Résumé de Travaux

présenté devant

l'Université Pierre et Marie Curie

pour obtenir

l'Habilitation à Diriger des Recherches

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Josselin Garnier

---

# Contributions à l'étude des phénomènes de propagation d'ondes en milieux complexes

---

Travaux présentés le 31 janvier 2000 devant le jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| M. F. Comets | Université Paris VII | |
| M. J. Jacod | Université Paris VI, | Président |
| M. J. Lacroix | Université Paris VI | |
| M. A. Migus | Ecole Polytechnique | |
| M. E. Pardoux | Université de Provence | |
| M. S. Wabnitz | Alcatel | |

au vu des rapports de :

| | |
|---|---|
| M. R. Carmona | Université de Princeton |
| M. G. Papanicolaou | Université de Stanford |
| M. E. Pardoux | Université de Provence |

# Remerciements

Je tiens ici à exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé dans l'élaboration de ce travail. Mes remerciements vont tout d'abord vers mon directeur de thèse de doctorat, Jean-Pierre Fouque, qui m'a fait découvrir les milieux aléatoires, un vaste sujet encore peu exploré. Je souhaite lui exprimer toute ma gratitude pour le plaisir que j'ai eu à entreprendre un travail de recherche sous sa conduite. Il m'a lancé et guidé sur des problèmes passionnants qui ont nourri mes premières années de recherche.

Parmi ceux qui accompagné mes débuts dans le monde des mathématiques appliquées, je tiens aussi à remercier Jacques Neveu qui a toujours suivi mes recherches avec intérêt. Je tiens à lui exprimer ma reconnaissance pour cela ainsi que pour ses qualités d'enseignant et sa gentillesse, qui ont tenu une part importante dans ma décision de me tourner vers les probabilités.

Jean-Claude Nédelec, puis Pierre-Arnaud Raviart, et enfin Vincent Giovangigli m'ont fait l'honneur de m'accueillir au Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique, et je les en remercie. Le CMAP est un laboratoire où il fait bon vivre et travailler. Je dois beaucoup à M. Raviart qui m'a encouragé et soutenu afin que je poursuive mes recherches au sein de son laboratoire à l'issue de ma thèse de doctorat.

René Carmona, George Papanicolaou et Etienne Pardoux ont accepté de rapporter sur mon travail d'habilitation. C'est un grand honneur pour moi, et je leur exprime toute ma reconnaissance. Je remercie aussi vivement Francis Comets, Jean Lacroix, Jean Jacod, Alain Migus et Stefan Wabnitz pour avoir accepté de participer à mon jury. Je tiens en particulier à exprimer ma gratitude à M. Migus qui, en tant que directeur du Groupement De Recherches "Propagation des Ondes en milieux Aléatoires et / ou Non-linéaires" et en tant qu'opticien, a bien voulu porter attention à mes travaux.

Une bonne partie des travaux que je présente ici sont le résultat de collaborations avec des physiciens. J'ai pu en particulier apprécier les contacts fructueux et enrichissants que j'ai eus avec les physiciens du laser du CEA, du Centre de Limeil-Valenton et du CESTA à Bordeaux. Parmi eux je citerai Claude Gouédard, Claude Rouyer, et Laurent Videau avec qui j'ai pu avoir des discussions stimulantes.

Je ne peux conclure ces remerciements sans exprimer ma reconnaissance à ceux qui ont jalonné ces années. Qu'il me soit ainsi permis de citer Habib Ammari, Eric Bonnetier, Carl Graham, Leila Kallel, Aldjia Mazari, Marc Schoenauer, ainsi que tous les habitués de la pause café du midi. Je remercie aussi Geo Boléat, Jeanne Bailleul, Liliane Doaré et Nathalie Limonta pour leur dévouement et leur efficacité.

# Table des matières

# Introduction à l'étude des phénomènes de propagation d'ondes en milieux complexes

Le centre d'intérêt de mes recherches est l'étude de systèmes dynamiques avec des paramètres aléatoires, et plus particulièrement le problème de la transmission d'ondes à travers un milieu aléatoire. Je cherche à établir des équations fermées sur les grandeurs caractéristiques de ces systèmes, puis à analyser les solutions de telles équations. Mais avant de rentrer dans les détails, prenons un peu de recul.

## 1 Optique en milieux complexes

La théorie de Maxwell et son idée que la lumière est un champ électro-magnétique ont permis d'unifier l'approche d'un grand nombre de phénomènes. Cette théorie s'est révélée si efficace que certains ont cru, à la fin du dix-neuvième siècle, que bien peu de nouvelles découvertes fondamentales restaient à faire. Les adeptes de cette doctrine, le positivisme, ont bientôt dû revoir leur position devant l'incapacité de la théorie des ondes à expliquer un nombre croissant d'observations étranges (effet photo-électrique, radio-activité, etc). Ces effets n'ont pu être expliqués qu'en reprenant l'idée d'une nature corpusculaire de la lumière, non pas comme l'entendait Newton en son temps, mais d'une manière compatible et complémentaire avec l'aspect ondulatoire développé dans la théorie classique. La théorie quantique était née, dont le développement fournit de nombreux résultats, qui reposait en partie sur la finesse de l'approximation de l'optique géométrique d'une part, et sur la nature linéaire des équations d'autre part, qui signifiait que tout champ, même extrêmement complexe, était en réalité la superposition d'ondes planes beaucoup plus simples.

Néanmoins, des comportements très complexes sont possibles lorsque la lumière traverse un milieu aléatoirement inhomogène. Les effets induits par les phénomènes aléatoires dans des problèmes de propagation d'ondes linéaires sont essentiellement au nombre de deux : la dispersion d'une part et la localisation d'autre part. La dispersion est un phénomène qui existe déjà dans des milieux homogènes. Elle résulte du fait que la relation de dispersion (qui relie la fréquence temporelle $\omega$ et le nombre d'onde spatial $k$) n'est pas linéaire, ce qui implique que la vitesse de phase $\omega(k)/k$ n'est pas constante. Comme une solution générale consiste en une superposition de modes avec différents $k$, les modes vont alors se propager à des vitesses différentes et se disperser. C'est par exemple le cas pour l'équation de Schrödinger linéaire :

$$iu_t + u_{xx} = 0,$$

dont la relation de dispersion est $\omega(k) = k^2$. Mais l'équation d'onde classique :

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = 0,$$

est elle hyperbolique et non-dispersive ($\omega(k) = c_0 k$). Cependant, si des perturbations aléatoires viennent affecter de manière inhomogène et/ou anisotrope l'indice du milieu et sa célérité, l'onde va commencer à se disperser. La localisation est elle un phénomène purement aléatoire, qui exprime le fait que le coefficient de transmission d'une onde décroît de manière exponentielle avec la taille du milieu aléatoire; en particulier, il existe $\lambda(k)$, nombre strictement positif appelé longueur de localisation qui dépend du nombre d'onde $k$, tel que pour $L \gg \lambda(k)$ la transmission est très faible. Ce phénomène fut découvert par Anderson en 1958 [8], et peut être gênant pour de nombreuses applications, par exemple pour des transmissions de signaux à longue distance, mais on peut aussi en tirer parti. En particulier on cherche aujourd'hui à développer des cavités laser aléatoires sans miroir, où la formation de la cavité est assurée par la diffusion multiple dans le milieu désordonné [21].

Le point commun de tous les phénomènes mentionnés ci-dessus est qu'ils sont décrits par des équations linéaires. En effet, l'amplitude du champ a longtemps semblé jouer un rôle mineur dans les équations de Maxwell. Cependant, il fut bientôt mis en évidence certains phénomènes qui ne pouvaient pas se déduire d'une approche linéaire (effet Raman, instabilité modulationnelle, etc [91]). Dans les années 60 fut découvert le laser (light amplification by stimulated emission of radiation), qui est l'analogue en optique du maser (microwave au lieu de light) découvert dix ans plus tôt. Il en résulta que des intensités locales extrêmement élevées pouvaient être obtenues, car le laser est une source d'une cohérence quasi-parfaite, et peut donc être concentré et focalisé de manière très efficace. L'essor de l'optique non-linéaire suivit alors naturellement. De nombreuses découvertes furent exhibées. En dimension un, la méthode du scattering de Zakharov permit de mettre en évidence dans les années 60 l'existence de solitons qui sont des solutions analytiques et stables de l'équation de Schrödinger non-linéaire [114] :

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0.$$

Un soliton est à l'équation de Schrödinger non-linéaire ce qu'une onde monochromatique est à l'équation de Schrödinger linéaire, à savoir un mode normal de propagation. Un soliton réalise un équilibre stable et parfait entre la dispersion linéaire et l'autofocalisation non-linéaire. Il garde par conséquent sa forme et sa vitesse tout au long de sa propagation. Il résulte en particulier de cette qualité que des trains de solitons sont des candidats idéaux pour la transmission à longue distance d'informations binaires par des fibres optiques [55]. Ainsi, l'optique non-linéaire fut d'abord un domaine négligé, puis approché par la force des choses, et se révèle maintenant très riche et intéressant en vue d'applications pratiques. De notre point de vue, il ressort de cette présentation de quelques notions d'optique que des effets non-linéaires, tels que le développement d'instabilités ou l'autofocalisation, et linéaires, tels que la dispersion ou la localisation, sont en compétition; les premiers peuvent l'emporter dans certaines situations.

## 2 Méthodologie

Les résultats que je présente dans cette thèse apportent une contribution à l'étude des phénomènes aléatoires dans des problèmes de propagation d'ondes. Ces problèmes ont des origines physiques variées. On les rencontre notamment en géophysique (ondes sismiques dans l'écorce terrestre), en acoustique sous-marine (ondes sonar dans l'océan), en électromagnétisme (ondes radio dans l'atmosphère) ou en physique du laser (traversée de l'atmosphère par des lasers, lissage optique). Les phénomènes physiques considérés sont différents, mais ils ont tous lieu dans un milieu complexe dont on ne possède qu'une description statistique. D'un point de vue mathématique, on a donc affaire à des équations d'évolution, qui sont intrinsèquement assez simples, mais dont les coefficients sont aléatoires. Il est alors impossible, d'un point de vue analytique ou numérique, de prétendre résoudre de tels systèmes. Un point essentiel de l'étude consiste alors à appréhender les différentes échelles caractéristiques du problème. Certaines considérations, d'origine physique, nous permettent d'avancer des hypothèses sur les ordres de grandeur respectifs des amplitudes et des distances sur lesquelles varient les coefficients qui interviennent. On développe alors une analyse asymptotique basée sur ces hypothèses. On cherche à mettre en évidence la (ou les) bonne asymptotique, c'est-à-dire les rapports d'échelles entre les diverses quantités qui vont conduire, quand on les pousse à la limite, à un régime asymptotique remarquable. On essaie ensuite d'identifier ces régimes asymptotiques. Ainsi le travail se décompose en trois tâches intimement liées. Tout d'abord vient la phase de modélisation, puis des théorèmes limites entrent en jeu. Enfin on tente d'identifier la limite de la manière la plus simple possible, souvent à travers des lois de processus de diffusion.

Pour notre part nous avons étudié des problèmes liés à l'optique, et notamment des problèmes de propagation dans des fibres optiques linéaires ou non-linéaires. Les chapitres 1 et 2 sont consacrés à des problèmes linéaires, et les chapitres 3 et 4 à des problèmes non-linéaires. Le chapitre 5, qui traite aussi de phénomènes aléatoires et non-linéaires en optique, représente une grosse part du travail contenu dans cette thèse, car la modélisation des problèmes et les applications des résultats ont nécessité au moins autant de travail que la résolution des questions mathématiques elles-mêmes. De manière générale, j'ai passé beaucoup de temps à développer des collaborations avec des physiciens, à la fois en optique des fibres optiques (avec F. Kh. Abdullaev de l'Institut de Physique de Tashkent, E. Seve et S. Wabnitz de l'Université de Dijon, et des ingénieurs d'Alcatel-Marcoussis) et en optique des lasers de puissance (L. Videau, C. Gouédard et C. Rouyer du CEA, et C. Sauteret et A. Migus du Laboratoire pour l'Utilisation des Lasers Intenses à l'Ecole Polytechnique). La mise au point d'un langage commun, la bonne compréhension des problèmes physiquement intéressants, sont à mon sens des points cruciaux du point de vue des mathématiques appliquées. Faute de quoi les mathématiques que je développe resteront au stade de l'applicable, et ne passeront jamais au stade de l'appliqué. De plus, comme je tiens à voir mes résultats effectivement appliqués, je suis obligé de rédiger une version claire des résultats qui soit exploitable par les physiciens. C'est pourquoi j'ai publié certains de mes travaux dans des revues d'optique et non de mathématiques. Mais ceci n'enlève rien à la rigueur des démonstrations des résultats. Preuve en est (voir les détails dans le chapitre 5) : après avoir dépensé beaucoup d'énergie à essayer d'expliquer une observation expérimentale "anormale" en essayant de les analyser avec les équations de propagation qu'on peut trouver dans les livres d'optique classique, j'ai été obligé de revoir la dérivation de l'équation de Schrödinger à partir de l'équation de Maxwell dans les cristaux, pour m'apercevoir que des termes avaient été négligés, qui conduisent à une forme généralement anisotrope de l'opérateur de diffraction (au lieu du Laplacien transverse habituel). La première vérification expérimentale sur des cristaux de KDP ($KH_2PO_4$ : dihydrogénate de potassium) vient juste d'avoir lieu, et les conséquences théoriques et pratiques de ce résultat risquent de m'occuper encore longtemps.

## 3 Tour d'horizon des problèmes abordés

Dans le chapitre 1, nous appliquons des théorèmes originaux d'approximation-diffusion à plusieurs échelles à des problèmes de propagation d'ondes en milieux aléatoires : transmission de modes optiques à travers un guide d'ondes plan aléatoire; propagation d'une onde dans une fibre optique à variation d'indice quadratique. On considère différents modèles de perturbations (défauts d'indice, d'alignement, de courbure,...) et on étudie la situation asymptotique naturelle en optique où les fluctuations des paramètres sont petites mais la distance de propagation est longue. Des expressions précises pour l'onde en sortie du guide sont calculées. Elles montrent que des comportements très variés peuvent se produire, comme des translations, des étalements ou même des focalisations.

