Colles de MP* au lycée Pasteur

Emmanuel Kammerer

2021-2022

Dans ce fichier se trouvent les exercices donnés (ou pas) en colles en 2021-2022. La plupart des énoncés ne sont pas originaux.

1 Suites, développements asymptotiques, séries et convexité

1.1 Suites

Exercice 1

Soient a_n et b_n deux suites réelles telles que $\frac{|a_0|+\ldots+|a_n|}{n}$ est bornée et $b_n \longrightarrow 0$. Montrer que $\frac{a_0b_0+\ldots+a_nb_n}{n} \longrightarrow 0$. Est-ce que cela reste vrai si on enlève les valeurs absolues dans la première hypothèse ?

Exercice 2

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction 1-lipschitzienne. Existe-t-il forcément $g : [0,1] \to [0,1]$ une fonction 1-lipschitzienne telle que $f = g \circ g$? Indication : si c'était le cas, montrer que u_n définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ convergerait.

Exercice 3

Soit $\alpha \in]0,1]$. Soient $u_0, u_1 \geq 0$ et u_n définie par $u_{n+2} = u_{n+1}^\alpha + u_n^\alpha$. En fonction de α, u_0 et u_1, déterminer si u_n admet une limite et la calculer le cas échéant.

Exercice 4

Soit $x \geq 0$. Soit u_n définie par $u_0 = u_1 = x$ et $u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_n^2$. Que dire de la limite de u_n ?

1.2 Développements asymptotiques et équivalents

Exercice 5

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^6 + x^2. \end{array}$$

Vérifier que f est bijective et donner un développement asymptotique à deux termes de $f^{-1}(x)$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

Exercice 6

Donner un équivalent simple de $\cos(x)^{\tan(x)} - \mathrm{ch}(x)^{\mathrm{th}(x)}$. Plus dur : donner un équivalent simple de $\cos(x)^{-\tan(x)} - \mathrm{ch}(x)^{\mathrm{th}(x)}$.

1.3 Séries

Exercice 7

Soit a_n une suite croissante strictement positive. Soit $u_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}\ln a_{n-1}}$. Quelle est la nature de $\sum u_n$?

Exercice 8

Les implications suivantes sont-elles vraies ?

(a) $\sum \min(u_n, v_n)$ diverge $\implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent ?

(b) $\sum \min(u_n, v_n)$ diverge $\Longleftarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent ?

(c) $\sum \max(u_n, v_n)$ converge $\implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent ?

(d) $\sum \max(u_n, v_n)$ converge $\Longleftarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent ?

Exercice 9

(a) Soient $\alpha, \beta > 0$. Montrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

(b) Trouver une série $\sum a_n$ à termes positifs convergente telle que, pour tout $\alpha \in [0, 1[$, la série $\sum a_n^\alpha$ diverge.

(c) Trouver une série $\sum a_n$ à termes positifs convergente et une suite α_n tendant vers 1 telles que $\sum a_n^{\alpha_n}$ diverge.

1.4 Convexité

Exercice 10

Soit f convexe sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs négatives. Montrer que f est décroissante.

Exercice 11

(a) Soit f continue sur $]a, b[$ telle que $\forall x, y \in]a, b[, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.

(b) Soit f continue sur $]a, b[$ telle que $\forall x < y \in]a, b[, \exists \lambda \in]0, 1[, f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. Montrer que f est convexe.

(c) Soit f bornée sur $]a, b[$ telle que $\forall x, y \in]a, b[, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.

(d) Soit f bornée sur $]a, b[$ telle que $\forall x < y \in]a, b[, \exists \lambda \in]0, 1[, f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. La fonction f est-elle convexe ?

Exercice 12

(a) Soit f convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout x, $f^{-1}(]-\infty, x])$ est un intervalle.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout x, $f^{-1}(]-\infty, x])$ est un intervalle. Est-ce que f est convexe ?

(c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, \lambda \in \mathbb{R}$, $(f - \lambda \mathrm{Id})^{-1}(]-\infty, x])$ est un intervalle. Est-ce que f est convexe ?

Exercice 13

Soient f, g convexes sur $\mathbb{R}$ telles que $\max(f, g) \geq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\lambda f + (1-\lambda) g \geq 0$. Discuter de l'unicité d'un tel λ.

2 Intégrales

Exercice 14

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\log x)}{x \log x} dx$ converge-t-elle ?

Exercice 15

Donner un équivalent simple de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t \log(t+1)^2} dt$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 16

Donner un équivalent simple de

$$I_n = \int_0^{+\infty} (1+x)^n e^{-nx} dx.$$

Exercice 17

Pour quels $\alpha, t \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1-e^{tx}) \frac{1}{x} e^{-\alpha x} dx$ converge-t-elle ? La calculer le cas échéant.

Exercice 18

Pour quels $a, b \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}(\arctan(ax) - \arctan(bx))dx$ converge ? La calculer dans ce cas.

Exercice 19

Donner un développement asymptotique à deux termes quand $\lambda \to +\infty$ de

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Exercice 20

Donner un équivalent quand $x \to +\infty$ de

$$\int_x^{2x} \operatorname{th}\left(\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^{\alpha+1}} \right) dt.$$

Exercice 21

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx$.

