}_e) \text{ et } \mathcal{W}_e^{***} = s(\mathcal{W}_e^*) \quad (5.7)$$

$$\forall i \geq 1, \forall \theta \in \star, u_i^{\theta*} = \varphi_{\mathcal{Z}_e^\theta}(u_i^\theta), \quad (5.8)$$

et

$$\forall i \geq 1, \forall \theta \in \star, \mathcal{X}_e^{\theta*}(u_i^{\theta*}) = \mathcal{L}_e^{\theta,(u_i^\theta)}(1). \quad (5.9)$$

On sait que $\mathcal{W}_n^{**} = s(\mathcal{W}_n)$ car $\text{OW}(m_n^{**}) = \overleftarrow{W}_n$ par la remarque 1.11. De même, $\mathcal{W}_n^{***} = s(\mathcal{W}_n^*)$, d'où (5.7) par continuité de s . Pour montrer (5.8), on sait déjà que pour tout $\theta \in \star$,

$$\left(\mu_{\sigma_n^\theta}, (u_{n,i}^\theta, u_{n,i}^{\theta*})_{i \geq 1} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \left(\mu_{\mathcal{Z}_e^\theta}, (u_i^\theta, u_i^{\theta*})_{i \geq 1} \right).$$

Par ailleurs, $(u_{n,i}, u_{n,i}^*) \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mu_{\sigma_n}$ conditionnellement à σ_n par définition. De plus, puisque σ_n^* s'obtient en tournant le diagramme de σ_n de $-\pi/2$ et puisque $u_{n,i}^{**} = 1 - u_{n,i}$, on a $(u_{n,i}^*, u_{n,i}^{**}) \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mu_{\sigma_n^*}$ conditionnellement à σ_n . Ainsi, par récurrence en utilisant le fait qu'on a aussi $u_{n,i}^{***} = 1 - u_{n,i}^*$, on obtient pour tout $\theta \in \star$, $(u_{n,i}^\theta, u_{n,i}^{\theta*}) \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mu_{\sigma_n^\theta}$ conditionnellement à σ_n , ce qui justifie l'utilisation du lemme 5.24. En identifiant la limite du lemme 5.24 avec la limite ci-dessus, on en déduit que

$$(u_i^\theta, u_i^{\theta*}) \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mu_{\mathcal{Z}_e^\theta} \text{ conditionnellement à } \mathcal{Z}_e^\theta,$$

d'où (5.8). Par ailleurs, par l'équation (2.1), on a

$$\sqrt{2n} \mathcal{X}_n^{\theta*} \left(\frac{\sigma_n^\theta(\lceil nu_{n,i}^\theta \rceil)}{n} \right) = L_{\mathcal{Z}_n^\theta}^{(\lceil nu_{n,i}^\theta \rceil)}(n) - 1.$$

Donc

$$\mathcal{X}_n^{\theta*} \left(\frac{\lceil nu_{n,i}^{\theta*} \rceil}{n} \right) = \mathcal{L}_n^{\theta, (u_{n,i}^\theta)}(1) - \frac{1}{\sqrt{2n}},$$

d'où (5.9). Montrons que $\sigma(\mathcal{W}_e^{\theta*}) \subset \sigma(\mathcal{W}_e^\theta)$. Pour cela, remarquons que $(u_i^{\theta*})_{i \geq i_0}$ est p.s. dense dans $[0, 1]$ et que $\mathcal{X}_e^{\theta*}$ est continu. Donc $\mathcal{X}_e^{\theta*}$ est déterminé par ses valeurs en les $u_i^{\theta*}$ pour $i \geq i_0$. Ainsi, par l'équation (5.9), par la loi du 0-1 de Kolmogoroff et par le fait que $\sigma \left(\left(\mathcal{L}_e^{\theta, (u)}(1) \right)_{u \in]0, 1[} \right) \subset \sigma(\mathcal{W}_e^\theta)$, on a $\sigma(\mathcal{X}_e^{\theta*}) \subset \sigma(\mathcal{W}_e^\theta)$. En outre, en appliquant deux fois (5.7) et une fois l'inclusion précédente, on a

$$\sigma(\mathcal{Y}_e^{\theta*}) = \sigma(\mathcal{X}_e^{\theta***}) \subset \sigma(\mathcal{W}_e^{\theta**}) = \sigma(\mathcal{W}_e^\theta).$$