Il est apparu que le problème de la propagation dans des fibres à variation d'indice quadratique se formulait de manière identique à celui de l'oscillateur harmonique quantique, à ceci près que la coordonnée spatiale selon l'axe de propagation dans la fibre est remplacée par le temps dans le cas de l'oscillateur harmonique. Nous nous sommes alors penché sur ce dernier problème, pour s'apercevoir après quelques discussions avec les physiciens que les questions physiquement intéressantes étaient très différentes dans les deux problèmes. Nous avons donc dû revoir de manière profonde notre travail avant d'être en mesure de fournir des résultats intéressants, dont certains sont présentés dans le chapitre 2. La question que nous traitons est la suivante. Nous considérons l'évolution d'une particule dans un oscillateur harmonique plongé dans un champ de forces dérivant d'un potentiel aléatoire ergodique en temps. Ce potentiel est petit, mais nous attendons suffisamment longtemps avant de faire une mesure de l'énergie de la particule pour entrer dans un régime asymptotique pour lequel nous pouvons calculer des équations d'évolution effectives. On trouve en particulier un système fermé gouvernant les probabilités de transition, qui peut être interprété en termes d'un processus markovien de sauts. On calcule alors explicitement la distribution d'énergie de la particule.

Le chapitre 3 apporte une nouvelle contribution à la lignée des travaux qui étudient la compétition entre les effets aléatoires et non-linéaires dans les phénomènes de propagation d'ondes. Il est connu que, d'une part, dans un milieu linéaire uni-dimensionnel aléatoire, la localisation d'Anderson intervient, ce qui signifie en particulier que l'intensité transmise décroît de manière exponentielle avec la taille du milieu. D'autre part, en l'absence d'inhomogénéités, certains systèmes non-linéaires laissent se propager des paquets d'ondes localisés (appelés solitons) sans déformation et à vitesse constante. Nous avons étudié la propagation de solitons à travers des systèmes non-linéaires aléatoirement perturbés. Nous avons considéré l'équation de Schrödinger non-linéaire uni-dimensionnelle, qui modélise la propagation d'impulsions solitons à travers des milieux non-linéaires du type fibre optique. Des inhomogénéités viennent perturber légèrement le potentiel, le coefficient de dispersion de vitesse de groupe et le coefficient non-linéaire. On recherche l'effet de ces petites perturbations après une importante longueur de transmission, en développant une méthode de perturbations stochastiques autour de la transformation d'inverse scattering. Il apparaît plusieurs régimes asymptotiques possibles, lorsqu'on fait tendre à la fois l'amplitude des fluctuations aléatoires vers zéro et la taille de la couche considérée vers l'infini. Le soliton peut voir sa masse diminuer de manière exponentielle (en fonction de la taille du milieu traversé), ou encore selon une loi en puissance; il peut même conserver sa masse quasi-indéfiniment si celle-ci est suffisamment importante initialement, les perturbations n'affectant alors que sa vitesse.

Dans le chapitre 4 nous considérons un autre problème lié à la propagation non-linéaire dans des fibres optiques. Il est connu que l'action conjuguée d'une non-linéarité de type Kerr et de la dispersion chromatique peut provoquer le développement d'une instabilité modulationnelle, qui conduit à la croissance exponentielle de modulations d'amplitude sur des ondes initialement quasi-continues. Ce phénomène est en fait le principal facteur qui limite le taux de transfert dans la transmission par fibres optiques à haut débit, car il est d'autant plus important que l'impulsion est courte. L'instabilité modulationnelle a été étudiée dans le cadre de l'équation de Schrödinger non-linéaire homogène, qui décrit la propagation d'impulsions courtes dans des fibres optiques parfaitement homogènes. Mais les fibres réelles présentent des fluctuations aléatoires de leurs paramètres. Nous avons donc considéré une équation de Schrödinger non-linéaire (ou un système d'équations de ce type couplées) à coefficients variables et nous avons calculé les exposants de Lyapunov qui caractérisent les gains de ces instabilités.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude des faisceaux laser partiellement cohérents. Cette partie est le fruit d'une collaboration avec le centre de Limeil-Valenton du CEA et le laboratoire pour l'Utilistion des Lasers Intenses de l'Ecole Polytechnique au sein de l'activité du GDR "Propagation d'Ondes en milieux Aléatoires et / ou Non-linéaires", maintenant appelé "Propagation et Imagerie en Milieu Aléatoire". La situation reliée à la recherche sur la fusion par confinement inertiel est la suivante. En irradiant de toutes parts pendant une durée de quelques nanosecondes une capsule sphérique contenant un mélange de deutérium et de tritium à l'aide d'une multitude de faisceaux laser de puissance, on pense comprimer la sphère suffisamment pour qu'un point chaud s'y développe et déclenche une réaction de fusion. Cette méthode requiert une irradiation parfaitement uniforme, faute de quoi la sphère se brise au lieu d'imploser. Or de petites aberrations, inévitables dans les chaînes d'amplification, impriment une légère distorsion du profil spatial des faisceaux, et rendent a priori inaccessibles les critères drastiques d'uniformité de l'irradiation. Le lissage optique tente d'apporter une solution à ce problème. Au lieu de chercher à supprimer les distorsions, on va en rajouter, en imposant par exemple des lames de phase aléatoires pour briser la cohérence spatiale, et des modulateurs de phase aléatoires pour briser la cohérence temporelle. Ainsi, la cible va voir un profil spatial très perturbé, mais fluctuant de manière très rapide, avec un temps caractéristique de l'ordre de la picoseconde. Comme le temps de réponse du plasma est plus long, celui-ci va intégrer les profils spatiaux qui, par un effet de type loi des grands nombres, vont tendre vers un profil moyen plat. Ainsi, si le profil spatial instantané est perturbé, le profil spatial intégré temporellement est très lisse. Notre contribution est double. D'une part nous avons caractérisé de manière précise la statistique des profils spatiaux générés par les différentes méthodes de lissage envisagées. D'autre part, selon la méthode de lissage retenue, on propage dans la chaîne laser un faisceau présentant des caractéristiques de cohérences spatiale et/ou temporelle partielles. Nous avons donc étudié l'impact de ces caractéristiques aux différents étages de propagation linéaire et non-linéaire, d'amplification et de conversion de fréquence.

Le dernier chapitre se détache quelque peu des autres parties de cette thèse. Il s'agit en fait d'un concours de circonstances qui a abouti au fait que mon bureau était encadré par ceux de Marc Schoenauer et Leila Kallel, deux "généticiens" (au sens informatique) dont le travail consiste à résoudre des problèmes très complexes à l'aide d'algorithmes évolutionnaires stochastiques. Après de nombreux mois où des discussions informelles sur nos travaux respectifs allaient croissants, nous avons finalement convenu qu'une collaboration entre nous pouvaient conduire à des résultats intéressants la communauté des généticiens. Nous avons développé une approche probabiliste pour calculer le temps de convergence de certains algorithmes évolutionnaires. Pour simplifier, les algorithmes évolutionnaires ont pour but de trouver les maxima locaux, et en particulier le maximum global, d'une fonction $f : E \to F$ dont on ne connaît pas les propriétés de régularité ou de convexité. On sait seulement calculer ou estimer la valeur de la fonction en tout point. La méthode qui consiste à calculer la valeur de la fonction en tous les points de l'espace $E$ marche à tout coup pour trouver le maximum, mais est en pratique beaucoup trop longue. Les algorithmes évolutionnaires se présentent comme une alternative à cette méthode exhaustive. Le mécanisme consiste à faire évoluer une "population" (ensemble de points $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ de $E$ appelés "individus") par transformations aléatoires de ces éléments (mutation et croisement) et sélection des individus selon leur performance $f(x_i)$. Le problème intéressant est de comparer les différents opérateurs de mutation, croisement et sélection pour déterminer lesquels sont les plus efficaces sur un type donné de problèmes. Pour les problèmes binaires $E = \{0,1\}^l$ que l'on a regardé, on modélise la population $(x_i)_{i=1,..,n}$ comme une chaîne de Markov sur l'espace d'états $E^n$, et on étudie l'asymptotique $l \gg 1$ dans le sens où on recherche un développement en $l$ de l'espérance, de la variance voire de la distribution complète du premier temps d'atteinte du maximum global.

## 4 Perspectives

Dans le domaine de l'interaction des phénomènes aléatoires et non-linéaires, il serait maintenant très intéressant de considérer d'autres systèmes complètement intégrables que l'équation de Schrödinger Non-Linéaire, pour lesquels il existe aussi une transformation d'inverse scattering associée, ce qui démontre en particulier l'existence de solitons. Parmi ces systèmes, citons l'équation de Korteweg-de Vries, qui possède une dispersion du troisième ordre [73], et le système de Manakov qui comprend deux équations de Schrödinger Non-Linéaires couplées [75]. D'autre part, l'interaction de solitons en milieu aléatoire est un sujet intéressant fortement les opticiens car ce problème se pose lors de la propagation de trains de solitons dans des fibres optiques et n'a pour l'instant été considérée qu'en milieu homogène [115]. Enfin, l'étude de systèmes discrétisés (c'est-à-dire où la variable transverse vit dans $\mathbb{Z}$ et le terme de dispersion est remplacé par exemple par un Laplacien discret $\Delta u_n = u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n$) est un sujet physiquement pertinent, car il décrit nombre de systèmes physiques (réseau de fibres optiques couplées [88], circuits électriques [58, 57], piégeage électronique dans certains cristaux [89], etc...) et mathématiquement intéressant. En effet certaines versions discrétisées de l'équation de Schrödinger Non-Linéaire sont complètement intégrables, et d'autres pas, ce qui laisse présager la possibilité d'étudier la propagation et la stabilité de solutions de type solitons dans de tels systèmes.

Dans le cadre de l'étude de la croissance d'instabilités modulationnelles dans des fibres optiques, on ne peut pas se contenter d'une équation scalaire pour modéliser la propagation du champ car on néglige alors tous les effets de polarisation. L'évolution des deux composantes d'un champ dans une fibre biréfringente est gouvernée par un système de deux équations de Schrödinger Non-Linéaires couplées. Par rapport au cas scalaire, deux nouvelles sources potentielles d'aléa apparaissent : la différence de vitesses de groupe entre les deux modes (polarisations) et le coefficient de couplage non-linéaire entre les modes. Les techniques utilisées sont essentiellement les mêmes que dans le cas scalaire, et on renvoie à [G13] et [G28] pour des premiers résultats. Il reste tout un travail d'optimisation à effectuer avec des expérimentateurs en vue de déterminer les configurations les moins sensibles aux perturbations.

La dérivation des équations de propagation non-linéaire dans les milieux anisotropes permet maintenant une étude précise de la conversion de fréquence de faisceaux à spectre large partiellement cohérents. Dans le même domaine, et toujours en collaboration avec des laseristes du CEA, j'étudie maintenant l'effet "cascade" en vue de générer des impulsions présentant des caractéristiques contrôlées de cohérences partielles dans les domaines temporel et spatial, avec le grand avantage de n'engendrer que des modulations de phase de l'impulsion, et pas de modulation d'amplitude qui sont critiques en termes de rendement d'amplification et de conversion de fréquence. Le principe est le suivant (proposé par L. Videau [111]). La technique repose sur le mélange d'une onde signal monochromatique de faible énergie avec une onde pompe incohérente de forte énergie dans un cristal non-linéaire. Dans cette configuration le cristal est placé loin des conditions d'accord de phase, de telle façon que le rendement de conversion de fréquence est très petit. Par contre, les modulations d'intensité de l'onde pompe peuvent être transférées sous la forme de modulations de phase sur l'onde signal. On peut tirer de cette technique le principe d'un générateur de phase tout optique massif à haute fréquence. Mais pour en appréhender le fonctionnement, il faut correctement prendre en compte les différences de vitesses de groupe et les dispersions de vitesses de groupe dans le domaine temporel, et la dispersion angulaire et la diffraction dans le domaine spatial.

# Liste des publications

Cette thèse résulte de la compilation d'articles publiés par l'auteur. Certains éléments ont été actualisés et compléés pour tenir compte de développements ultérieurs, dont certains font suite à des remarques et des questions posées lors de conférences et séminaires. Je remercie donc tous ceux qui ont pu porter à ma connaissance des problèmes stimulants et qui ont ainsi contribué à cette thèse. Ces articles sont accessibles en ligne sur la page `http://www.cmap.polytechnique.fr/~garnier`.

### Revues avec comités de lecture


[G1] J. Garnier, *Stochastic invariant imbedding. Application to stochastic differential equations with boundary conditions*, Prob. Th. Rel. Fields **103** (1995), pp. 249-271.

[G2] J. Garnier, *Homogenization in a periodic and time-dependent potential*, SIAM, J. Appl. Math. **57** (1997), pp. 95-111.

[G3] J. Garnier, *Multi-scaled diffusion-approximation. Applications to wave propagation in random media*, European Series in Applied and Industrial Mathematics, Probability & Statistics **1** (1997), pp. 183-206.

[G4] J. Garnier, L. Videau, C. Gouédard et A. Migus, *Statistical analysis of beam smoothing and some applications*, J. Opt. Soc. Am. A **14** (1997), pp. 1928-1937.

[G5] J. Garnier, J.-P. Fouque, L. Videau, C. Gouédard et A. Migus, *Amplification of broadband incoherent light in homogeneously broadened media in presence of Kerr nonlinearity*, J. Opt. Soc. Am. B **14** (1997), pp. 2563-2569.

[G6] J. Garnier, *Transmission of solitons through random media*, SIAM, J. Appl. Math. **58** (1998), pp. 1969-1995.

[G7] J. Garnier, L. Videau, C. Gouédard et A. Migus, *Propagation and amplification of incoherent pulses in dispersive and nonlinear media*, J. Opt. Soc. Am. B **15** (1998), pp. 2773-2781.