Exercice 22

Donner la limite quand λ tend vers $+\infty$ de

$$\int_0^{\pi} \frac{|\cos(\lambda x)|}{\sqrt{x}} dx.$$

Exercice 23

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f^2 et $(f')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{\|f\|_\infty^2}{2} \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2 \int_{\mathbb{R}} (f')^2}.$$

Discuter le cas d'égalité.

3 Suites et séries de fonctions

Exercice 24

Soient $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions convergeant uniformément vers une fonction bornée f. Montrer que $\sup f_n$ converge vers $\sup f$.

Exercice 25

Soient $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues.

(a) Si f_n converge uniformément vers f. Montrer que si $x_n \longrightarrow x$ dans $[0,1]$ alors $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$.

(b) Donner un contre-exemple si on a seulement la convergence simple vers une fonction continue.

(c) Supposons que pour toute suite (x_n) de $[0,1]$ tendant vers $x \in [0,1]$ la suite $f_n(x_n)$ converge. Montrer que f_n converge uniformément vers une fonction continue f (indication : montrer d'abord qu'il y a convergence simple, puis que f est continue).

(d) Supposons que pour toute suite (x_n) de $[0,1]$ tendant vers $x \in [0,1]$ il existe une extractrice φ telle que $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \longrightarrow f(x)$. Peut-on dire quelque-chose de f ?

Exercice 26

Quelle est la limite quand $t > 0$ tend vers 0 de

$$\int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^t |\sin nx|}{n^2} dx \ ?$$

Exercice 27

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $f^{(n)}$ des dérivées n-ièmes de f converge uniformément. Que dire de la limite ?

Exercice 28

Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe une sous-suite $f_{\varphi(n)}$ qui converge simplement.

Exercice 29

Soient $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions périodiques de période $t_n > 0$ qui convergent uniformément vers une fonction f.

(a) Si $t_n \longrightarrow 0$. Montrer que f est constante.

(b) Si $t_n \longrightarrow t > 0$. Montrer que f est t-périodique.

(c) Si (t_n) est bornée. Montrer que f est périodique.

Exercice 30

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$ pour $x \in [-1,1]$ (indication : dériver sur $]-1,1[$).

Exercice 31

Soient $f_n : [0,1] \to [0,1]$ continues bijectives convergeant simplement vers une fonction f continue bijective.

(a) Montrer que la convergence des f_n est uniforme.

(b) Montrer que f_n^{-1} converge simplement vers f^{-1}.

(c) Remarquer que la convergence ci-dessus est elle aussi uniforme.

Exercice 32

Soient $f_n : [0,1] \to [0,1]$ continues convergeant uniformément vers une fonction f. Si on suppose les f_n injectives, f est-t-elle nécessairement injective ? Même question en remplaçant injective par surjective, puis par bijective.

4 Convergence dominée

Exercice 33

Montrer que pour tout $s > 1$,

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt.$$

Exercice 34

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que

$$\int_0^1 x^n f(x)dx = \frac{f(1)+o(1)}{n} \text{ quand } n \to +\infty.$$

Exercice 35

Notons $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt$. Quel est le domaine de f ? Quelle est la régularité de f ? Comment se comporte f aux bornes de son domaine de définition ?

Exercice 36

Soit $\alpha \in]0,1[$. Posons pour tout $x > 0$

$$f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}e^{-tx}}{1+t}dt.$$

(a) Montrer que f_α est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et la résoudre.

(b) En déduire que

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}dt.$$

Exercice 37

Posons $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ et $g(x) = \int_0^x e^{-u^2}du$.

(a) Étudier la dérivabilité de f.

(b) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$.

5 Algèbre générale

Exercice 38

Si G est un groupe, on note $Z(G) = \{f \in G;\ \forall g \in G,\ gf = fg\}$. Si G est le groupe des bijections continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$, déterminer $Z(G)$.

Exercice 39

Soit p premier et soit G un groupe abélien tel que pour tout $x \in G$, $x^p = 1$. Montrer que $|G|$ est une puissance de p.

Exercice 40

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Quels sont les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?

Exercice 41

Soit A un anneau commutatif.

(a) Soit I un idéal qui soit aussi un anneau pour les lois induites. Montrer que I est monogène.

(b) Donner un anneau A commutatif ayant un idéal qui soit un anneau pour les lois induites sans être un sous-anneau de A.

(c) Soient $e, f \in A$ idempotents (c'est-à-dire tels que $e^2 = e$ et $f^2 = f$) vérifiant $e + f = 1$. Montrer que A est isomorphe à l'anneau produit $eA \times fA$.

(d) En déduire l'isomorphisme chinois : si $m \wedge n = 1$, montrer que $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 42

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe fini G. On note $HK = \{hk;\ h \in H,\ k \in K\}$.

(a) On suppose que $H \cap K = \{1\}$. Calculer $|HK|$.

(b) Montrer que
$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

(c) Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si HK est stable par produit.

(d) Montrer que $HK \leq G \iff HK = KH$.

(e) Montrer que si $\frac{|G|}{|H|} \wedge \frac{|G|}{|K|} = 1$, alors $G = HK$.

Exercice 43

Soit K un corps. Soit $\varphi : \mathrm{M}_n(K) \to \mathrm{M}_n(K)$.