Ainsi, il existe une fonction $r : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2)$ mesurable telle que $\mathcal{W}_e^{\theta*} = r(\mathcal{W}_e^\theta)$ (r ne dépend pas de θ car $(\mathcal{W}_e^\theta, \mathcal{W}_e^{\theta*}) \stackrel{\text{loi}}{=} (\mathcal{W}_e^{\theta*}, \mathcal{W}_e^{\theta**})$). Alors, puisque p.s.

$$(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{Y}}) := r(\mathcal{W}_e) = \mathcal{W}_e^* = (\mathcal{X}_e^*, \mathcal{Y}_e^*) \text{ et } u_i^* = \varphi_{\mathcal{Z}_e}(u_i),$$

on a p.s. $\tilde{X}(\varphi_{\mathcal{Z}_e}(u_i)) = \mathcal{L}_e^{(u_i)}(1)$. De plus, $r(\mathcal{W}_e) = \mathcal{W}_e^* \stackrel{\text{loi}}{=} \mathcal{W}_e$ et, par (5.7),

$$r^2 = s \text{ et } r^4 = \text{Id } \mathbb{P}_{\text{exc-p.s.}}$$

ce qui nous donne le deuxième point du théorème 5.20. D'autre part, étant donné que $r(\mathcal{W}_e^\theta) = \mathcal{W}_e^{\theta*}$ et $u_i^{\theta*} = \varphi_{\mathcal{Z}_e^\theta}(u_i^\theta)$, on a l'unicité de la limite, ce qui entraîne le troisième point du théorème. Enfin, pour le quatrième point, on a $u_{n,1}^{\theta**} = 1 - u_{n,1}^\theta$. Donc en passant à la limite, $u_1^{\theta**} = 1 - u_1^\theta$, ce qui conclut par (5.8). \square

Démonstration du lemme 5.23. Soit $u \sim \mathcal{U}([0, 1])$ indépendante de W_n . Par les critères usuels de tension, il suffit de montrer que la suite $\left(\mathcal{L}_n^{(u)}(1) \right)_{n \geq 1}$ est tendue et que pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\mathcal{L}_n^{(u)}(1) - \mathcal{L}_n^{(u)}(1-x) \geq \delta \right) = 0.$$

Posons $U_n = \lceil nu \rceil$ et $V_n = \sigma_n(U_n)$. Alors U_n et $V_n = \sigma_n(U_n)$ sont toutes les deux des v.a. uniformes sur $[[1, n]]$ et $U_n \perp\!\!\!\perp W_n$, $V_n \perp\!\!\!\perp W_n$. Par ailleurs,

$$\mathcal{L}_n^{(u)}(1) = \frac{1}{\sqrt{2n}} (X_n^*(V_n) + 1) = \mathcal{X}_n^* \left(\frac{V_n}{n} \right) + \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Or \mathcal{X}_n^* converge en loi vers \mathcal{X}_e^* et est indépendante de V_n/n qui converge en loi vers u . Ainsi, par continuité de l'évaluation, $\mathcal{L}_n^{(u)}(1)$ converge en loi vers $\mathcal{X}_e^*(u)$ et la suite est donc tendue. Regardons maintenant

$$\mathcal{L}_n^{(u)}(1) - \mathcal{L}_n^{(u)}(1-x) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(L_n^{(U_n)}(n) - L_n^{(U_n)}(n(1-x)) \right) \leq \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(L_n^{(U_n)}(n) - L_n^{(U_n)}(\lfloor n(1-x) \rfloor) \right).$$