[G8] J. Garnier, *Asymptotic behavior of the quantum harmonic oscillator driven by a random time-dependent electric field*, J. Stat. Phys **93** (1998), pp. 211-241.

[G9] J. Garnier, L. Kallel et M. Schoenauer, *Rigorous hitting times for binary mutations*, Evolutionary Computation **7** (1999), pp. 173-203.

[G10] J. Garnier, *Statistics of the hot spots produced by Random Phase Plates revisited*, Phys. Plasmas **6** (1999), pp. 1601-1610.

[G11] J. Garnier, C. Gouédard et A. Migus, *Statistics of the hottest spot of speckle patterns generated by smoothing techniques*, Journal of Modern Optics **46** (1999), pp. 1213-1232.

[G12] L. Videau, C. Rouyer, J. Garnier et A. Migus, *Motion of hot spots in smoothed beams*, J. Opt. Soc. Am. A **16** (1999), pp. 1672-1681.

[G13] F. Kh. Abdullaev et J. Garnier, *Modulational instability in birefringent fibers with periodic and random dispersion*, Phys. Rev. E. **60** (1999), pp. 1042-1050.

[G14] J. Garnier et L. Kallel, *Statistical distribution of the convergence time of evolutionary algorithms for longpath problems*, à paraître dans IEEE Transactions on Evolutionay Computation.

[G15] J. Garnier, *Light propagation in square law media with random imperfections*, Wave Motion **31** (2000), pp. 1-19.

[G16] F. Kh. Abdullaev et J. Garnier, *Solitons in media with random dispersive perturbations*, Physica D **134** (1999), pp. 303-315.

[G17] J. Garnier, *Energy distribution of the quantum harmonic oscillator under random time-dependent perturbations*, Phys. Rev. E. **60** (1999), pp. 3676-3687.

**Actes de congrès avec comités de lecture**

[G18] J. Garnier et J.-P. Fouque, *Amplification of incoherent light with wide spectrum*, Proceedings de la Troisième Conférence Internationale sur les Aspects Mathématiques et Numériques des Phénomènes de Propagation d'Ondes, édités par G. Cohen, SIAM-INRIA, 1995, pp. 584-593.

[G19] J.-P. Fouque et J. Garnier, *On waves in random media in the diffusion-approximation regime* Proceedings de la conférence Waves in Random and other Complex Media, édités par R. Burridge, G. Papanicolaou et L. Pastur, IMA Vol. 96, Springer Verlag, New York, 1997, pp. 31-48.

[G20] J. Garnier, L. Videau, C. Gouédard et A. Migus, *Which optical smoothing for LMJ and NIF ?*, Proceedings de la conférence Solid state lasers for applications to ICF 1996, édités par M. André et H.T. Powell, SPIE, Vol. 3047, 1997, pp. 260-271.

[G21] L. Videau, A. Boscheron, J. Garnier, C. Gouédard, C. Feral, M. Laurent, J. Paye, C. Sauteret et A. Migus, *Recent results of optical smoothing on the Phebus Laser*, Proceedings de la conférence Solid state lasers for applications to ICF 1996, édités par M. André et H.T. Powell, SPIE, Vol. 3047, 1997, pp. 757-762.

[G22] L. Videau, J. Garnier, C. Feral, C. Gouédard, C. Sauteret et A. Migus, *Spectral broadening and nonlinear limitation of partially incoherent pulses in high power amplifiers*, Proceedings de la conférence CLEO'97, OSA Technical Digest Series, Vol. 11, 1997, pp. 353-354.

[G23] L. Videau, E. Bar, C. Rouyer, C. Gouédard, J. Garnier et A. Migus, *Control of the amplification of large band amplitude modulated pulses in Nd-glass amplifier chain*, Proceedings de la conférence Solid state lasers for applications to ICF 1998, édités par W. Howard Lowdermilk, SPIE, Vol. 3492, pp. 182-186.

[G24] L. Videau, J. Garnier, C. Rouyer et A. Migus, *Speckle movement description in case of 1D-SSD and longitudinal-SSD for a temporal sinusoidal phase modulation*, Proceedings de la conférence Solid state lasers for applications to ICF 1998, édités par W. Howard Lowdermilk, SPIE, Vol. 3492, pp. 277-284.

[G25] F. Kh. Abdullaev et J. Garnier, *Modulational instability of electromagnetic waves in randomly perturbed fibers*, à paraître dans les proceedings de conférence SCT'99 (Solitons, Collapses and Turbulence, Chernogolovka, Moscow region, Russia, 1999).

[G26] F. Kh. Abdullaev, J. Garnier, E. Seve et S. Wabnitz, *Modulational instability in optical fibers with polarization mode dispersion*, à paraître dans les proceedings de la conférence NLGW'99 (Nonlinear Guided Waves, Dijon, 1999), OSA Technical Digest Series.

**Preprints**

[G27] J. Garnier et L. Kallel, *Efficiency of local search with multiple local optima*, soumis à SIAM Journal on Discrete Mathematics.

[G28] F. Kh. Abdullaev, J. Garnier, E. Seve et S. Wabnitz, *Role of polarization mode dispersion on modulational instability in optical fibers*, soumis à Phys. Rev. E.

[G29] J. Garnier, *Instability induced by randomly varying spring coefficient in quantum oscillators*, soumis aux proceedings de la conférence Ascona'99.

[G30] L. Videau, C. Rouyer, J. Garnier et A. Migus, *Generation of a pure phase modulated pulse by cascading effect. A theoretical approach*, soumis à J. Opt. Soc. Am. A.

[G31] F. Kh. Abdullaev et J. Garnier, *Modulational instability induced by randomly varying coefficients for the nonlinear Schrödinger equation*, soumis à Physica D.

[G32] J. Garnier, *High-frequency asymptotics for Maxwell equations in anisotropic media. Part I: Linear geometric and diffractive optics*, soumis à J. Math. Phys.

[G33] J. Garnier, *High-frequency asymptotics for Maxwell equations in anisotropic media. Part II: Nonlinear propagation and frequency conversion*, soumis à J. Math. Phys.

[G34] J. Garnier, C. Gouédard et L. Videau, *Propagation of a partially coherent beam under the interaction of small and large scales*, à paraître dans Opt. Commun.

# Chapitre 1

# Propagation linéaire dans des fibres optiques multi-modes

## 1.1 Les guides d'ondes en optique

La conception de dispositifs capables de guider la lumière sur des grandes distances est un sujet qui intéresse de nombreux opticiens, surtout dans le domaine des télécommunications [63]. Or, à cause de la diffraction naturelle, un faisceau lumineux s'étale au cours de sa propagation en milieu homogène. Il est par conséquent nécessaire de compenser ce mécanisme. L'idée principale d'un guide d'onde est de conduire un faisceau lumineux en employant une variation de l'indice de réfraction dans la direction transverse à celle de la propagation, afin de forcer la lumière à voyager dans un canal bien défini. Le type de variation de l'indice de réfraction dans la direction transverse peut être continu ou discontinu. Nous considérons dans ce chapitre un cas particulier de la situation discontinue, puis un cas de la situation continue. L'élément essentiel est que l'indice de réfraction est maximal dans le canal dans lequel on veut conduire la lumière.

L'étude de guide d'ondes aléatoires a été rendu indispensable car ces problèmes arrivent naturellement dans de nombreuses configurations [81]. Les perturbations ont différentes causes physiques : écarts d'alignements, imperfections dans la géométrie, impuretés, etc. Dans la plupart des cas ces perturbations sont petites mais leur effet cumulatif devient d'ordre un après une distance de propagation suffisamment grande. De plus ces perturbations ne peuvent être décrites de manière exacte et donc l'approche statistique est la seule capable de modéliser leurs effets. On peut trouver dans la littérature beaucoup d'articles et de mémoires sur des problèmes de transmission dans des guides d'ondes aléatoires. L'objectif y est de calculer l'allure du champ en sortie de fibre. [81, 92, 94, 32]. Papanicolaou et McLaughlin ont considéré dans [95, 78] la propagation d'un faisceau gaussien dans un milieu fortement focalisant assujetti à des déformations aléatoires de l'axe ou du rayon du guide. Ils calculent l'espérance et la variance de l'intensité sur l'axe. D'autres approches telles que l'analyse par rayons [82], par intégration sur des chemins [26] ou par la théorie des matrices aléatoires [86] sont possibles pour traiter ce problème. De plus d'autres questions ont été soulevées : propriétés statistiques de la phase cumulée [18], influence de l'absorption [17], ou encore le degré de polarisation [79]. L'influence de la rétrodiffusion est examinée dans [71] dans un cas particulier (guide d'ondes rectangulaire à deux modes). Nous avons pour notre part cherché des expressions précises pour le profil de l'onde en sortie du guide. Nous avons voulu décrire non seulement les quantités moyennes, mais aussi la distribution statistique complète. En effet nous avons mis en évidence que le comportement moyen pouvait être très différent du comportement médian (ou typique) car les valeurs moyennes sont en fait imposées par des réalisations rares mais remarquables des processus modélisant la perturbation. L'analyse du problème met en évidence les échelles habituelles [72] : longueur d'onde, amplitude et rayon de corrélation des inhomogénéités, longueur et rayon du guide d'ondes. Nous étudions le comportement asymptotique de l'onde en sortie du guide dans l'asymptotique où l'amplitude des perturbations tend vers 0 et la longueur du guide tend vers l'infini. De façon remarquable, la qualité des fibres optiques produites de nos jours va en croissant, ce qui signifie que l'amplitude des perturbations tend effectivement vers 0. D'autre part, les opticiens tirent des fibres aussi longues qu'ils peuvent, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'ils observent des effets anormaux dus aux inhomogénéités. On est donc dans la pratique dans le cadre de l'asymptotique décrite ci-dessus.

Comme ce chapitre est entièrement consacré à des problèmes de propagation linéaire, on se limite à l'étude d'ondes monochromatiques. En effet, n'importe quel champ peut alors être décomposé en superposition d'ondes monochromatiques. Les problèmes temporels originaux se produisent en milieux non-linéaires, quand justement des modes normaux de propagation aux comportements très différents des ondes monochromatiques apparaissent.

## 1.2 Propagation dans les guides d'ondes plans métalliques

Nous avons étudié la propagation de modes optiques dans des films diélectriques. Nous avons considéré le problème standard de la propagation de modes TE (transverse electric) dans des guides d'ondes diélectriques à couches [24]. En effet les principaux phénomènes décrivant le comportement d'un guide d'ondes quelconque peuvent être extraits d'un tel modèle plan, dans lequel il n'y a pas de variation de l'indice dans une des directions de l'espace (disons $y$). Des guides d'ondes d'axe $z$, dans lesquels les dimensions du canal sont finies à la fois dans les directions $x$ et $y$, ont le même comportement qu'un guide d'onde plan si une dimension est nettement plus grande que l'autre [52]. Même quand ce n'est pas le cas, la plupart des phénomènes intéressants sont seulement modifiés d'une manière quantitative lorsqu'on passe d'un guide plan à un guide canalisé. Ce fait, combiné avec les importantes simplifications mathématiques apportées par la restriction au cas plan nous a conduit à regarder des guides d'ondes plans.

Nous avons considéré des films diélectriques dont l'épaisseur est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde. On suppose qu'une onde guidée monochromatique venant de la gauche se propage à travers un guide d'ondes homogène ($z < 0$). Cette onde pénètre dans une section de guide perturbé qui occupe la région $[0, L^\varepsilon]$. Le guide est à nouveau homogène pour $z > L^\varepsilon$ (voir figure 1.1). On considère que la longueur d'onde $\lambda$ de l'onde incidente et l'épaisseur $2a$ du guide sont d'ordre 1, et que le milieu qui occupe le coeur du guide est affecté par de petites inhomogénéités aléatoires pour $z \in [0, L^\varepsilon]$, si bien que l'indice de réfraction admet la représentation :

$$n^2(z) = n_0^2 \left(1 + \varepsilon m(z/\varepsilon^r)\right), \tag{1.1}$$

où $n_0$ est l'indice de réfraction homogène et $\varepsilon$ est un petit paramètre qui caractérise l'amplitude fluctuations aléatoires de l'indice. Enfin $r$ est un paramètre qui contrôle le rayon de corrélation des fluctuations. Le processus aléatoire $m$ qui décrit les inhomogénéités est supposé être un processus ergodique et centré. La propagation du champ est gouvernée par l'équation de Helmholtz.

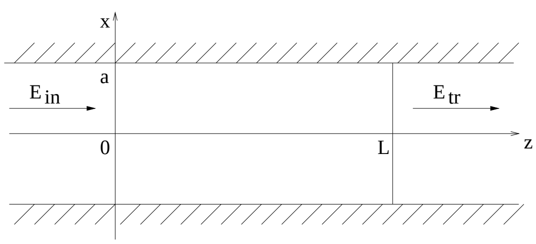


Figure 1.1: *Schéma d'un guide d'ondes plan métallique.*

Un tel guide possède $N = [4a/\lambda]$ modes propagatifs. Dans le cas d'une longue section perturbée $L^\varepsilon = L/\varepsilon^{2+r}$, on peut dégager différents régimes asymptotiques quand $\varepsilon \to 0$ selon la valeur de

$r$ [G3]. Si le rayon de corrélation des inhomogénéités est beaucoup plus grand que la longueur d'onde (i.e. dans le régime $-1 \leq r < 0$), les perturbations affectent seulement les phases des modes optiques en ajoutant une phase aléatoire sur chacun des modes. Si le rayon de corrélation des inhomogénéités est du même ordre ou bien plus petit que la longueur d'onde (i.e. dans le régime $r \geq 0$), on observe une localisation exponentielle des modes, dans le sens où l'intensité transmise pour chaque mode décroît exponentiellement avec la longueur de la section perturbée. Un point frappant est que chaque mode possède une longueur de localisation qui lui est propre. Qualitativement, plus le nombre d'onde effectif du mode est petit, moins le mode peut pénétrer dans le guide d'onde aléatoire.