(a) Si φ est un automorphisme de K-algèbres (c'est-à-dire une application linéaire bijective telle que $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$), montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ tel que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(K)$, $\varphi(A) = PAP^{-1}$.

  i. Supposons φ de cette forme. Soit $y \in K^n \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe $z \in K^n$ tel que pour tout $x \in K^n$, $\varphi(xy^\top)z = Px$.

  ii. Réciproquement, soit $y \in K^n \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe $z \in K^n$ tel que l'application $x \mapsto \varphi(xy^\top)z$ soit dans $\mathrm{GL}_n(K)$ et qu'alors $\forall A \in \mathrm{M}_n(K), \varphi(A) = PAP^{-1}$.

(b) Si φ est seulement un automorphisme d'anneaux, montrer qu'il existe un automorphisme de corps $f \in \mathrm{Aut}(K)$ et $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ tels que
$$\forall A \in \mathrm{M}_n(K),\ \varphi(A) = P\tilde{f}(A)P^{-1} \text{ où } \tilde{f}(A) = (f(A_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

  i. Notons $Z = \{A \in \mathrm{M}_n(K);\ \forall B \in \mathrm{M}_n(K),\ AB = BA\}$. Montrer que $Z = \{\lambda I;\ \lambda \in K\}$.

  ii. Montrer que $\varphi(Z) = Z$.

  iii. Montrer qu'il existe $f \in \mathrm{Aut}(K)$ tel que $\forall \lambda \in K,\ \varphi(\lambda I) = f(\lambda)I$.

  iv. Montrer que $\tilde{f}$ est un automorphisme d'anneaux.

  v. Que dire de $\varphi \circ \tilde{f}^{-1}$?

(c) Si φ est bijective linéaire telle que $\forall A, B \in \mathrm{M}_n(K),\ \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$, montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ tel que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(K)$, $\varphi(A) = PA^\top P^{-1}$.

Exercice 44

Soit G un groupe abélien fini. On note $e(G) = \min\{k \geq 1;\ \forall x \in G, x^k = 1\}$.

(a) Montrer que $e(G)$ est le ppcm des ordres des éléments de G.

(b) Montrer qu'il existe un élément de G d'ordre $e(G)$.

(c) Montrer que si p est premier alors $e((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*) = p - 1$. En déduire que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique.

Exercice 45

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que pour tout $d \mid n$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ admet un unique sous groupe d'ordre d isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. En déduire que
$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

(b) Montrer que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique.

Exercice 46

Trouver tous les $a, b \in \mathbb{N}$ tels que

(a) $7^a - 2^b = 1$.

(b) $5^a - 2^b = 1$.

Exercice 47

Un idéal propre I d'un anneau commutatif A est dit premier si

$$\forall x, y \in A,\ xy \in I \implies x \in I \text{ ou } y \in I.$$

(a) Quels sont les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$?

(b) Quels sont les idéaux premiers de $K[X]$?

(c) Soit $a \in A \setminus \{0\}$ et $I = aA$. Si I est premier, montrer que a est irréductible.

Exercice 48

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$P(i) = \frac{n-i+1}{n+1} x^i (-1)^{n-i}.$$

Calculer $P(n+1)$.

Exercice 49

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ premiers et $x \in \mathbb{Z}$ tels que $q \mid 1 + x + \ldots + x^{p-1}$. Montrer que $q = p$ ou $p \mid q - 1$.

Exercice 50

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ distincts et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n \mid \varphi(a^n - b^n)$ (indication : supposer d'abord a et b premiers entre eux et regarder l'ordre de a/b dans $(\mathbb{Z}/(a^n - b^n)\mathbb{Z})^*$).

Exercice 51

Trouver les couples (p, q) de nombres premiers tels que $pq \mid 2^p + 2^q$ (indication : considérer les valuations 2-adiques des ordres de 2 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ et $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$).

Exercice 52

(a) Soient $P \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire et r une racine rationnelle de P. Montrer que chaque facteur premier du dénominateur de r est un facteur premier de l'un des dénominateurs des coefficients de P.

(b) Soient $P \in (K(X))[Y]$ unitaire et $F \in K(X)$ une racine de P. Montrer que l'ensemble des pôles de F est inclus dans la réunion des ensembles des pôles des coefficients de P.

(c) Soient K un corps infini et $P \in K[X]$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que P est constant.

(d) Soient K un corps infini, $P \in K[X]$ non constant et $F \in K(X)$ telle que $P \circ F = 0$. Montrer que F est constante et est une racine de P.

Exercice 53

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $P \circ F = 0$. Montrer que F est une racine de P.

Exercice 54

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Donner une CNS pour que la fonction associée à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie sur $\mathbb{C}$ privé des pôles de F soit surjective.

Exercice 55

Calculer

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{z}{1-z}.$$

6 Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 56

On munit l'e.v.n. $\mathbb{R}[X]$ de la norme définie par $\|P\| = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$. Pour quels $a \in \mathbb{R}$ la forme linéaire $P \mapsto P(a)$ est-elle continue ?

Exercice 57

Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que pour toute suite de fonctions $f_n \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, (f_n) converge simplement vers 0 si et seulement si $\|f_n\| \longrightarrow 0$?

Exercice 58

Soit E un espace vectoriel réel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ telles que $\|\cdot\|_1 \leq c\|\cdot\|_2$ avec $c > 0$.