Considérons l'arbre $T(m_n^*)$. Dans la suite, on identifie les arêtes de m_n^* et de $T(m_n^*)$ à leur $T(m_n^*)$ -étiquette. On sait par le corollaire 2.15 que $L_n^{(U_n)}(n)$ est le nombre d'arêtes dans la lignée ancestrale

de l'arête V_n dans $T(m_n^*)$ et que $L_n^{(U_n)}(\lfloor n(1-x) \rfloor)$ est le nombre d'arêtes dans la lignée ancestrale de V_n dans $T(m_n^*)$ ayant une $T(m_n)$ -étiquette d'au plus $\lfloor n(1-x) \rfloor$. Donc $L_n^{(U_n)}(n) - L_n^{(U_n)}(\lfloor n(1-x) \rfloor)$ est égal au nombre d'arêtes dans la lignée ancestrale de V_n dans $T(m_n^*)$ ayant une $T(m_n)$ -étiquette strictement supérieure à $\lfloor n(1-x) \rfloor$. L'idée est de montrer qu'avec grande probabilité il existe une arête dans la lignée ancestrale de hauteur au plus $\delta\sqrt{2n}$ et de $T(m_n)$ -étiquette au plus $\lfloor (1-x)n \rfloor$. Cet évènement est inclus dans $\left\{ \mathcal{L}_n^{(u)}(1) - \mathcal{L}_n^{(u)}(1-x) \leq \delta \right\}$ puisque les $T(m_n)$ -étiquettes décroissent le long des branches de $T(m_n^*)$.

Soit Δ_n une v.a. entière choisie plus tard, soient

$$B_n = \sup\{k \leq V_n; X_n^*(k) = \Delta_n\} \text{ et } \tau_n = \inf\{k > V_n; X_n^*(k) \leq \Delta_n\}$$

et notons $\mathcal{E}_n = \{X_n^*(V_n) \geq \Delta_n\}$. Remarquons que sous l'évènement \mathcal{E}_n , l'arête B_n est l'ancêtre de V_n dans $T(m_n^*)$ à hauteur Δ_n et que τ_n est la première arête dans l'exploration de $T(m_n^*)$ qui soit de hauteur inférieure ou égale à Δ_n après avoir visité V_n . Notons $A_n = \sigma_n^{-1}(B_n)$ la $T(m_n)$ -étiquette de B_n . Alors sous \mathcal{E}_n , par le corollaire 2.15 et par le fait que les $T(m_n)$ -étiquettes sont strictement décroissantes le long des branches de $T(m_n^*)$,

$$\Delta_n = X_n^*(B_n) = L_n^{(U_n)}(n) - L_n^{(U_n)}(A_n).$$

En effet, $X_n^*(B_n) = L_n^{(A_n)}(n) - 1$ et $A_n > U_n$. Si on suppose non seulement être sous \mathcal{E}_n mais en plus que $A_n \leq \lfloor (1-x)n \rfloor$, alors

$$L_n^{(U_n)}(n) - L_n^{(U_n)}(\lfloor (1-x)n \rfloor) \leq \Delta_n.$$

D'autre part, sous \mathcal{E}_n^c , $X_n^*(B_n) < \Delta_n$ et donc

$$L_n^{(U_n)}(n) - L_n^{(U_n)}(\lfloor (1-x)n \rfloor) \leq X_n^*(V_n) \leq \Delta_n.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{L}_n^{(u)}(1) - \mathcal{L}_n^{(u)}(1-x) \geq \delta\right) \tag{5.10}$$

$$\leq \mathbb{P}(\mathcal{E}_n \text{ et } A_n > \lfloor (1-x)n \rfloor) + \mathbb{P}\left(\left(\mathcal{E}_n^c \cup \{A_n \leq \lfloor (1-x)n \rfloor\}\right) \text{ et } L_n^{(U_n)}(n) - L_n^{(U_n)}(\lfloor (1-x)n \rfloor) \geq \delta\sqrt{2n}\right) \tag{5.11}$$

$$\leq \mathbb{P}(\mathcal{E}_n \text{ et } A_n > \lfloor (1-x)n \rfloor) + \mathbb{P}(\Delta_n \geq \delta\sqrt{2n}). \tag{5.12}$$