## 1.3 Fibres à variation d'indice quadratique

### 1.3.1 Guide d'ondes quadratique idéal

Comme le nom l'indique, un guide d'ondes quadratique réalise l'effet de guidage par une variation continue de l'indice de réfraction qui est maximal au centre du guide et qui décroît de façon quadratique en fonction de la distance à l'axe central. Ces guides d'ondes décrivent avec une bonne précision les fibres optiques modernes à gradient d'indice [41]. Le guide quadratique parfait a été étudié en détail et est maintenant entièrement caractérisé [41, 81]. L'indice de réfraction varie comme :

$$n^2(x,y) = n_0^2 - n_0 n_1 (x^2 + y^2), \tag{1.2}$$

où $n_0 > 0$ est l'indice maximal au centre du guide d'ondes, et $n_1 > 0$ est le taux de décroissance quadratique de l'indice par unité de longueur. Pour une distance à l'axe du guide $x^2 + y^2$ suffisamment grande, le carré de l'indice $n^2$ devient négatif, ce qui n'a guère de sens sauf dans des milieux très spéciaux du type gaz ionisés. Bien que ce ne soit pas le cas pour des guides d'ondes, l'équation (1.2) est considéré comme une bonne première approximation des guides à gradient d'indices, du moins tant que le champ reste près de l'axe du guide [41]. De plus les milieux à variation quadratique satisfont la propriété physique que le barycentre de la distribution d'intensité de déplace selon les lois de l'optique géométrique [81, Section 3.6]. La propagation du champ dans le cadre de l'approximation paraxiale est gouvernée par l'équation de Schrödinger suivante, encore appelée équation de Fock [81] :

$$-2ikn_0 \frac{\partial E}{\partial z} - k^2 n_0 n_1 (x^2 + y^2) E + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0. \tag{1.3}$$

où $k$ est le nombre d'onde principal dans le vide. On transforme cette équation en une forme adimensionnée en multipliant les coordonnées spatiales $x$ et $y$ par $k^{1/2}(n_0 n_1)^{1/4}$ et $z$ par $n_0^{1/2} n_1^{-1/2}$, si bien que (1.3) s'écrit maintenant :

$$-2i \frac{\partial E}{\partial z} - (x^2 + y^2) E + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0. \tag{1.4}$$

L'équation (1.4) est bien connue en mécanique quantique où elle modélise un oscillateur harmonique quantique à deux dimensions, à ceci près que la coordonnée spatiale $z$ est remplacée par le temps. Cette équation admet une famille complète de modes normaux de propagation qu'on peut indexer par deux paramètres entiers $p$ et $q$ [81, Section 3.6] :

$$f_{p,q}(x,y) = f_p(x) f_q(y), \tag{1.5}$$

où les $f_p$ sont les les fonctions de Gauss-Hermite :

$$f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2^p\sqrt{\pi}p!}} H_p(x)\, e^{-x^2/2}, \qquad H_p(x) = (-1)^p e^{x^2} \frac{d^p}{dx^p} e^{-x^2}. \tag{1.6}$$

La famille $(f_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ est complète dans le sens où d'une part les fonctions de Gauss-Hermite $(f_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ forment une base orthonormale de l'espace $L^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$. et d'autre part $(x,y,z) \mapsto e^{i(p+q+1)z} f_{p,q}(x,y)$ est solution de (1.4).

### 1.3.2 Guide d'ondes quadratique avec axe perturbé

On considère ici l'évolution du champ électrique $E$ dans un guide d'ondes dont l'indice de réfraction est sujet à des petites perturbations. Plus exactement, nous supposons que l'axe du guide n'est pas parfaitement droit mais qu'il oscille autour de l'axe optique $z$ selon le processus $\varepsilon\mathbf{m}(z)$, où $\varepsilon$ est un petit paramètre qui caractérise l'amplitude des oscillations et $\mathbf{m} = (m_x, m_y)$ est un processus aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (voir figure 1.2). L'équation qui gouverne l'évolution du champ est alors :

$$-2i\frac{\partial E}{\partial z} - (x - \varepsilon m_x(z))^2 E - (y - \varepsilon m_y(z))^2 E + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0. \tag{1.7}$$

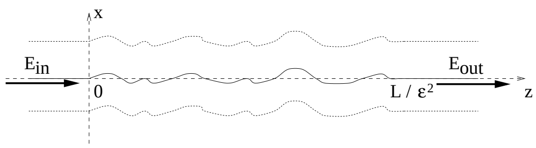


Figure 1.2: *Perturbation de l'axe du guide d'ondes.*

On suppose que l'amplitude des fluctuations est d'ordre $\varepsilon \ll 1$ et que la longueur du guide est d'ordre $\varepsilon^{-2}$. La fonction $\mathbf{m} = (m_x, m_y)$ est supposée être bornée presque sûrement, centrée, stationnaire et ergodique, satisfaisant la condition de mélange : $\mathbf{m}$ est $\phi$-mélangeante avec $\phi \in L^{1/2}(\mathbb{R}^+)$. Pour simplifier la présentation des résultats on supposera d'une part que les processus $m_x$ et $m_y$ sont indépendants, et d'autre part que le champ initial $E_0$ est mono-mode $E_0 = f_{p,q}$. Les résultats que nous allons énoncer sont formulés et démontrés dans un cadre plus vaste dans [G15]. Soit $\delta \in [0, 2\pi]$. Notons $\mathcal{P}_{\delta,k}$, $k \in \mathbb{N}$, la suite de plans régulièrement espacés $\mathcal{P}_{\delta,k} = \left\{(x, y, \delta + 2\pi k), (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et $\tilde{E}^\varepsilon_\delta(.,.,z)$ les champs correspondant à ces plans :

$$\tilde{E}^\varepsilon_\delta(x,y,z) = E\left(x, y, \delta + 2\pi\left[\frac{z}{2\pi\varepsilon^2}\right]\right). \tag{1.8}$$

Le processus $\left((\tilde{E}^\varepsilon_\delta(.,.,z))_{z\in[0,\infty[}\right)_{\delta\in[0,2\pi]}$ converge en loi dans l'espace $\mathbf{C}([0,2\pi], \mathbf{D}([0,\infty[, L^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})))$ (où $\mathbf{D}$ est l'espace des fonctions càd-làg muni de la topologie de Skorohod) vers le processus $\tilde{E}_\delta(.,.,z)$ donné par :

$$\tilde{E}_\delta(x,y,z) = E_0\left(x - x_\delta(z), y - y_\delta(z)\right) \exp\left(i\phi_\delta(x,y,z) + i(p+q+1)\delta\right), \tag{1.9}$$

où

$$\begin{aligned} x_\delta(z) &= \cos(\delta)\sqrt{2\gamma_{1,x}} W_z^1 - \sin(\delta)\sqrt{2\gamma_{1,x}} W_z^2, \\ y_\delta(z) &= \cos(\delta)\sqrt{2\gamma_{1,y}} W_z^3 - \sin(\delta)\sqrt{2\gamma_{1,y}} W_z^4. \end{aligned}$$

$W^j$, $j = 1, ..., 4$ sont quatre mouvements Browniens standards indépendants, $\phi_\delta$ est un terme de phase qui s'exprime uniquement en fonction des mouvements Browniens $W^j$, et $\gamma_{j,\zeta}$ est proportionnel à la densité de puissance spectrale du processus $m_\zeta$ à la fréquence $j$ :

$$\gamma_{j,\zeta} = \int_0^\infty \mathbb{E}[m_\zeta(0)m_\zeta(z)]\cos(jz)dz.$$

L'équation (1.9) fournit une description complète du champ dans l'asymptotique $\varepsilon \to 0$. La coordonnée longitudinale peut être divisée en deux parties : l'échelle macroscopique $z$ et l'échelle microscopique $\delta$. Pour tout $\delta$, le processus $(x_\delta(z), y_\delta(z))$ qui représente la position du centre de la distribution spatiale d'intensité suit la loi d'un mouvement Brownien bi-dimensionnel de variance $(2\gamma_{1,x}, 2\gamma_{1,y})$.

En conclusion nous avons prouvé que l'onde en sortie de fibre pouvait être décrite par un nombre fini de coefficients. Nous sommes capables de décrire la distribution spatiale et statistique de l'onde en sortie. Ainsi nous avons montré que l'effet principal des fluctuations de l'axe du guide était de provoquer une translation aléatoire du profil d'intensité initial, mais que sa forme était conservée. Cette translation suit à l'échelle macroscopique la loi d'un mouvement Brownien dans lequel n'intervient que la densité de puissance spectrale des processus modélisant les fluctuations. Ce résultat peut être utile pour des applications en télécommunication. Par exemple les formules que nous avons démontrées permettent de prédire la distance au bout de laquelle l'onde localisée transversalement va entrer en collision avec la gaine de la fibre.

### 1.3.3 Guide d'ondes quadratique avec rayon perturbé

On suppose ici que l'axe du guide d'ondes est parfaitement droit et coïncide avec l'axe optique $z$, mais le rayon du guide oscille autour de sa valeur moyenne selon le processus $\varepsilon\mathbf{m}(z)$ (voir figure 1.3). Le processus $\mathbf{m}$ satisfait toujours les mêmes hypothèses de centrage et d'ergodicité. L'équation qui gouverne l'évolution du champ est alors :

$$-2i\frac{\partial E}{\partial z} - x^2(1+\varepsilon m_x(z))E - y^2(1+\varepsilon m_y(z))E + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0. \tag{1.10}$$

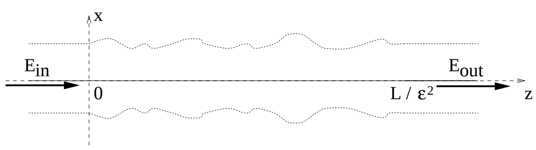


Figure 1.3: *Perturbation du rayon du guide d'ondes.*

L'approche est la même que dans la situation de l'axe perturbé, et les démonstrations sont assez similaires. Pour simplifier la discussion, supposons encore que le champ initial $E_0$ est mono-mode $E_0 = f_{p,q}$. En notant $\tilde{E}_\delta^\varepsilon$ les champs dans les plans $\mathcal{P}_{\delta,k}$, les processus $\tilde{E}_\delta^\varepsilon$ converge en loi vers $\tilde{E}_\delta$, dont le profil d'intensité à la distance macroscopique $z$ est :

$$|\tilde{E}_\delta(z,x,y)|^2 = a_x(\delta,z)a_y(\delta,z)|E_0(a_x(\delta,z)x, a_y(\delta,z)y)|^2, \tag{1.11}$$

qui est simplement le profil initial au facteur d'échelle bi-dimensionnel $(a_x(\delta,z), a_y(\delta,z))$ près. Pour tous $z$, $\delta$, le couple de variables aléatoires $(a_x(\delta,z), a_y(\delta,z))$ suit la même loi que $(a_x(z), a_y(z))$ ;

$$a_x^2(z) = \exp\left(\sqrt{2\gamma_{2,x}}W_z^{1,x} - \gamma_{2,x}z\right), \qquad a_y^2(z) = \exp\left(\sqrt{2\gamma_{2,y}}W_z^{1,y} - \gamma_{2,y}z\right), \tag{1.12}$$

où $W^{1,x}$ et $W^{1,y}$ sont des mouvements Browniens standards indépendants. Remarquez que la tendance typique de $a_x$ et $a_y$, obtenue en négligeant les contributions des mouvements Browniens dans l'exponentielle, est de décroître au taux $\exp(-\gamma_{2,\zeta} z)$. Ceci montre que la faisceau a tendance à s'étaler en gardant toutefois sa forme originale. Par contre les espérances de $a_x^2$ et $a_y^2$ sont constantes et égales à 1, et les moyennes d'ordres supérieurs explosent exponentiellement avec $z$. Ceci prouve qu'il peut arriver que le profil d'intensité devienne après une certaine distance de propagation très étroit et très intense. Cette focalisation anormale est un peu surprenante. Dans la configuration considérée ici la propagation est linéaire et les oscillations du rayon du guide sont uniformément bornées par une quantité très petite, donc on pourrait s'attendre à ce qu'un tel comportement pathologique n'arrive pas. En fait c'est un phénomène purement aléatoire correspondant à des grandes déviations des mouvements Browniens sous-jacents.

En conclusion, nous avons montré que l'effet principal des fluctuations du rayon du coeur du guide était de provoquer un étalement, ou au contraire une focalisation, du profil d'intensité initial. L'inverse du rayon carré du profil d'intensité se conduit comme une martingale exponentielle, dans le sens où il tend vers 0 presque sûrement, mais sa valeur moyenne est constante. Ces résultats quantitatifs permettent de prédire l'étalement des impulsions dans les fibres à gradient d'indice.