(a) Montrer que les ouverts de E pour $\|\cdot\|_2$ sont des ouverts pour $\|\cdot\|_1$.

(b) Énoncer et démontrer une réciproque à la première question.

(c) Montrer que si A est dense dans E pour la norme $\|\cdot\|_2$ alors il est aussi dense pour la norme $\|\cdot\|_1$.

(d) En déduire que si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ coïncident sur un tel ensemble A alors elles sont égales.

(e) Donner un contre-exemple à la question ci-dessus dans le cas où l'on suppose seulement que A est dense pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 59

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],[0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Définissons les ensembles

— $\mathcal{I} \subset E$ l'ensemble des applications continues injectives de $[0,1]$ dans lui-même.

— $\mathcal{S} \subset E$ les applications continues surjectives.

— $\mathcal{B} \subset E$ les applications continues bijectives.

Lesquels sont ouverts ? Lesquels sont fermés ? Combien de composantes connexes par arcs ont-ils ?

Exercice 60

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],[0,1])$ muni de $\|\cdot\|_1$. Définissons les ensembles

— $\mathcal{I} \subset E$ l'ensemble des applications continues injectives de $[0,1]$ dans lui-même.

— $\mathcal{S} \subset E$ les applications continues surjectives.

— $\mathcal{B} \subset E$ les applications continues bijectives.

Lesquels sont ouverts ? Lesquels sont fermés ? Lesquels sont denses ? Combien de composantes connexes par arcs ont-ils ?

Exercice 61

Soient E et F deux e.v.n. de dimension finie. On dit qu'une application $f : E \to F$ est propre si pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est compact.

(a) Montrer que si f est propre alors

$$\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{1}$$

(b) Supposons f continue. Montrer que (1) implique la propreté de f.

(c) On suppose toujours f continue. Montrer que pour tout fermé Z de E, $f(Z)$ est fermé.

Exercice 62

Soit E un e.v.n. et φ une forme linéaire sur E. Montrer que $\mathrm{Ker}\varphi$ est soit fermé soit dense. Dans le cas où $\mathrm{Ker}\varphi$ est fermé, montrer que φ est continue.

Exercice 63

(prérequis : réduction, exponentielle de matrices) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.

(a) Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique polynôme P_u de degré minimal inférieur à n tel que $P_u(u) = e^u$.

(b) Pour quels valeurs de n l'application $u \mapsto P_u$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ est-elle continue ?

Exercice 64

Soit E un e.v.n. de dimension finie. Soit $C \neq \emptyset$ un fermé de E. Soit $f : C \to C$.

(a) Si f est k-lipschitzienne pour $k \in [0, 1[$, montrer que f admet un unique point fixe.

(b) Si f est seulement 1-lipschitzienne et que C est compact convexe, montrer que f admet un point fixe.

(c) Donner un contre-exemple à la question précédente avec C compact non convexe, puis avec C convexe non compact.

Exercice 65

Soit E un e.v.n. de dimension finie et $K \subset E$ un compact d'intérieur non vide. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(K) \subset K$. Montrer que $|\det u| \leq 1$.

Exercice 66

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $N : E \to \mathbb{R}_+$ une application telle que

— $N(x) = 0 \iff x = 0$

— et $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

Montrer que N est une norme si et seulement si $\{x \in E;\ N(x) \leq 1\}$ est convexe.

Exercice 67

Soit E un e.v.n. et soit C un convexe non vide de E. Soient $x \in \mathring{C}$ et $y \in C$. Montrer que $[x, y[\subset \mathring{C}$.

Exercice 68

Soit C un convexe compact du plan complexe dont l'intérieur contient zéro. Montrer qu'il existe une fonction continue surjective périodique de $\mathbb{R}$ dans ∂C.

7 Algèbre linéaire

Exercice 69

Soit K un corps. Soit $f : \mathrm{M}_n(K) \to K$ telle que $\forall A, B \in \mathrm{M}_n(K),\ f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer qu'il existe $g : K \to K$ telle que $\forall x, y \in K,\ g(xy) = g(x)g(y)$ et $\forall A \in \mathrm{M}_n(K),\ f(A) = g(\det(A))$.

(a) On peut supposer f non nulle. Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ alors $f(A^{-1})f(A) = 1$.

(b) Montrer que si $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ sont semblable alors $f(A) = f(B)$.

(c) Montrer que si A n'est pas inversible alors $f(A) = 0$. On pourra se ramener à une matrice de la forme J_r pour $r < n$.

(d) Montrer le résultat voulu pour les matrices diagonales.

(e) Montrer que si T est une matrice de transvection, alors $f(T) = 1$. Conclure.

Exercice 70

Soit I un ensemble. Soit E un s.e.v. de dimension finie des applications bornées de I dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'une suite (f_n) d'éléments de E converge uniformément si et seulement si elle converge simplement (indication : montrer que si I est infini et si $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ est une base de E, alors il existe $x_1, \ldots, x_d \in I$ tels que $(e_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq d}$ soit inversible).

Exercice 71

(a) Donner une CNS pour que deux transvections commutent.

(b) Donner une CNS pour qu'une transvection et une dilatation commutent.

Exercice 72

Soit K un corps. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{M}_n(K[X])$ telle qu'il existe $x \in K$ pour lequel $(a_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{GL}_n(K)$.

(a) Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(K(X))$. À quelle condition sur K la réciproque est-elle vraie ?