Concentrons-nous sur le premier terme. Soit $\eta > 0$. Supposons que $\max_{\lfloor \lfloor n(1-x) \rfloor + 1, n \rfloor} Y_n \leq \eta\sqrt{2n}$. Si $A_n > \lfloor n(1-x) \rfloor$, alors $Y_n(A_n) \leq \eta\sqrt{2n}$. Or

$$\begin{aligned} Y_n(A_n) &= X_n^{**}(n+1-A_n) \text{ par la remarque 1.11} \\ &= X_n^{**}(n+1-\sigma_n^{-1}(B_n)) \\ &= X_n^{**}(\sigma_n^*(B_n)) \\ &= L_n^{*,(B_n)}(n) - 1 \text{ par (2.1).} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_n \text{ et } A_n > \lfloor n(1-x) \rfloor) \leq \mathbb{P}(\mathcal{E}_n \text{ et } L_n^{*,(B_n)}(n) \leq \eta\sqrt{2n}+1) + \mathbb{P}\left(\max_{\lfloor \lfloor n(1-x) \rfloor + 1, n \rfloor} Y_n \geq \eta\sqrt{2n}\right). \tag{5.13}$$

Contrôlons le premier terme. Par définition de B_n et τ_n , $X_n^* - \Delta_n$ fait une excursion positive sur $[[B_n, \tau_n]]$ et croise 0 vers le bas entre les temps $\tau_n - 1$ et τ_n . Ainsi, par construction du processus de marches coalescentes, $Z_n^{*(B_n)}$ fait une excursion négative sur $[[B_n, \tau_n]]$. En effet, en B_n , X_n^* monte de 1 donc Y_n^* descend de 1 donc $Z_n^{*(B_n)}$ passe dans les entiers strictement négatifs et donc évolue comme $-X_n^*$ jusqu'à la fin de l'excursion : $Z_n^{*(B_n)}$ croise l'axe des abscisses vers le haut entre les temps $\tau_n - 1$ et τ_n (un exemple est donné en figure 13).

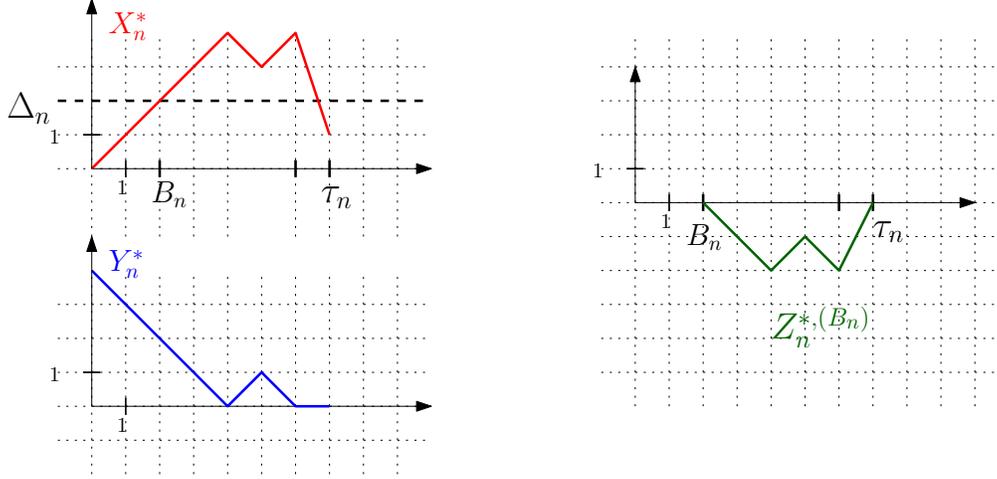


FIGURE 13 – À gauche, un exemple de marches X_n^* et Y_n^* formant une marche en tandem $W_n^* \in \mathcal{W}_n$. À droite, la marche $Z_n^{*(B_n)}$ associée.