## 1.4 Théorèmes d'approximation-diffusion à plusieurs échelles

La démonstration des résultats présentés ci-dessus est basée sur des théorèmes d'approximation-diffusion à plusieurs échelles [G3]. Ces théorèmes donnent la convergence en loi de processus $X^\varepsilon$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ solutions de systèmes de la forme :

$$\frac{dX^\varepsilon}{dt}(t) = \frac{1}{\varepsilon} F\left(X^\varepsilon(t), q(\frac{t}{\varepsilon^2}), \phi^\varepsilon(t)\right), \quad X^\varepsilon(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d, \tag{1.13}$$

où $\phi^\varepsilon$ est un terme de phase en compétition avec un processus ergodique $q$. Par exemple, supposons que $\phi^\varepsilon(t) = t/\varepsilon^{2+c}$ et $F$ est une fonction régulière à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ qui est périodique par rapport à sa troisième variable et qui satisfait la condition de centrage :

$$\begin{array}{ll} \forall x, \phi, \quad \mathbb{E}[F(x, q(0), \phi)] = 0 & \text{si } -2 < c < 0, \\ \forall x, \quad \langle \mathbb{E}[F(x, q(0), .)] \rangle_\phi = 0 & \text{si } c \geq 0, \end{array}$$

où $\langle . \rangle_\phi$ représente une moyenne sur une période en la variable $\phi$. Alors le processus $(X^\varepsilon(t))_{t\geq 0}$ donné par (1.13) converge en loi vers le processus de diffusion $X$ dont le générateur infinitésimal est $\mathcal{L}_{c<0}$ (resp. $\mathcal{L}_{c=0}$, $\mathcal{L}_{c>0}$) si $-2 < c < 0$ (resp. $c = 0$, $c > 0$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{c<0} f(x) &= \int_0^\infty du \, \langle \mathbb{E}[F(x, q(0), .).\nabla \left(F(x, q(u), .).\nabla f(x)\right)] \rangle_\phi , \\ \mathcal{L}_{c=0} f(x) &= \int_0^\infty du \mathbb{E}\left[ \langle F(x, q(0), .) \rangle_\phi .\nabla \left( \langle F(x, q(u), . + u) \rangle_\phi .\nabla f(x) \right) \right], \\ \mathcal{L}_{c>0} f(x) &= \int_0^\infty du \mathbb{E}\left[ \langle F(x, q(0), .) \rangle_\phi .\nabla \left( \langle F(x, q(u), .) \rangle_\phi .\nabla f(x) \right) \right]. \end{aligned}$$

La preuve repose sur des techniques de convergence de problèmes de martingales qui se déduisent eux-mêmes de l'application la méthode de la fonction perturbée [74].

# Chapitre 2

# Etude de l'oscillateur harmonique quantique soumis à des forces aléatoires

## 2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on a remarqué que le problème de la propagation d'une onde dans un guide à variation d'indice quadratique se formulait de manière similaire au problème de l'oscillateur harmonique quantique. On a alors voulu appliquer notre technique utilisant des théorèmes limites de probabilités pour exhiber des régimes asymptotiques remarquables dans le cadre de l'étude de l'influence de perturbations sur des systèmes quantiques connus. On peut trouver dans la littérature un nombre considérable de travaux traitant de ce sujet pour certains types de perturbations : instantanées, adiabatiques, périodiques, ... [103]. Les phénomènes considérés sont décrits par un Hamiltonien de la forme :

$$H(t) = H^0 + H^1(t), \tag{2.1}$$

où $H^0$ est la partie indépendante du temps correspondant au problème non-perturbé, et dont les valeurs et vecteurs propres sont supposées connus, et $H^1$ est la partie perturbatrice qui dépend du temps. La question posée dans ce genre de problème est assez différente de celles qui se posent dans le cadre de la propagation d'ondes en milieu quadratique, car en mécanique quantique une observation perturbe le système et on ne peut observer que des états propres. La question de base peut se formuler de la manière suivante. Si à $t = 0$ le système est dans l'état propre $\psi^0$ de $H^0$, quelle est la probabilité de l'observer dans un certain état propre à l'instant $t$ ? La plupart des résultats obtenus jusqu'à maintenant suivent un schéma dans lequel la réponse est donnée sous la forme d'un développement en puissances de $H^1$ [103, 83]. Nous proposons une nouvelle méthode pour obtenir la réponse à la question ci-dessus, qui est basée d'une part sur une théorie asymptotique rigoureuse déjà développée dans le cadre de la propagation d'ondes en milieu quadratique et d'autre part sur une représentation originale de la dynamique asymptotique des probabilités de transition en termes d'un processus de sauts. Nous nous limitons ici à présenter le cas où $H^0$ correspond à un oscillateur harmonique quantique, mais nos résultats se généralisent à de nombreux autres systèmes.

L'oscillateur harmonique quantique a été étudié de manière très poussée et complète, non seulement parce que c'est un système qui peut être résolu explicitement et un cas d'école développé dans tous les ouvrages d'introduction à la mécanique quantique, mais aussi parce que c'est un système d'un intérêt physique certain [83]. En effet de nombreux systèmes proches d'un équilibre stable peuvent être décrits par un oscillateur harmonique ou par un ensemble d'oscillateurs harmoniques découplés. De plus de plusieurs versions modifiées de ce problème "parfait" ont été regardées, dans lesquelles les nouveaux termes, dépendant du temps ou non, ont été pris en compte par la méthode des perturbations. En effet, même pour ce modèle très simple qu'est l'oscillateur harmonique, il est exceptionnel de trouver des expressions fermées décrivant une version légèrement perturbée, sauf pour certains types bien précis de perturbations [56]. Néanmoins des résultats rigoureux ont été obtenus pour des perturbations de l'oscillateur harmonique dépendant du temps. La plupart d'entre eux concernent le cas de forces périodiques [25, 34, 53]. De plus, bien que le problème soit beaucoup moins bien compris dans le cas de perturbations aléatoires, on peut trouver dans la littérature quelques travaux traitant des forces extérieures variant de manière aléatoire avec le temps. Une certaine classe de systèmes quantiques dans des potentiels markoviens a été traité en détail dans [96, 97]. Sous des conditions convenables sur la dynamique du potentiel aléatoire, il est montré dans [90] que le spectre de quasi-énergie de l'opérateur est continu. Dans Ref. [20] les auteurs étudient la stabilité en temps long d'un oscillateur plongé dans un champ de forces dépendant du temps et dérivant lui-même de systèmes dynamiques aléatoires; les auteurs se concentrent sur la croissance asymptotique de l'énergie.

Nous avons considéré le problème d'une particule dans un oscillateur harmonique plongée dans un champ de forces extérieures dérivant d'un potentiel aléatoire dépendant du temps. Notre but est d'étudier ce problème par une méthode rigoureuse et non-perturbatrice. Notre approche s'inspire de nos travaux sur les ondes en milieux aléatoires. La première étape consiste à déterminer les échelles présentes dans le problème : fréquence propre d'oscillation de l'oscillateur harmonique, amplitude, temps de cohérence et durée de la perturbation aléatoire. On étudie alors l'évolution asymptotique de la particule dans le cadre qui découle de la séparation de ces échelles. Plus exactement on dérive le régime asymptotique correspond au cas où l'amplitude des perturbations tend vers 0 et la durée de la perturbation tend vers l'infini. On peut alors décrire l'évolution de la distribution d'énergie sous la forme d'équations effectives qui peuvent s'interpréter (et se calculer) en termes d'un processus markovien de sauts.

## 2.2 L'oscillateur harmonique

Nous considérons un oscillateur harmonique quantique, c'est-à-dire une particule de masse $M$ dont le vecteur d'état (dans la base coordonnées) vérifie l'équation de Schrödinger [83] :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}M\omega^2 x^2\psi, \tag{2.2}$$

où $\omega$ est la fréquence d'oscillation. On transforme cette équation sous une forme adimensionnée en multipliant la coordonnée spatiale $x$ par $r_0^{-1} := (M\omega/\hbar)^{1/2}$ et le temps $t$ par $t_0^{-1} := \omega$, si bien que (2.2) s'écrit maintenant :

$$2i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + x^2\psi. \tag{2.3}$$

Le spectre de l'oscillateur harmonique est purement ponctuel, avec des valeurs propres (énergies propres) $(2p+1)/2$, et les vecteurs propres correspondant sont les fonctions d'Hermite-Gauss déjà définies dans le chapitre 1 (voir Eq. (1.6)). La famille $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est complète dans le sens [42, Prop. 1.5.7] où les $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ forment une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $(t,x) \mapsto e^{-i\frac{2p+1}{2}t}f_p(x)$ est une solution de (2.3) pour tout $p\in\mathbb{N}$. On définit le décomposition modale comme l'application $\Theta : \psi \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mapsto (c_p)_{p\in\mathbb{N}}$, où les $c_p$ sont les coefficients du développement de $\psi$ sur la base $(f_p)$ :

$$\Theta(\psi)_p := c_p = \int_{\mathbb{R}} f_p(x)\psi(x)dx. \tag{2.4}$$

$\Theta$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ sur $l^2$, l'espace des suites $(c_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont de carré intégrable. D'après les postulats de la mécanique quantique, si $\psi$ est la fonction d'état de la particule, alors une mesure de l'énergie donne pour résultat la valeur propre $(2p+1)/2$ avec probabilité $|\Theta(\psi)_p|^2$.

## 2.3 Evolution dans un champ de forces aléatoires

Supposons que la particule est plongée dans un champ de forces extérieures dérivant d'un potentiel dépendant du temps $\varepsilon V(t,x)$. L'équation qui gouverne l'évolution de la fonction d'état est alors :

$$2i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + x^2\psi + \varepsilon V(t,x)\psi. \tag{2.5}$$

On suppose que l'amplitude des fluctuations est d'ordre $\varepsilon \ll 1$. La fonction $V$ (à valeurs réelles) est supposée de moyenne nulle, stationnaire et ergodique en temps. Le problème est dans ces grandes lignes analogues à celui considéré dans le chapitre 1 au sujet des guides d'ondes quadratiques. Cependant, les quantités physiquement intéressantes sont différentes. On s'intéressait dans le chapitre 1 essentiellement à la distribution d'intensité $|\psi|^2$, alors qu'ici on recherche la distribution de l'énergie. La décomposition modale dans l'échelle de temps $t/\varepsilon^2$ est $c^\varepsilon$ :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad c_p^\varepsilon(t) = \Theta(\psi(\frac{t}{\varepsilon^2},.))_p \exp i\frac{2p+1}{2}\frac{t}{\varepsilon^2}, \tag{2.6}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(\frac{t}{\varepsilon^2},x) = \sum_{p'=0}^{\infty} f_{p'}(x)c_{p'}^\varepsilon(t)\exp -i\frac{2p'+1}{2}\frac{t}{\varepsilon^2}. \tag{2.7}$$

Pour simplifier la présentation, on supposera d'une part que l'état initial en $t=0$ est un mode propre $\psi_0 = f_{p_0}$, ce qui correspond à la décomposition $c_p(t=0) = \delta_{p,p_0}$, et d'autre part que la perturbation peut s'écrire sous la forme séparable $V(t,x) = m(t)V(x)$ où $m$ est un processus aléatoire centré et ergodique et $V$ une fonction déterministe. Les résultats que nous allons énoncer sont formulés et démontrés dans un cadre plus général dans [G8] et [G17]. En substituant (2.7) dans (2.5) et en intégrant par rapport à $f_p(x)dx$ on obtient le système d'équations :

$$\frac{dc_p^\varepsilon}{dt} = -\frac{i}{2\varepsilon}m(\frac{t}{\varepsilon^2})\sum_{p'=-\infty}^{\infty}\gamma_{p,p+p'}c_{p+p'}^\varepsilon \exp -ip'\frac{t}{\varepsilon^2} \tag{2.8}$$

où les coefficients de couplage sont :

$$\gamma_{p,p+p'} := \int_{\mathbb{R}} f_p(x)V(x)f_{p+p'}(x)dx. \tag{2.9}$$

On adopte la convention $\gamma_{p,p+p'} \equiv 0$ si $p+p' < 0$. La dérivation du régime asymptotique repose sur l'application dans un cadre infini-dimensionnel de théorèmes d'approximation-diffusion standards en dimension finie. Le principal résultat de convergence est le suivant.

**Proposition 2.1**
*Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une constante $K_n$ telle que les coefficients $\gamma_{p,p+p'}$ satisfont :*

$$\sum_{p'=-\infty}^{\infty} p'^n\gamma_{p,p+p'}^2 \le K_n(1+p)^n, \tag{2.10}$$

*et que $m$ est borné presque sûrement et $\phi$-mélangeante avec $\phi \in L^{1/2}(\mathbb{R}^+)$.*
*1. Il existe une unique solution $c$ du système infini-dimensionnel :*

$$\begin{aligned} dc_p = \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha_0}\gamma_{p,p}c_p \circ dW_{0t} \quad &+ \quad \frac{i}{2}\sum_{p'=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_{p'}}\left(\gamma_{p,p+p'}c_{p+p'} + \gamma_{p,p-p'}c_{p-p'}\right)\circ dW_{p',1_t} \\ &+ \quad \frac{1}{2}\sum_{p'=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_{p'}}\left(\gamma_{p,p+p'}c_{p+p'} - \gamma_{p,p-p'}c_{p-p'}\right)\circ dW_{p',2_t}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

*où $W_0$, $W_{p',j}$, $p' = 1, ..., \infty$, $j = 1, 2$, sont des mouvements Browniens standards indépendants, $\circ$ désigne l'intégrale de Stratonovich et :*

$$\alpha_{p'} = \int_0^\infty \mathbb{E}[m(0)m(t)] \cos(p't) dt. \tag{2.12}$$

*2. Les processus $c^\varepsilon$ convergent en loi dans $\mathbf{C}([0,\infty[, l^2)$ vers le processus de Markov c solution de (2.11) quand $\varepsilon \to 0$.*

Les coefficients $\alpha_{p'}$ sont positifs car proportionnels à la densité de puissance spectrale du processus stationnaire $m$ (théorème de Wiener-Khintchine [84]). La condition "$m$ est $\phi$-mélangeante avec $\phi \in L^{1/2}(\mathbb{R}^+)$" est assez optimale dans le sens où on peut construire un exemple (avec $V(t,x) = xm(t)$) pour lequel $\phi \sim t^{-2}$ et pour lequel les résultats dérivés ci-dessous ne sont plus corrects. Les coefficients $\mathbb{E}[|c_p|^2(t)]$ représentent les probabilités d'observer la particule plongée dans le potentiel $\varepsilon V$ dans l'état $f_p$ à l'instant $t/\varepsilon^2$ dans l'asymptotique $\varepsilon \to 0$. De manière équivalente, on peut dire que la mesure de l'énergie à l'instant $t/\varepsilon^2$ donne le résultat $p + 1/2$ avec probabilité :

$$C_{p_0,p}(t) = \mathbb{E}[|c_p|^2(t)].$$

En appliquant la formule d'Itô on établit alors facilement la corollaire suivant :

**Corollaire 2.2**
*La famille $(C_{p_0,p}(t))_{p\in\mathbb{N}}$ satisfait un système fermé d'équations différentielles ordinaires :*

$$\frac{dC_{p_0,p}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{p'=-\infty}^{\infty} \Gamma_{p,p+p'}(C_{p_0,p+p'} - C_{p_0,p}) \tag{2.13}$$

*partant de $C_{p_0,p}(0) = \delta_{p,p_0}$, où $\Gamma_{p,p+p'} = \gamma^2_{p,p+p'}\alpha_{p'}$.*

Le système (2.13) est le résultat de base de tout le chapitre. Il montre que les probabilités $C_{p,p_0}$ ne dépendent que des coefficients de couplage $\Gamma_{p,p+p'}$, et que leurs évolutions sont fermées dans le sens où aucune autre quantité n'intervient dans le système (2.13). En particulier les phases relatives des coefficients $(c_p)$ n'ont pas d'influence sur l'évolution asymptotique des $(C_{p_0,p})$. Cette propriété n'est absolument pas triviale, car elle n'est pas vérifiée pour les équations originelles (2.5) et (2.8).