(b) Si $K = \mathbb{C}$ et si $\forall x \in \mathbb{C},\ (a_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[X])$. Qu'en est-il si $K = \mathbb{R}$?

Exercice 73

Soit E un e.v. de dimension finie. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des s.e.v. de E. Soit $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall F, G \in \mathcal{A},\ f(F+G) = f(F) + f(G) - f(F \cap G).$$

Montrer que f est une fonction affine de la dimension.

Exercice 74

Soit H un hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$. Montrer que $H \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Exercice 75

Soit p premier.

(a) Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{Tr}\left((A+B)^p\right) \equiv \mathrm{Tr}(A^p) + \mathrm{Tr}(B^p) (\mathrm{mod}\ p)$.

(b) Montrer que $\mathrm{Tr}(A^p) \equiv \mathrm{Tr}(A) (\mathrm{mod}\ p)$ pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 76

Considérons $\mathrm{Tr} : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{AB - BA;\ A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\}$.

8 Réduction

Exercice 77

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

(a) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}(f^k) = \mathrm{tr}(g^k)$. Montrer que f et g ont les mêmes valeurs propres comptées avec multiplicité.

(b) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $fg - gf = f$. Montrer que f est nilpotent.

Exercice 78

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $fg - gf = f$.

(a) En exhibant des vecteurs propres de l'endomorphisme $h \mapsto hg - gh$, montrer que f est nilpotent.

(b) Si de plus $\dim \mathrm{Ker} f = 1$ et g est diagonalisable, décrire la matrice de g.

Exercice 79

Soit E un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie.

(a) Soit $u \in \mathcal{GL}(E)$ tel qu'il existe $k \geq 1$ tel que u^k soit diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable.

(b) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \geq 1$ tels que u^k soit diagonalisable. Donner une CNS pour que u soit diagonalisable.

Exercice 80

Soit K un corps infini. Soit E un K-e.v. de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit irréductible. Montrer que pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{rg}(fg - gf) \neq 1$.

Exercice 81

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable.

(a) Si le corps de base est $\mathbb{C}$, montrer que u est semi-simple si et seulement si u est diagonalisable.

(b) Dans le cas général, montrer que u est semi-simple si et seulement si μ_u est produit de facteurs irréductibles unitaires distincts.

Exercice 82

Si K un corps ayant au moins trois éléments, montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres non nulles engendre le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$. Le résultat est-il vrai si $|K| = 2$?

Exercice 83

Soit E un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie. Soient $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $h \neq 0$ et que $fh = hg$. Montrer que f et g ont une valeur propre commune.

Exercice 84

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose que

$$\sup_{M \in G} \|M - I_n\| < 2.$$

Montrer qu'il existe $m \geq 1$ tel que $\forall M \in G,\ M^m = I_n$.

Exercice 85

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ qui ne soit pas une racine de l'unité. Trouver les matrices $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telles que M soit semblable à αM.

9 Espaces euclidiens

Exercice 86

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

(a) Si $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ s'écrit $A = \Omega\Sigma\Omega^\top$ avec $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et Σ est diagonale, on pose $\tilde{f}(A) = \Omega f(\Sigma)\Omega^\top$ où $f(\Sigma)$ est définie en appliquant f sur chacun des coefficients diagonaux. Montrer que $\tilde{f}$ est bien définie.

(b) Si f est convexe et dérivable, montrer que pour tous $A, B \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{tr}\left(\tilde{f}(A) - \tilde{f}(B) - (A - B)\widetilde{f'}(B)\right) \geq 0.$$

Exercice 87

Soit E un espace euclidien. Soit $f : E \to E$ une application linéaire telle que $x \perp y \implies f(x) \perp f(y)$. Montrer que f est proportionnelle à une isométrie.

Exercice 88

(a) Montrer qu'une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de Gram si et seulement si elle est dans $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$.

(b) Soit E un espace euclidien. Soit F un s.e.v. de E et $a \in E \setminus F$. Exprimer la distance de a à F à l'aide de déterminants de matrices de Gram.

Exercice 89

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \dots, C_n$ ses vecteurs colonnes. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique.

(a) Montrer que $|\det\ A| \leq \prod_{i=1}^n \|C_i\|$

(b) En déduire que

$$(|\det\ A|)^{\frac{1}{2n}} \leq \sqrt{n} \max_{i,j} |A_{i,j}|.$$

Exercice 90

Soit E un espace euclidien et $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux. Donner une CNS pour que $\| \int_a^b f \| = \int_a^b \|f\|$.

Exercice 91

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de matrices symétriques commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une matrice symétrique A et une famille de polynômes $(P_i)_{i \in I}$ tels que $\forall i \in I,\ A_i = P_i(A)$.

Exercice 92

Quel est le centre de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 93

Combien de composantes connexes par arcs a $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 94

(prérequis : exponentielle de matrices)

(a) Montrer qu'un morphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est en fait à valeurs dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

(b) Décrire les morphismes continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 95

Trouver tous les sous-groupes G de $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ tels que

$$\forall \Omega \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}),\ \forall g \in G,\ \Omega g \Omega^{-1} \in G.$$

(indication : distinguer le cas où $G \cap \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est trivial ou non)

Exercice 96

Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on note $|A|$ l'unique matrice de $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $|A|^2 = A^\top A$.