On définit $G_n = Z_n^{*(B_n)}(\tau_n)$ et $R_n(k) = Z_n^{*(B_n)}(\tau_n + k) - G_n$ pour $k \geq 0$. Alors, puisque $Z_n^{*(B_n)}$ redevient positive au temps τ_n , on a

$$G_n = Y_n^*(\tau_n) - Y_n^*(\tau_n - 1) \text{ et } L_n^{*(B_n)}(\tau_n + k) = 1 + \#\{i \in \llbracket 0, k \rrbracket, R_n(i) = -G_n\}.$$

En particulier, $L_n^{*(B_n)}(n) = \#\{i \in \llbracket 0, n - \tau_n \rrbracket, R_n(i) = -G_n\} + 1$, ce qui donne

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\mathcal{E}_n, L_n^{*(B_n)}(n) \leq \eta\sqrt{2n} + 1\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\mathcal{E}_n, \exists j \leq n^{1/4}, \#\{i \in \llbracket 0, n - \tau_n \rrbracket; R_n(i) = -j\} \leq \eta\sqrt{2n} \text{ et } G_n = j\right) + \mathbb{P}(G_n \geq n^{1/4}) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\mathcal{E}_n, \inf_{0 \leq j \leq n^{1/4}} \#\{i \in \llbracket 0, n - \tau_n \rrbracket; R_n(i) = -j\} \leq \eta\sqrt{2n}\right) + \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |Y_n^*(k) - Y_n^*(k-1)| \geq n^{1/4}\right). \end{aligned}$$

Le deuxième terme ci-dessus se majore à l'aide du lien avec la marche \overline{W} conditionnée à rester dans le quadrant positif (proposition 3.2) et grâce à l'équivalent (3.4) :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |Y_n^*(k) - Y_n^*(k-1)| \geq n^{1/4} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |\bar{Y}(k) - \bar{Y}(k-1)| \geq n^{1/4} \mid \bar{W}(\llbracket 0, n+1 \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2 \text{ et } \bar{W}_{n+1} = 0 \right) \\
&\leq Cn^4 \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |\bar{Y}(k) - \bar{Y}(k-1)| \geq n^{1/4}, \bar{W}(\llbracket 0, n+1 \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2 \text{ et } \bar{W}_{n+1} = 0 \right) \\
&\leq Cn^4 n \sum_{j \geq n^{1/4}} 2^{-j+2} = C'n^5 2^{-n^{1/4}} = o(1).
\end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\mathbb{P} \left(\mathcal{E}_n, L_n^{*(B_n)}(n) \leq \eta\sqrt{2n} + 1 \right) \leq \mathbb{P} \left(\mathcal{E}_n, \inf_{0 \leq j \leq n^{1/4}} \#\{i \in \llbracket 0, n - \tau_n \rrbracket; R_n(i) = -j\} \leq \eta\sqrt{2n} \right) + o(1). \quad (5.14)$$

Contrôlons le premier terme. L'idée est de dire que si τ_n est un temps d'arrêt de W_n^* , R_n est à un conditionnement près une marche aléatoire, donc son temps local en 0 est de l'ordre de \sqrt{n} . Soient $\varepsilon, y > 0$ tels que $0 < 2\varepsilon < y < 1$ et $\Delta_n = X_n^*(\lfloor yn \rfloor)$. Alors

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\mathcal{E}_n, \inf_{0 \leq j \leq n^{1/4}} \#\{i \in \llbracket 0, n - \tau_n \rrbracket; R_n(i) = -j\} \leq \eta\sqrt{2n} \right) \leq y + \mathbb{P}(\tau_n \geq (1 - 2\varepsilon)n) \\
&+ \mathbb{P} \left(V_n \geq yn, \tau_n \leq (1 - 2\varepsilon)n, \inf_{0 \leq j \leq n^{1/4}} \#\{i \in \llbracket 0, \lfloor \varepsilon n \rfloor \rrbracket; R_n(i) = -j\} \leq \eta\sqrt{2n} \right) \quad (5.15)
\end{aligned}$$

car $\mathbb{P}(V_n \leq yn) \leq y$. De plus, par le choix de Δ_n , l'évènement dans le dernier terme ci-dessus est mesurable par rapport à $\sigma \left((W_n^*(\lfloor n\varepsilon \rfloor + k) - W_n^*(\lfloor n\varepsilon \rfloor))_{0 \leq k \leq n - 2\lfloor n\varepsilon \rfloor}, V_n \right)$. En effet, $\{V_n \geq yn\}$ est V_n -mesurable et sous cet évènement, $\tau_n > V_n \geq yn$ donc τ_n est un temps d'arrêt de