## 2.4 Interprétation du système limite en termes d'un processus markovien de sauts

Nous allons montrer que les probabilités de transition $C_{p,p_0}(t)$ peuvent être interprétées en termes d'un processus de sauts. Soit $N_t$ le processus de Markov avec espace d'états $\mathbb{N}$ et générateur infinitésimal :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \sum_{p'} \Gamma_{N,N+p'} \nabla_{p'}, \tag{2.14}$$

où $\nabla_{p'} g(N) = g(N + p') - g(N)$. $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de sauts homogène et réversible défini sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. La construction complète du processus $N_t$ est standard [38, Section 7, Théorème 33]. Il existe une suite de variables aléatoires $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ à valeurs entières et une suite de variables $(\tau_j)_{j\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$N_t = \xi_n \text{ si } \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j \leq t < \sum_{j=0}^{n} \tau_j.$$

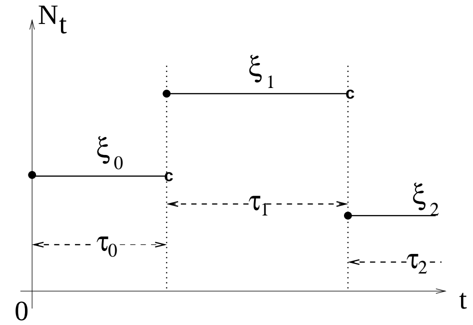


Figure 2.1: *Processus de sauts $N_t$.*

La suite $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de noyau de transition stationnaire $Q$ :

$$\mathbf{P}\left(\xi_{n+1} = p + p'/\xi_n = p\right) = Q_{p,p+p'},$$

$$Q_{p,p+p'} := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\Gamma_{p,p+p'}}{q(p)} & \text{if } p' \neq 0, \\ 0 & \text{if } p' = 0, \end{cases} \qquad q(p) := \frac{1}{2}\sum_{p''\neq 0} \Gamma_{p,p+p''}.$$

Etant donnés $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, les variables aléatoires $(\tau_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes entre elles et suivant des lois exponentielles de paramètres $(q(\xi_j))_{j\in\mathbb{N}}$. On note $\mathbf{P}_{t_0,p_0}$ la distribution sur l'espace des chemins (espace càd-làg) du processus $(N_t)_{t\geq t_0}$ commençant à $t_0$ avec la condition initiale $N_{t_0} = p_0$. $P_t(p_0,p) = \mathbf{P}_{t',p_0}(N_{t'+t} = p)$ est indépendant de $t'$ et est l'unique solution probabiliste (i.e. $\sum_{p'} P_t(p,p+p') = 1$) de l'équation de Kolmogorov progressive [37, Section X-3] :

$$\frac{\partial P_t}{\partial t}(p_0,p_1) = -q(p_1)P_t(p_0,p_1) + \sum_p q(p)Q_{p,p_1}P_t(p_0,p). \tag{2.15}$$

Comme $q(p)Q_{p,p_1} = \frac{1}{2}\Gamma_{p,p_1} = \frac{1}{2}\Gamma_{p_1,p}$ on obtient que Eq. (2.15) est équivalente à (2.13), ce qui entraîne la relation $C_{p_0,p}(t) = \mathbf{P}_{0,p_0}(N_t = p)$. Cette interprétation des probabilités de transition est très intéressante car elle permet d'appliquer des résultats traitant des processus markoviens de sauts qu'on trouve abondamment dans la littérature à notre problème. On peut donc étudier le système (2.13) dans cette optique. Remarquez que nous avons seulement montré que $(N_t)$ donne la bonne distribution d'une mesure de l'énergie de la particule à un instant donné. En termes de théorie des probabilités nous avons prouvé que les marginales uni-dimensionnelles de $(N_t)$ et d'une mesure de l'énergie coïncident. Nous pouvons montrer qu'en fait $(N_t)$ donne la distribution de n'importe quelle suite de mesures. Pour cela il faut faire appel à un postulat de mécanique quantique que nous n'avons pas utilisé jusqu'alors. Passons en revue les postulats de la mécanique quantique et interprétons-les en termes du processus de sauts $N_t$.

*Postulat 1.* "La fonction d'état $\psi$ obéit à l'équation de Schrödinger (2.5)." L'évolution du processus $N_t$ est gouvernée par la dynamique markovienne imposée par le générateur infinitésimal (2.14).

*Postulat 2.* "Une mesure de l'énergie au temps (normalisé) $t$ donne comme résultat la valeur propre $(2p+1)/2$ avec probabilité $C_{p_0,p}(t)$." Le processus de sauts $1/2+N_t$ prend ses valeurs dans l'espace d'états $1/2+\mathbb{N}$. Au temps $t$ le processus vaut $1/2+p$ avec probabilité $\mathbf{P}_{0,p_0}(N_t = p)$ qui est égal à $C_{p_0,p}(t)$.

*Postulat 3.* "Si la mesure au temps $t$ donne le résultat $1/2+p$, alors l'état de la particule passe de $\psi(t)$ à $f_p$ comme conséquence de la mesure." Supposons que la particule soit dans l'état $f_{p_0}$ à l'instant 0. Si on observe l'énergie de la particule aux instants $t_1$ et $t_2$, alors la probabilité de trouver d'abord l'énergie $1/2+p_1$ puis l'énergie $1/2+p_2$ est égale à la probabilité d'observer $1/2+p_1$ à l'instant

$t_1$ partant de $f_{p_0}$ multiplié par la probabilité d'observer $1/2 + p_2$ à l'instant $t_2$ en commençant de $f_{p_1}$ à $t_1$, car la particule est dans l'état $f_{p_1}$ juste après la mesure à $t_1$. Ce produit de probabilités s'écrit $\mathbf{P}_{0,p_0}(N_{t_1} = p_1) \times \mathbf{P}_{t_1,p_1}(N_{t_2} = p_2)$. Or le processus $N_t$ est markovien, donc ce produit est exactement égal à $\mathbf{P}_{0,p_0}(N_{t_1} = p_1, N_{t_2} = p_2)$. Bien sûr ce raisonnement peut être généralisé à n'importe quelle suite de mesures si bien qu'on peut affirmer que, si on observe la particule aux instants $t_1$,..., et $t_n$, alors la probabilité de trouver la suite d'énergies : $1/2 + p_1$,...,$1/2 + p_n$ est exactement $\mathbf{P}_{0,p_0}(N_{t_1} = p_1, ..., N_{t_n} = p_n)$. Cela signifie que la dynamique des observations est markovienne et exactement décrite par le processus de sauts $N_t$. En conclusion, le Postulat 3 est précisément la bonne condition qui permet d'étendre l'assertion "$(N_t)$ décrit la distribution de la mesure de l'énergie à un instant donné" à l'assertion globale "$(N_t)$ décrit la distribution de toute suite de mesures de l'énergie".

## 2.5 Quelques applications

### 2.5.1 Une perturbation linéaire

Cette perturbation correspond à l'évolution d'une particule chargée plongée dans un champ électrique fluctuant temporellement. Plus exactement, considérons que la particule possède une charge $q$. Supposons qu'on applique un champ électrique extérieur, homogène et dépendant du temps $\mathcal{E}_0 m(t)$. La fonction adimensionnée $m$ décrit les fluctuations temporelles du champ électrique. Ce dernier dérive d'un potentiel $\mathcal{E}_0 x m(t)$. Le paramètre sans dimension $\varepsilon$ qui contrôle l'amplitude des fluctuations est alors donné par :

$$\varepsilon := \frac{q\mathcal{E}_0}{\hbar^{1/2} M^{1/2} \omega^{3/2}}.$$

Cette situation est un cas particulier du contexte général que l'on a discuté ci-dessus avec $V(t, x) = 2xm(t)$. Dans de telles conditions, les seuls coefficients de couplage non-nuls sont $\gamma_{p,p+1} = 2(p+1)$ et $\gamma_{p,p-1} = 2p$. On peut alors résoudre explicitement le système linéaire (2.13). Si l'état initial est $f_{p_0}$, alors la fonction génératrice du processus de sauts associé $u(z,t) = \mathbf{E}_{0,p_0}[z^{N_t}]$ satisfait :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha_1 (z-1) \frac{\partial}{\partial z} \left( (z-1) u \right), \qquad u(0, z) = z^{p_0},$$

où $\alpha_1$ est donné par (2.12), dont la solution est :

$$u(z,t) = \frac{1}{1 + \alpha_1 t(1-z)} \left( \frac{1 + (z-1)(1-\alpha_1 t)}{1 + \alpha_1 t(1-z)} \right)^{p_0}.$$

En développant $u(z,t)$ en puissances de $z$ on établit que les probabilités de transition sont données par [Prop. 4.3-G8] :

$$C_{p_0,p}(t) = \sum_{j=(p_0-p)^+}^{p_0} \frac{p_0! p!}{(p_0 - j)!^2 j! (p - p_0 + j)!} \frac{(\alpha_1 t)^{p+2j-p_0}}{(1+\alpha_1 t)^{p+p_0+1}}.$$

### 2.5.2 Une perturbation quadratique

On suppose ici que la perturbation est de la forme $x^2 m(t)$. Les seuls coefficients de couplage non-nuls sont $\gamma_{p,p+2} = (p+1)(p+2)/4$ et $\gamma_{p,p-2} = p(p-1)/4$. On donne ici les idées essentielles utilisées pour dériver des expressions fermées pour les probabilités de transition $C_{p_0,p}(t)$. On établit tout d'abord l'équation qui gouverne l'évolution de la fonction génératrice $u(t,z) := \mathbf{E}_{0,p_0}\left[z^{N_t}\right]$. On peut exprimer $v(t,z) := (1-z^2)u(t,z)$ comme fonctionnelle d'un processus de diffusion $Z$ :

$$v(t,z) = \mathbb{E}\left[Z^{p_0}(t)(1-Z^2(t))\right],$$

dont le générateur infinitésimal est $\mathcal{L}_Z = (\alpha_2/8)(1-Z^2)^2\partial_Z^2$. Le processus $Y_t = \mathrm{argth}(Z_t)$ dont le générateur est $\mathcal{L}_Y = (\alpha_2/8)\partial_Y^2 + (\alpha_2/4)\tanh(Y)\partial_Y$ a déjà été étudié. En appliquant une version généralisée de l'identité de Bougerol [15] on établit que, pour tout $t$, $\sinh(Y_t)$ a la même loi que $X_t$ :

$$X_t = \exp\left(\frac{\sqrt{\alpha_2}}{2}B_t^1 + \frac{\alpha_2}{4}t\right)\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2}\int_0^t \exp\left(-\frac{\sqrt{\alpha_2}}{2}B_s^1 - \frac{\alpha_2}{4}s\right)dB_s^2\right),$$

où $B^1$ et $B^2$ sont deux mouvements Browniens indépendants. On obtient alors l'expression :

$$v(t,z) = \mathbb{E}\left[X_t^{p_0}\left(1+X_t^2\right)^{-1-p_0/2}\right]. \tag{2.16}$$

Le corollaire 2.3.3 [15] donne la densité de probabilité de $X_t$ (après application de la formule de Girsanov). Après quelques calculs et intégrations par parties, on trouve finalement que :

$$C_{0,0}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\alpha_2 t}{8}\right)\int_0^\infty du \frac{e^{-u^2}}{\cosh\left(u\sqrt{\alpha_2 t/2}\right)}.$$

Cette formule prouve en particulier la décroissance de $C_{0,0}(t)$ pour les temps longs qui est donc $\sqrt{2\pi}(\alpha_2 t)^{-1/2}\exp(-\alpha_2 t/8)$. Les autres formules explicites donnant les expressions des probabilités de transition $C_{2p_0,2p}(t)$ sont données dans [G29].