(a) Montrer que si $B \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $p > 0$ on peut définir une unique matrice B^p de $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont les puissances p-ièmes des valeurs propres de B et ayant les mêmes sous-espaces propres.

(b) On pose pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $p > 0$

$$\|A\|_p = (\mathrm{tr}|A|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Montrer que $p \mapsto \|A\|_p$ est décroissante et donner les limites en 0 et en $+\infty$.

(c) Montrer que $\| \cdot \|_2$ est une norme associée à un certain produit scalaire.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A_1, \ldots, A_{2n} \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$. Montrer que

$$|\mathrm{tr} A_1 \cdots A_{2n}| \leq \left(\prod_{i=1}^{2n} \mathrm{tr}((A_i A_i^\top)^n) \right)^{\frac{1}{2n}}.$$

(e) Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ et $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Q}_+^*$ sont tels que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$, alors

$$|\mathrm{tr} A_1 \cdots A_n| \leq \prod_{i=1}^n \|A_i\|_{p_i}.$$

Indication : utiliser la décomposition polaire.

(f) Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que

$$\|A\|_p = \sup_{\|B\|_q = 1} \mathrm{tr} A B^\top.$$

Indication : pour le cas d'égalité, utiliser la décomposition polaire.

(g) Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Montrer que

$$\|AB\|_r \leq \|A\|_p \|B\|_q.$$

10 Dénombrabilité et familles sommables

10.1 Dénombrabilité

Exercice 97

Peut-on écrire $\mathbb{R}^2$ comme réunion dénombrable de droites ?

Exercice 98

On définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ en écrivant $x \equiv y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Notons $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ l'ensemble des classes d'équivalence de cette relation. Est-ce que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est dénombrable ?

Exercice 99

Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est-elle dénombrable ?

Exercice 100

Soit E un e.v. sur un corps K ayant une base dénombrable.

(a) Montrer que toute famille libre de E est au plus dénombrable.

(b) Montrer que tout sous espace de E a une base au plus dénombrable.

Exercice 101

Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, il existe $y > x$ tel que $]x, y[\cap E = \emptyset$. Montrer que E est au plus dénombrable.

10.2 Familles sommables

Exercice 102

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels strictement positifs avec I non dénombrable. Montrer que

$$\sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ fini}}} \sum_{i \in J} u_i = +\infty.$$

Exercice 103

(a) Pour quels réels x la famille $(e^{-nx} x^{nm})_{n \geq 1, m \geq 0}$ est-elle sommable ?

(b) Montrer pour de tels x que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{1 - x^n} = \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{e^x - x^m}.$$

(c) Pour quels x la série de gauche converge ? et celle de droite ?

Exercice 104

(a) Montrer que pour des réels x que l'on déterminera,

$$\sum_{n \geq 2} (\zeta(n) - 1) x^n = x^2 \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n - x)}.$$

(b) Évaluer en $x = 1$ et en $x = -1$.

Exercice 105

La famille $\left(\frac{2^{nm}}{2^{n^2} m!} \right)_{n,m \in \mathbb{N}}$ est-elle sommable ?

Exercice 106

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de réels strictement positifs tendant vers zéro non sommable. Montrer que pour tout $x > 0$ il existe $I \subset \mathbb{N}$ tel que la famille $(u_i)_{i \in I}$ soit sommable et $\sum_{i \in I} u_i = x$.

Exercice 107

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Pour quels $s \in \mathbb{R}$ la famille $\left(\frac{1}{(k_1+\ldots+k_d)^s}\right)_{k_1,\ldots,k_d \geq 1}$ est-elle sommable ?

Exercice 108

(a) Soit $(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ une famille de réels positifs tels que $\forall n \geq 1, \forall m \in \mathbb{N}, a_{n,m} \leq c < 1$ et $\forall m \in \mathbb{N}, a_{0,m} = 1$. Notons $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites entières presque nulles. Montrer que $\prod_m \sum_n a_{n,m}$ et $\sum_{f\in\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} \prod_m a_{f(m),m}$ ont même nature et qu'ils sont égaux s'ils convergent.

(b) Application : on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Discuter la convergence du produit ci-dessous et le calculer

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

Exercice 109

(a) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs tels que pour tout $n \geq 1$, $u_n - u_{n-1} \geq \frac{1}{n^{1/4}}$. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{|u_n|^2}$?

(b) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs tels que pour tout $n \geq 1$, pour tout $i \leq n-1$, $|u_n - u_i| \geq \frac{1}{n^{1/4}}$. Que peut-on dire de la nature de la série $\sum \frac{1}{|u_n|^2}$?

(c) Même question en supposant $|u_n - u_i| \geq 1$ avec les u_n réels non nuls ou complexes non nuls.

Exercice 110

Pour quels $\alpha, \beta > 0$ la famille $u_{n,m} = \frac{1}{(n^\alpha+m)^\beta}$ est-elle sommable ?

Exercice 111

Soient $\alpha, \beta > 0$. Soit $u_n \geq 0$ telle que $\sum u_n^{\alpha+\beta}$ converge. Si σ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans lui-même, montrer que la famille $u_n^\alpha u_{\sigma(n)}^\beta$ est sommable et déterminer les bornes de l'ensemble

$$\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^\alpha u_{\sigma(n)}^\beta;\ \sigma \in \mathrm{Bij}(\mathbb{N},\mathbb{N})\right\}.$$

11 Séries entières

Exercice 112

Soient f et g deux fonctions développables en série entière au voisinage de 0 de rayons strictement positifs.