$$(W_n^*(\lfloor n\varepsilon \rfloor + k) - W_n^*(\lfloor n\varepsilon \rfloor))_{n - \lfloor n\varepsilon \rfloor \geq k \geq 0},$$

ce qui montre que $\{\tau_n \leq (1 - 2\varepsilon)n\}$ est bien mesurable par rapport à la sous-tribu voulue. Enfin, sous les deux évènements précédents, $\tau_n > V_n \geq yn \geq 2\varepsilon n$ et $\tau_n \leq (1 - 2\varepsilon)n$ donc pour tout $i \in \llbracket 0, \lfloor \varepsilon n \rfloor \rrbracket$, $n\varepsilon \leq \tau_n + i \leq n - \lfloor \varepsilon n \rfloor$ ce qui procure la mesurabilité désirée par définition de R_n . Notons $\bar{\tau}_n, \bar{B}_n$ et \bar{R}_n les v.a. définies comme τ_n, B_n et R_n mais à partir de \bar{W} . Alors, par le lemme 3.2,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(V_n \geq yn, \tau_n \leq (1 - 2\varepsilon)n, \inf_{0 \leq j \leq n^{1/4}} \#\{i \in \llbracket 0, \lfloor \varepsilon n \rfloor \rrbracket; R_n(i) = -j\} \leq \eta\sqrt{2n} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(V_n \geq yn, \bar{\tau}_n \leq (1 - 2\varepsilon)n, \inf_{0 \leq j \leq n^{1/4}} \#\{i \in \llbracket 0, \lfloor \varepsilon n \rfloor \rrbracket; \bar{R}_n(i) = -j\} \leq \eta\sqrt{2n} \right. \\
&\quad \left. \mid \bar{W}(\llbracket 0, n+1 \rrbracket) \subset \mathbb{N}^2 \text{ et } \bar{W}_{n+1} = 0 \right) \\
&\leq C(\varepsilon) \mathbb{P} \left(V_n \geq yn, \bar{\tau}_n \leq (1 - 2\varepsilon)n, \inf_{0 \leq j \leq n^{1/4}} \#\{i \in \llbracket 0, \lfloor \varepsilon n \rfloor \rrbracket; \bar{R}_n(i) = -j\} \leq \eta\sqrt{2n} \right),
\end{aligned}$$

où l'inégalité est obtenue en appliquant successivement les lemmes 3.4 et 3.5 conditionnellement à V_n . En conditionnant par rapport à V_n et en se plaçant sous $\{V_n \geq yn\}$, on voit que τ_n est un temps d'arrêt de $(\overline{W}_{k+\lfloor yn \rfloor} - \overline{W}_{\lfloor yn \rfloor})_{k \geq 0}$. Ainsi, par Markov fort, \overline{R}_n est une marche aléatoire de même pas que \overline{Y} . Donc, par la convergence en loi du temps local discret en un petit voisinage de zéro renormalisé vers le temps local en zéro d'un mouvement brownien standard \mathcal{B} (voir [3]),

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} \inf_{0 \leq j \leq n^{1/4}} \#\{i \in \llbracket 0, \lfloor \varepsilon n \rfloor \rrbracket; \overline{R}_n(i) = -j\} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} L_{\mathcal{B}}^0(\varepsilon) \stackrel{\text{loi}}{=} |\mathcal{B}_\varepsilon|.$$

Par conséquent, on peut majorer la probabilité à droite de l'inégalité ci-dessus par

$$C'(\varepsilon)(\mathbb{P}(|\mathcal{B}_\varepsilon| \leq \eta) + o_{\varepsilon, \eta}(1))$$

où le petit o dépend de ε et de η . En combinant cela avec les inégalités (5.12), (5.13), (5.14) et (5.15), on obtient finalement