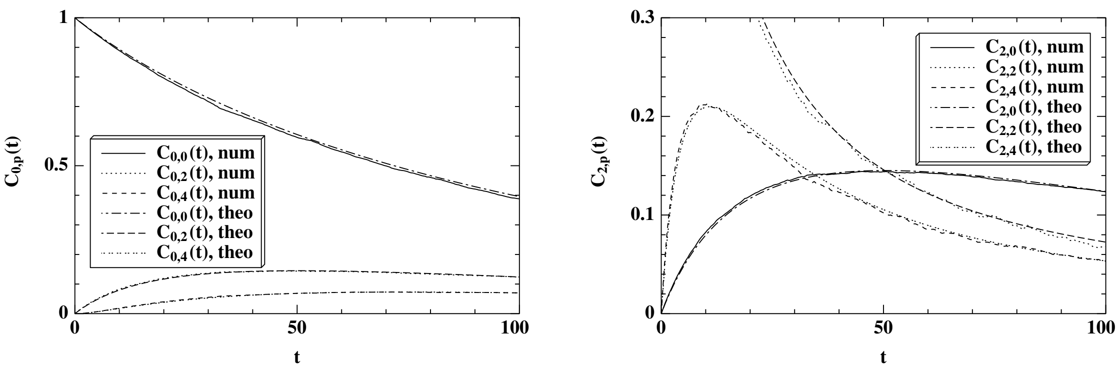


Figure 2.2: *Evolution de la distribution d'énergie de la particule calculée par simulation directe de l'équation de Schrödinger (2.5) perturbée par $\varepsilon x^2 m(t)$. Ici $m(t)$ est constant par morceaux et prend les valeurs $-1$ et $+1$ avec equiprobabilité. On présente les résultats moyennisés sur 2000 réalisations et on les compare avec les formules théoriques dérivés ci-dessus. Figure de gauche : L'état initial est $f_0$. Figure de droite : L'état initial est $f_2$. On a agrandi la zone afin que les faibles écarts entre le courbes soient perceptibles. Les valeurs des paramètres sont $t_c = 0.4$ ($\alpha_2 \simeq 0.0474$) et $\varepsilon = 0.5$.*

La théorie que nous avons développée ne s'applique pas seulement à ces deux cas simples que sont les perturbations linéaire et quadratique. Nous avons développé ici ces deux cas car ils permettent de retrouver et d'étendre à peu de frais des résultats connus ([78, 20] pour la perturbation linéaire et [95] pour la perturbation non-linéaire). On renvoie à [G17] pour l'étude explicite d'autres formes de perturbations (gaussienne, périodique, etc), qui font apparaître des comportement surprenants et très variés de la distribution d'énergie.

## 2.6 Conclusions et perspectives

Nous avons caractérisé de manière précise l'influence de perturbations aléatoires sur l'évolution d'une particule quantique. Les résultats présentés ici sont limités au cas de l'oscillateur harmonique. En effet on connaît explicitement les valeurs et les vecteurs propres de ce système, si bien qu'on peut mener à bien nos calculs jusqu'à obtenir des expressions fermées pour les probabilités de transition. Cependant les résultats théoriques que nous avons obtenus peuvent se généraliser facilement à une très grande classe de systèmes quantiques. En effet la seule hypothèse dont nous ayons besoin est l'existence d'une base de vecteurs propres pour le Hamiltonien non perturbé. On peut alors calculer, au moins numériquement pour des systèmes compliqués, les coefficients de couplage $\Gamma_{p,p+p'}$. La résolution du système correspondant (2.13) est alors possible au moyen d'une simulation de la chaîne $(N_t)$ par exemple.

L'extension des résultats présentés à des configurations où le spectre du Hamiltonien non perturbé n'est pas purement ponctuel nécessite plus de travail, mais représente un enjeu important. En effet de nombreux problèmes du type ionisation consiste en la détermination de la transition entre un état du spectre ponctuel (état localisé) et un état du spectre continu (état libre). Nous nous y pencherons très prochainement.

# Chapitre 3

# Transmission de solitons à travers un milieu aléatoire

Les résultats que je présente ici s'inscrivent dans la lignée des travaux de recherche étudiant la compétition entre les effets aléatoires et non-linéaires dans les phénomènes de propagation d'ondes. Dans un milieu linéaire uni-dimensionnel aléatoirement perturbé, la localisation d'Anderson intervient, ce qui signifie en particulier que l'intensité transmise décroît exponentiellement avec la taille du milieu [72]. D'autre part, en l'absence d'inhomogénéités, certains systèmes non-linéaires laissent se propager des paquets d'ondes localisés (solitons) sans déformation et à vitesse constante [91]. Il a été montré [28, 69] qu'une nonlinéarité suffisamment forte pouvait transformer la décroissance du coefficient de transmission associé à une onde monochromatique en une loi en puissance. Une nonlinéarité faible, elle, n'affecte pas la décroissance exponentielle du coefficient de transmission, mais seulement la différence de phase de l'onde diffractée [G3]. On veut étudier ici la propagation de solitons à travers des systèmes non-linéaires et aléatoirement inhomogènes. On considère l'équation de Schrödinger non-linéaire uni-dimensionnelle, qui modélise la propagation d'impulsions solitons à travers des milieux non-linéaires. On cherche en particulier à déterminer quels types de solitons peuvent traverser sans encombre le milieu considéré, et quels sont ceux qui sont réfléchis ou déformés. De telles recherches ont déjà été abordées d'un point de vue physique [67] et numérique [51] lorsque les perturbations concernent seulement le potentiel, sont ponctuelles et ne concernent qu'une petite zone de l'espace. Un résumé de ces travaux, ainsi que des approches concernant d'autres équations que celle de Schrödinger se trouve dans [50]. Notre méthode consiste à développer une transformation d'inverse scattering dans un cadre stochastique, et à déterminer les asymptotiques qui permettent de résoudre le problème limite correspondant.

## 3.1 L'équation de Schrödinger non-linéaire et les solitons optiques

L'équation de Schrödinger non-linéaire modélise l'évolution de l'enveloppe d'un paquet d'ondes dans un milieu dont l'indice de réfraction est non-linéaire, c'est-à-dire dépendant de l'intensité locale. Elle est universelle dans le sens où elle se rencontre dans beaucoup de situations où une approximation de type paraxiale est valable. Cette approximation consiste formellement à prendre la transformée de Fourier inverse en temps et en espace du développement de la relation de dispersion autour d'une certaine direction, qui peut être spatiale ou temporelle, privilégiée par le problème considéré. On renvoie à [30] pour une dérivation exacte de l'équation de Schrödinger non-linéaire. Cette dernière peut prendre plusieurs formes en fonction du type de problème regardé, selon qu'on recherche plus particulièrement l'évolution sur l'axe temporel d'une enveloppe spatiale donnée ou bien l'évolution dans une certaine direction de propagation d'une impulsion de forme temporelle connue.

**Evolution sur l'axe temporel privilégiée.** La propagation des faisceaux lumineux dans certains problèmes d'optique non-linéaire et de physique des plasmas est gouvernée par l'équation [91] :

$$\frac{2ik_c}{\omega'}\left(\frac{\partial E}{\partial t}+\omega'\frac{\partial E}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E+\frac{\omega'' k_c}{\omega'}\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}+\frac{2k_c^2}{n_0}n(|E|^2)E=0. \tag{3.1}$$

Cette équation se dérive de manière formelle du développement de la loi de dispersion dans le milieu $\omega=\omega(k)$ autour du nombre d'onde $k_c$. Sous la forme (3.1) l'équation de Schrödinger se rencontre notamment en physique des plasmas. Plus généralement elle décrit l'évolution de l'enveloppe scalaire lentement variable $E(x, y, z, t)$ du champ électrique $\mathcal{E} = \mathrm{Re}\,(E \exp i(k_c z - \omega_c t))$ d'une onde quasi-monochromatique de nombre d'onde central $k_c$ dans un milieu dispersif. Dans l'équation (3.1), $\omega' = \partial\omega/\partial k\ |_{k_c}$ désigne la vitesse de groupe du paquet d'ondes constitué par l'enveloppe du faisceau, et $\omega'' = \partial^2\omega/\partial k^2\ |_{k_c}$ représente le coefficient de dispersion de cette vitesse de groupe. Suivant les propriétés du milieu dans lequel se propage l'onde, le coefficient $\omega''$ peut être négatif dans le cas d'une dispersion dite normale, ou positif dans le cas d'une dispersion dite anormale. On considère dans ce chapitre le dernier cas uniquement. Le terme de couplage non-linéaire $n(|E|^2)$ correspond à un indice de réfraction du milieu s'écrivant $\tilde{n} = n_0 + n(|E|^2)$ et est dû à la réponse du milieu à l'intensité de l'onde. Lorsque cette réponse est instantanée, elle correspond à l'effet Kerr classique $n(|E|^2) = n_2|E|^2$, où $n_2 > 0$ désigne une constante sans dimension. On se place dans le repère voyageant à la vitesse de groupe, et on renormalise l'amplitude du champ $E$ ainsi que les variables de temps et d'espace à l'aide des transformations $\tilde{E} = \sqrt{n_2/(2n_0)}E$, $\tilde{x} = \sqrt{2}k_c x$, $\tilde{y} = \sqrt{2}k_c y$, $\tilde{z} = \sqrt{2\omega' k_c/\omega''}z$, $\tilde{t} = \omega' k_c\,(t + z/\omega')$. L'équation (3.1) se réduit alors à l'équation de Schrödinger non-linéaire :

$$i\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{t}} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}\right)\tilde{E} + \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial \tilde{z}^2} + 2|\tilde{E}|^2\tilde{E} = 0. \tag{3.2}$$

Ainsi, lorsqu'on considère une onde incidente plane ou bien un mode confiné se propageant dans un guide [91, chap. 3, équation 3.66], on obtient l'équation de Schödinger uni-dimensionnelle :

$$i\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial \tilde{z}^2} + 2|\tilde{E}|^2\tilde{E} = 0. \tag{3.3}$$

**Evolution selon l'axe de propagation privilégiée.** La forme (3.1) n'est pas en réalité la forme la plus courante de l'équation de Schrödinger non-linéaire, car la formulation des problèmes physiques que l'on considère consiste plus souvent à regarder l'évolution d'une impulsion le long d'un axe de propagation $z$. Ceci est vrai en particulier dans le cas de guides d'ondes et de fibres optiques [91, chap. 3]. Il n'y a alors pas de dispersion transverse, et l'équation qui régit la propagation est :

$$2i\left(\frac{\partial E}{\partial z} + k'\frac{\partial E}{\partial t}\right) - k''\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{2k_c n(|E|^2)}{n_0}E = 0. \tag{3.4}$$

Cette équation se dérive de manière formelle du développement de la loi de dispersion dans le milieu $k = k(\omega)$ autour de la pulsation $\omega_c$. Pour faire le lien avec le paragraphe précédent, notez que $k' = 1/\omega'$ et $k'' = -\omega''/\omega'^2$. On considère dans ce chapitre le cas d'un milieu Kerr à dispersion anormale, c'est-à-dire le cas où $n(|E|^2) = n_2|E|^2$, $n_2 > 0$ et $k'' < 0$. On renormalise en les adimensionnant les différentes échelles qui interviennent en posant : $\bar{E} = \sqrt{n_2/(2n_0)}E$, $\bar{z} = k_c\,(z + t/k')$, $\bar{t} = \sqrt{2k_c/|k''|}t$. L'équation (3.4) se réduit alors à l'équation de Schrödinger non-linéaire uni-dimensionnelle :

$$i\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{t}^2} + 2|\bar{E}|^2\bar{E} = 0. \tag{3.5}$$

**Solitons et fibres optiques.** Le principe d'utilisation des fibres optiques comme canaux de communication est relativement simple. Le message est codé sous forme binaire, en représentant un 1 comme une impulsion courte et un 0 comme l'absence d'une telle impulsion dans un train d'ondes transmis par la fibre. Typiquement, la longueur d'onde centrale est de l'ordre du micromètre, la durée de chaque impulsion élémentaire de l'ordre de dix picosecondes et la distance entre les impulsions de l'ordre de la centaine de picosecondes. Les deux phénomènes qui limitent la transmission à longue distance sont l'atténuation et la dispersion. Jusqu'aux années 70, le facteur le plus limitant était l'atténuation, due à la diffusion de Rayleigh et à l'absorption par des impuretés. Mais depuis la technologie moderne a réussi à purifier les verres de silice au point où la constante d'atténuation devient très basse ($< 0.1$ dB/km). Parallèlement, on a réussi à développer des générateurs d'impulsions courtes qui émettent à des taux de plusieurs gigabits par seconde. Ces deux percées technologiques ont pour conséquence que le facteur limitant maintenant la transmission à longue distance et à haut débit est la dispersion, qui fait s'étaler temporellement un paquet d'ondes linéaire de durée initiale $t_0$ après une distance de propagation de l'ordre de $t_0^2/k''$. Ainsi, plus le taux de transmission est grand, plus l'intervalle entre les impulsions et leur durée sont petites, et plus la dispersion est importante. Pour remédier à ce problème, il a été suggéré que la non-linéarité pouvait contre-balancer la dispersion. En effet, la partie non-linéaire de l'indice de réfraction du milieu augmente avec l'intensité de l'onde. Cette dernière a donc tendance à se concentrer près de ses maxima locaux, phénomène appelé autofocalisation [91]. En 1973, Hasegawa et Tappert [55] ont suggéré que le soliton était le candidat idéal pour être l'impulsion courte représentant le 1 du message binaire :

$$\tilde{E}(\tilde{t},\tilde{z}) = 2\nu_0 \frac{\exp i\left(2\mu_0(\tilde{z}-4\mu_0\tilde{t}) + 4(\nu_0^2+\mu_0^2)\tilde{t}\right)}{\cosh\left(2\nu_0(\tilde{z}-4\mu_0\tilde{t})\right)}.$$

En effet les effets non-linéaires compensent exactement les effets dispersifs pour cette solution particulière de l'équation de Schrödinger non-linéaire uni-dimensionnelle (3.3). En outre, elle s'avère robuste et stable, comme on va le voir dans ce chapitre.