(a) Supposons que $g(0) = 0$. Montrer que $f \circ g$ est développable en série entière de rayon strictement positif et exprimer les coefficients de son développement en fonction de ceux de f et de g.

(b) Supposons que $f(0) \neq 0$. Montrer que $\frac{1}{f}$ est développable en série entière de rayon strictement positif et exprimer les coefficients de son développement en fonction de ceux de f.

Exercice 113

Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \frac{n^k}{n!} z^n$ peut s'écrire sous la forme $P(z)e^z$ où P est un polynôme.

Exercice 114

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ d|k}} u_{n-k} = 1.$$

Calculer de deux façons différentes (u_n).

Exercice 115

Soit $\alpha > 0$. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^\alpha + inx}$.

(a) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$.

(b) Pour quels α la fonction f est-elle DSE au voisinage de 0 ?

Exercice 116

Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Si $z \in \mathbb{C}$, on note $(z;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - zq^k)$.

(a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ le produit $(z;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1 - zq^k)$ converge.

(b) La fonction $f(z) = \frac{1}{(z;q)_\infty}$ est-elle développable en série entière ? Expliciter son développement.

(c) On note pour tous $a, z \in \mathbb{C}$

$$f(a,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n.$$

Montrer qu'on définit ainsi une fonction continue en a et développable en série entière de rayon 1 en z.

(d) Montrer que $f(a,z) = (1 - az) f(aq, z)$.

(e) En déduire que $f(a,z) = (az;q)_\infty f(0,z)$.

(f) Conclure que $f(a,z) = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}$.

Exercice 117

Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Soit $y > 0$ tel que la série $\sum_{n\geq 0} a_n y^n$ converge. On suppose qu'il existe $\alpha \in]0,1[$, $k \in \mathbb{N}$ et $c \neq 0$ tels que

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(y)}{j!}(x-y)^j + c(x-y)^{k+\alpha} + o((x-y)^{k+\alpha}) \text{ quand } x \to y^-.$$

Montrer que $y = R$.

Exercice 118

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ avec $a_n \in \{-1, 1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(0) = 1$ et que $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \geq 0,\ |f^{(k)}(x)| \leq 1$. Trouver f.

Exercice 119

Soit I_n le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$. Calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{I_n}{n!} x^n$.

Exercice 120

Soit $a > 0$. Soit $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} \geq 0$. Montrer qu'alors f est DSE de rayon de convergence au moins a. Que dire si l'on ne suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(2n)} \geq 0$?

12 Probabilités

Exercice 121

Donner un exemple de triplet de v.a. deux à deux indépendantes mais pas mutuellement indépendantes.

Exercice 122

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et soit N une v.a. indépendante de (X_n) à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

(a) Montrer que S_N est une variable aléatoire et calculer sa fonction génératrice en fonction de celles de X_1 et de N.

(b) On suppose que X_1 et N admettent un premier moment. Montrer qu'alors S_N en admet un aussi et l'exprimer en fonction de ceux de X_1 et N.

Exercice 123

Dans une population de n individus, on prélève de manière uniforme avec remise un groupe de i individus puis un groupe de j individus. Quelle est la probabilité que ces deux groupes soient disjoints ?

Exercice 124

Une bactérie a une probabilité p d'être touchée par un laser.

(a) Quelle est la loi du nombre de lancers de rayons laser nécessaires pour finir par toucher la bactérie ?

(b) La bactérie ne meurt que la n-ième fois où elle est touchée. Quelle est la loi du nombre de lancers de rayons laser nécessaires pour tuer la bactérie ?

Exercice 125

Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. telles que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et admettant un moment d'ordre 4.

(a) En utilisant Borel-Cantelli, montrer que $(X_1 + \ldots + X_n)/n \longrightarrow 0$ p.s.

(b) Montrer que le résultat reste valable si l'on ne suppose plus que les X_n ont la même loi mais que leur quatrième moment est borné.

Exercice 126

Montrer que

(a) La convergence en probabilité n'implique pas la convergence L^1.

(b) La convergence en loi n'implique pas la convergence en probabilité.

(c) La convergence en probabilité n'implique pas la convergence p.s.

Exercice 127

Si $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}^k$, ses voisins sont les points $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j \pm 1, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ pour $j \in [\![1, k]\!]$. On considère la marche simple symétrique sur $\mathbb{Z}^k$ issue de 0 notée (S_n). Sachant $S_n = x$, S_{n+1} est pris uniformément parmi les voisins de x.

(a) Calculer la probabilité pour la marche d'être en zéro à l'instant n.

(b) Discuter de la récurrence de la marche.

Exercice 128

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche symétrique simple sur $\mathbb{Z}$.

(a) Calculer $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.

(b) Calculer $\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{2n} > 0)$.

(c) Calculer $\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0)$.

(d) Calculer $\mathbb{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \ldots, S_{2n} \geq 0)$.

(e) Calculer $\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0)$.