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\mathcal{L}_n^{(u)}(1) - \mathcal{L}_n^{(u)}(1-x) \geq \delta\right) &\leq \mathbb{P}(\Delta_n \geq \delta\sqrt{2n}) + \mathbb{P}\left(\max_{\llbracket \lfloor n(1-x) \rfloor + 1, n \rrbracket} Y_n \geq \eta\sqrt{2n}\right) + o(1) + y \\ &+ \mathbb{P}(\tau_n \geq (1-2\varepsilon)n) + C'(\varepsilon)(\mathbb{P}(|\mathcal{B}_\varepsilon| \leq \eta) + o_{\varepsilon, \eta}(1)). \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\{\tau_n \geq (1-2\varepsilon)n\} = \{\forall k \in \llbracket V_n + 1, \lceil (1-2\varepsilon)n \rceil - 1 \rrbracket, X_n^*(k) > X_n^*(\lfloor yn \rfloor)\}.$$

Donc par Portemanteau,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\mathcal{L}_n^{(u)}(1) - \mathcal{L}_n^{(u)}(1-x) \geq \delta\right) &\leq \mathbb{P}(\mathcal{X}_e^*(y) \geq \delta) + \mathbb{P}\left(\max_{[1-x, 1]} \mathcal{Y}_e \geq \eta\right) + y \\ &+ \mathbb{P}\left(\min_{[\varphi_{\mathcal{Z}_e}(u), 1-2\varepsilon]} \mathcal{X}_e^* \geq \mathcal{X}_e^*(y)\right) + C'(\varepsilon)\mathbb{P}(|\mathcal{B}_\varepsilon| \leq \eta). \end{aligned}$$

Il est alors facile de voir que

$$\limsup_{y \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{\eta \rightarrow 0} \limsup_{x \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\mathcal{L}_n^{(u)}(1) - \mathcal{L}_n^{(u)}(1-x) \geq \delta\right) = 0.$$

□

Références

- [1] J. Borga and M. Maazoun. Scaling and local limits of Baxter permutations and bipolar orientations through coalescent-walk processes, *arXiv* 2008.09086, 2020.
- [2] G. Baxter. On fixed points of the composite of commuting functions, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 15 : 851–855, doi :10.2307/2034894, 1964
- [3] A. N. Borodin. On the asymptotic behavior of local times of recurrent random walks with finite variance. *Theory of Probability & Its Applications*, 26(4) :758–772, 1982.
- [4] F. Bassino, M. Bouvel, V. Féray, L. Gerin, M. Maazoun, and A. Pierrot. Universal limits of substitution-closed permutation classes. *Journal of the European Mathematical Society*, 2019

- [5] G. Baxter and J. Joichi. On Permutations Induced by Commuting Functions, and an Embedding Question. *Mathematica Scandinavica* 13 : 140-150, 1963.
- [6] N. Bonichon, M. Bousquet-Mélou, and É. Fusy. Baxter permutations and plane bipolar orientations. *Sém. Lothar. Combin.*, 61A :Art. B61Ah, 29, 2009/11.
- [7] M. Bousquet-Mélou, É. Fusy, and K. Raschel. Plane bipolar orientations and quadrant walks. *Sém. Lothar. Combin.*, 81B, article [B81l] (63 pages), 2020.
- [8] M. Çağlar, H. Hajri, and A. H. Karakuş. Correlated coalescing Brownian flows on \mathbb{R} and the circle. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 15(2) :1447–1464, 2018.
- [9] D. Denisov and V. Wachtel. Random walks in cones. *Ann. Probab.*, 43(3) :992–1044, 2015. arXiv :1110.1254.
- [10] J. Duraj and V. Wachtel. Invariance principles for random walks in cones. *Stochastic Process. Appl.*, 130(7) :3920–3942, 2020.
- [11] R. Kenyon, J. Miller, S. Sheffield, and D. B. Wilson. Bipolar orientations on planar maps and SLE12. *Ann. Probab.*, 47(3) : 1240–1269, 2019.
- [12] V. Prokaj. The solution of the perturbed Tanaka-equation is pathwise unique. *Ann. Probab.*, 41(3B) :2376–2400, 2013.