Exercice 129

(Restaurant chinois) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit U_n une v.a. uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$. On suppose les U_n indépendantes. Notons σ_n la v.a. à valeurs dans $\mathcal{S}_n$ définie par récurrence à l'aide des U_n. Si $U_n = n+1$, alors $\sigma_{n+1}(n+1) = n+1$ et $\sigma_{n+1|[\![1,n]\!]} = \sigma_n$. Si $U_n = i \in [\![1, n]\!]$, alors on pose $\sigma_{n+1}(i) = n+1$, $\sigma_{n+1}(n+1) = \sigma_n(i)$ et $\sigma_{n+1|[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} = \sigma_{n|[\![1,n]\!]\setminus\{i\}}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, σ_n est uniforme sur $\mathcal{S}_n$.

(b) Donner la loi du nombre d'orbites C_n de σ_n.

(c) Que dire de C_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice 130

(couplage de Feller) On construit une permutation aléatoire de la façon suivante : on commence par construire le cycle c_1 qui contient 1. À chaque étape k, on choisit uniformément un entier dans $[\![1,n]\!] \setminus \{\sigma(1),\ldots,\sigma^{k-1}(1)\}$. Si on obtient 1, cela ferme le cycle de 1. Sinon, on ajoute l'entier au cycle et on continue. Une fois le cycle de 1 fermé, on construit le cycle de $\min([\![1,n]\!] \setminus \mathrm{Supp} c_1)$ de la même façon, etc...

(a) Montrer que la permutation ainsi construite est uniforme sur $\mathcal{S}_n$.

(b) Quelle est la loi de la taille de l'orbite de 1 ?

(c) Sachant la taille du cycle de 1, quelle est la loi de la taille du deuxième cycle dans la construction ? Généraliser.

13 Équations différentielles linéaires

Exercice 131

Résoudre de deux façons différentes $(x+1)y'' - y' - xy = 0$.

Exercice 132

Considérons l'équation différentielle $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ sur un intervalle I où a, b, c sont à valeurs réelles.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que le changement de variable $x = f(t)$ transforme l'équation différentielle en une équation différentielle à coefficients constants.

(b) Résoudre de cette façon $y'' + y' \tan(x) - y\cos^2 x = 0$.

Exercice 133

Soit E un e.v.n., soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans E de la forme $t \mapsto \sum_{k=0}^{n} t^k a_k$ avec $a_0, \ldots, a_n \in E$.

(a) Si E est de dimention finie, rappeler la forme des solutions de $x' = u(x)$.

(b) On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $e^{\lambda t}P(t)$ soit solution de l'équation différentielle vectorielle $x' = u(x)$. Montrer que le coefficient dominant de P est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ et que les autres coefficients de P sont dans l'espace caractéristique associé.

(c) On suppose qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}$ tels que la fonction $t \mapsto \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} P_k(t)$ soit solution de $x' = u(x)$. Montrer qu'alors les $t \mapsto e^{\lambda_k t} P_k(t)$ sont elles aussi solutions.

Exercice 134

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres n'appartiennent pas à $2i\pi\mathbb{Z}$. Soit $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continue 1-périodique. Montrer que l'équation différentielle $x' = Ax + B(t)$ a une unique solution 1-périodique.

Exercice 135

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $A : I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ un système fondamental de solutions de $x' = A(t)x$. Calculer $\det(e_1(t), \ldots, e_n(t))$.

Exercice 136

Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ non nulle solution de $f'' + a(t)f' + b(t)f = 0$ avec a, b deux fonctions continues à valeurs réelles.

(a) Montrer que f s'annule un nombre fini de fois.

(b) Soit (f, g) un système fondamental de solutions de l'équation différentielle. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de f il y a un unique zéro de g (indication : utiliser le wronskien).

Exercice 137

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute valeur propre λ de A, $\mathrm{Re}\lambda < -\alpha$. Montrer que $\|e^{tA}\| = O(e^{-\alpha t})$ quand $t \to +\infty$.

14 Calcul différentiel

Exercice 138

(a) Calculer la différentielle en l'identité de $A \mapsto A^{-1}$ définie sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(b) Calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 139

Montrer que l'application qui à un n-uplet croissant de réels distincts $a_1 < \ldots < a_n$ associe le polynôme $\prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

Exercice 140

Différentielle du déterminant.

(a) Montrer que $A \to \det A$ est différentiable en tout point.

(b) Calculer sa différentielle en l'identité.

(c) Caculer sa différentielle en une matrice inversible.

(d) Calculer sa différentielle en tout point à l'aide de la comatrice.

Exercice 141

(a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Quelle est la différentielle de $A \mapsto A^p$ définie sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$?

(b) Calculer la différentielle de $A \mapsto e^A$ définie sur $M_n(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que

$$d_A \exp(H) = \int_0^1 e^{tA} H e^{(1-t)A} dt.$$

Exercice 142

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(a) Si $f(0) = 0$, montrer que l'on peut écrire $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k(x)$pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ avec $f_1, \ldots, f_n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(b) Que dire si de plus $d_0 f = 0$?

Exercice 143

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues. On suppose que f et g sont dérivables à droite sur $]a, b[$ et que pour tout $x \in]a, b[$, $\|f'_d(x)\| \leq g'_d(x)$.

(a) Notons $U = \{x \in [a, b];\ \|f(x) - f(a)\| > g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon\}$. Montrer que U est ouvert et ne contient pas a.

(b) Montrer que $U = \emptyset$.

(c) Conclure que $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.