## 3.2 Formulation du problème de transmission

On étudie la propagation d'un soliton dans une couche d'un milieu inhomogène qui présente des fluctuations spatialement aléatoires de ses caractéristiques (figure 3.1). On considère une équation de propagation perturbée, c'est-à-dire avec un second membre non-nul :

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = \varepsilon R(u)(t,x). \tag{3.6}$$

Le petit paramètre $\varepsilon \in ]0,1]$ modélise l'amplitude des perturbations. On prendra pour modèle de perturbations :

$$R(u)(t,x) = V_1(x)u(t,x) + V_2(x)|u|^2(t,x)u(t,x) + (V_3(x)u_x(t,x))_x, \tag{3.7}$$

où les $V_j$ sont des processus ergodiques satisfaisant certaines propriétés de régularité qu'on peut trouver dans [G6] et [G16]. $V_1$ modélise les perturbations du potentiel, $V_2$ les fluctuations du coefficient non-linéaire et $V_3$ représente des perturbations dispersives. On suppose que l'onde incidente est un soliton pur venant de la gauche. On peut obtenir des estimées a priori sur différentes quantités fondamentales :

**Lemme 3.1**
*1. Les quantités suivantes, appelées respectivement masse et énergie, sont des intégrales du mouvement conservées pendant toute la propagation :*

$$N_{tot} = \int |u|^2 dx, \qquad E_{tot} = \int H_0(t,x)dx + \varepsilon \int H_1(t,x)dx, \tag{3.8}$$

$$H_0(t,x) = |u_x|^2 - |u|^4, \qquad H_1(t,x) = V_1(x)|u|^2 + \frac{1}{2}V_2(x)|u|^4 dx - V_3(x)|u_x|^2. \tag{3.9}$$

*2. Les normes $H^1$, $L^4$ et $L^\infty$ de $u(t,.)$ sont uniformément bornée par rapport à $t$ et $\varepsilon \in ]0,1]$. De plus $\varepsilon \int H_1(t,x)dx$ est uniformément bornée par une constante $K^\varepsilon$ qui tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.*

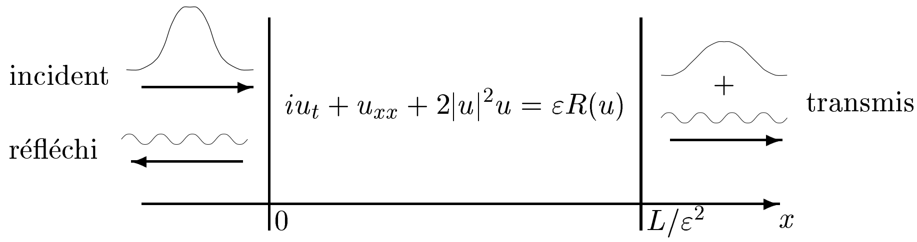


Figure 3.1: *Transmission d'un soliton incident venant de la gauche à travers une couche de milieu aléatoire et non-linéaire occupant la région* $[0, L/\varepsilon^2]$.

## 3.3 Perturbations de la transformée d'inverse scattering

**La transformée d'inverse scattering.** On va introduire cette méthode par une analogie avec la transformée de Fourier. Commençons par rappeler la méthode de résolution de l'équation de Schrödinger linéaire (SL), avec une condition initiale suffisamment décroissante :

$$iu_t + u_{xx} = 0, \qquad u(0,x) = u_0(x),\ u_0 \in L^1.$$

Le problème de ce système est qu'il est infiniment couplé, c'est-à-dire que, pour connaître la valeur de la solution au point $x_0$ en un instant $t > 0$, on a besoin de calculer l'évolution de la solution pour les sites voisins de $x_0$. Pour résoudre ce système, on utilise la transformée de Fourier. On commence par une transformation directe (DFT) :

$$\hat{u}(0,k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(0,x)e^{-ikx}dx,$$

qui présente l'avantage essentiel de découpler les équations d'évolution :

$$\hat{u}_t = -ik^2\hat{u}.$$

On reconstruit alors la solution à l'instant $t$ par la transformation inverse (IFT) :

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(t,k)e^{ikx}dk.$$

En résumé, la transformée de Fourier réalise le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} u(0,x) & \stackrel{\text{DFT}}{\longrightarrow} & \hat{u}(0,k) \\ \text{SL} \downarrow & & \downarrow \text{évolution explicite et découplée} \\ u(t,x) & \stackrel{\text{IFT}}{\longleftarrow} & \hat{u}(t,k) \end{array}$$

Considérons maintenant l'équation de Schrödinger non-linéaire homogène (SNL) :

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0, \qquad u(0,x) = u_0(x), u_0 \in L^1.$$

La transformée d'inverse scattering est constituée d'une transformation directe et d'une transformation inverse qui réalisent le même type de diagramme commutatif [114, 80] :

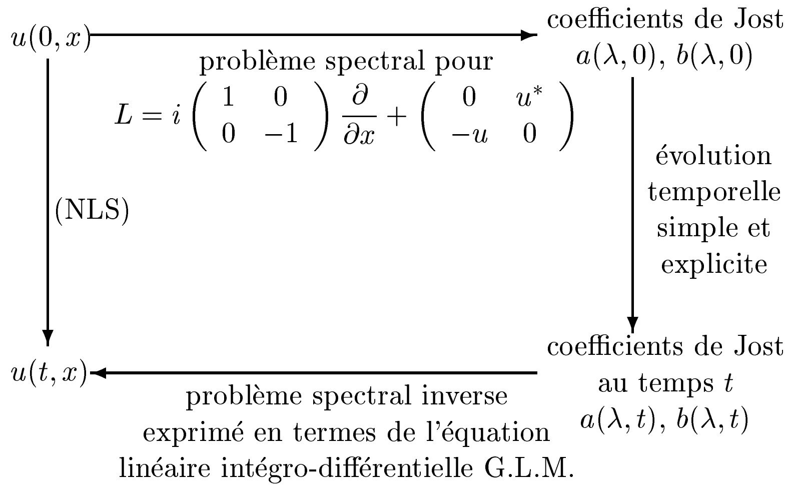


Figure 3.2: *Principe de la transformée d'inverse scattering*

La transformation directe consiste à étudier le spectre (valeurs et vecteurs propres) de l'opérateur $L(u)$ dans lequel $u$ joue le rôle d'un potentiel. L'étude de ce problème spectral fournit un jeu de données qui caractérise entièrement $u$. On reconstruit $u$ en résolvant l'équation de Gelfand-Levitan-Marchenko (problème inverse). Les équations d'évolution temporelle des coefficients de Jost sont découplées : $a_t = 0$ et $b_t = -4i\lambda^2 b$.

**Le soliton incident.** On suppose qu'un soliton pur provenant de la gauche arrive sur la couche $[0, L/\varepsilon^2]$ :

$$u_0(t,x) = 2\nu_0 \frac{\exp i\left(2\mu_0(x - 4\mu_0 t) + 4(\nu_0^2 + \mu_0^2)t\right)}{\cosh\left(2\nu_0(x - 4\mu_0 t)\right)}. \tag{3.10}$$

La masse et la vitesse de ce soliton sont respectivement $N_0 = 4\nu_0$ et $V_0 = 4\mu_0$, et son énergie $E_0 := \int H_0(x)dx$ est égale à $E_0 = 16(\nu_0\mu_0^2 - \nu_0^3/3)$. La largeur de l'enveloppe du soliton est inversement proportionnelle à sa masse (figure 3.3). Le soliton (3.10) correspond aux coefficients de Jost suivants [80] :

$$a_0(\lambda) = \frac{\lambda - (\mu_0 + i\nu_0)}{\lambda - (\mu_0 - i\nu_0)}, \quad b_0(\lambda) = 0. \tag{3.11}$$

$a_0$ admet un unique zéro dans le demi-plan complexe supérieur noté $\lambda_0 = \mu_0 + i\nu_0$.

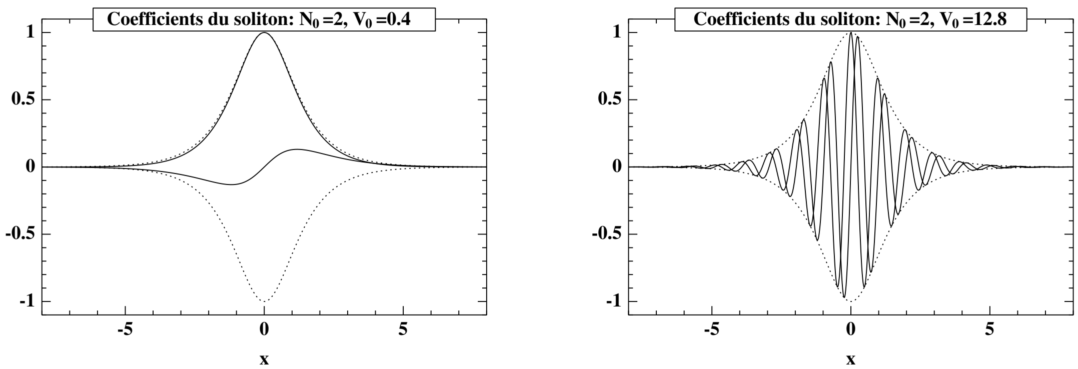


Figure 3.3: *Soliton incident pour différentes masses et vitesses. Les traits pointillés représentent les enveloppes (modules) et les traits pleins les parties réelles et imaginaires.*

**Expressions de la masse et de l'énergie.** On introduit $n(\lambda) = -\pi^{-1}\ln|a(\lambda)|^2$. On note $\lambda_r$ les zéros de $a$ dans le demi-plan complexe supérieur. Chaque zéro correspond à un soliton dont la masse (resp. la vitesse) est proportionnelle à la partie imaginaire (resp. réelle) de $\lambda_r$. La masse totale $N_{tot}$ de l'onde s'exprime sous la forme d'une somme sur les parties solitons (issus du spectre discret, zéro $\lambda_r$, de masse $4\mathrm{Im}(\lambda_r)$) et sur la partie radiative (issu du spectre continu, $\lambda \in \mathbb{R}$, de densité de masse $n(\lambda)$) :

$$N_{tot} = \sum_r 2i(\lambda_r^* - \lambda_r) + \int_{\mathbb{R}} n(\lambda)d\lambda. \tag{3.12}$$

L'énergie propre (i.e. non-perturbée) $E_0 := \int H_0(x)dx$ s'exprime elle sous la forme :

$$E_0 = \sum_r \frac{8i}{3}(\lambda_r^{*3} - \lambda_r{}^3) + 4\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 n(\lambda)d\lambda. \tag{3.13}$$

**Stratégie dans le cas aléatoire.** On a développé une méthode de perturbation stochastique de la transformée d'inverse scattering pour traiter notre problème. Les perturbations aléatoires se traduisent par des variations coefficients de Jost. La masse et l'énergie totales sont conservées, mais les composantes issues du spectre discret (correspondant à la partie soliton de l'onde) et continue (partie radiative) varient au cours de la propagation. L'évolution de la composante continue est déterminée par les équations qui régissent les variations des coefficients de Jost. L'évolution des coefficients du soliton se déduit alors des conservations de la masse et de l'énergie totale.

**Evolutions des coefficients de Jost.** On peut déterminer de manière simple les équations d'évolution des coefficients de Jost $a$ et $b$ de l'onde lors de sa propagation à travers le milieu aléatoire contenu dans la zone $[0, L/\varepsilon^2]$. Les données initiales $a(t=-\infty,\lambda)$ et $b(t=-\infty,\lambda)$ sont imposées par le soliton incident et valent (3.11). Les coefficients de Jost satisfont les équations exactes suivantes [65] :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial a(t,\lambda)}{\partial t} &= -\varepsilon\left(a(t,\lambda)\bar{\gamma}(t,\lambda) + b(t,\lambda)\gamma(t,\lambda)\right), \\ \frac{\partial b(t,\lambda)}{\partial t} &= -4i\lambda^2 b(t,\lambda) + \varepsilon\left(a(t,\lambda)\gamma^*(t,\lambda) + b(t,\lambda)\bar{\gamma}(t,\lambda)\right), \end{aligned} \right. \tag{3.14}$$

où les fonctions $\gamma$ et $\bar{\gamma}$ sont définies par :

$$\gamma(t,\lambda) = \int dx R(u)^* f_2^2 + R(u) f_1^2, \quad \bar{\gamma}(t,\lambda) = \int dx R(u) f_1 f_2^* - R(u)^* f_1^* f_2, \tag{3.15}$$

et $f_1$ et $f_2$ sont appelées les fonctions de Jost. Il apparaît donc que le terme de perturbation $R(u)$ vient coupler les équations d'évolution des coefficients de Jost qui étaient découplées dans le cas d'un milieu homogène.

**L'approximation adiabatique.** L'approximation adiabatique consiste à supposer a priori que, tant que le soliton existe, son évolution et celle de la partie radiative sont sans interaction. Plus précisément, on suppose que les équations d'évolution temporelle des coefficients de Jost $a$ et $b$ dépendent seulement des composantes des fonctionnelles $\gamma$ et $\bar{\gamma}$ qui sont associées à la partie soliton. On effectue d'abord les calculs sous cette approximation, ce qui nous fournit une certaine expression de l'onde totale $u$. A posteriori on vérifie que l'approximation adiabatique était bien justifiée dans l'asymptotique $\varepsilon \to 0$. Plus exactement nous démontrons le caractère négligeable des composantes des fonctionnelles $\gamma$ et $\bar{\gamma}$ qui sont associées à l'interaction entre la partie soliton et la partie radiative calculées, ou bien qui sont issues de la partie radiative seule.

## 3.4 Comportement asymptotique de l'onde transmise

Soit $L > 0$. On note $\mathcal{C}^0$ l'espace $\mathcal{C}^0([0,L],\mathbb{R}^2)$ des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ équipé avec la topologie usuelle associée à la norme uniforme. $(\nu_l(x),\mu_l(x))_{x\in[0,L]}$ est l'élément de $\mathcal{C}^0$ qui satisfait le système d'équations différentielles ordinaires :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\nu_l}{dx} = F(\nu_l,\mu_l), \quad \nu_l(0)=\nu_0, \\ \dfrac{d\mu_l}{dx} = G(\nu_l,\mu_l). \quad \mu_l(0)=\mu_0. \end{array}\right. \tag{3.16}$$

Les fonctions $F$ et $G$ sont égales à :

$$\begin{aligned} F(\nu,\mu) &= -\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty} C_j(\nu,\mu,\lambda)d_j(k(\nu,\mu,\lambda))d\lambda, \\ G(\nu,\mu) &= -\frac{1}{8\pi}\sum_{j=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2}{\mu\nu}+\frac{\nu}{\mu}-\frac{\mu}{\nu}\right)C_j(\nu,\mu,\lambda)d_j(k(\nu,\mu,\lambda))d\lambda, \end{aligned} \tag{3.17}$$

où les fonctions $C_j$ sont régulières et bornées, $k(\nu,\mu,\lambda) = \left((\lambda-\mu)^2+\nu^2\right)/\mu$ et les $d_j$ sont les densités de puissance spectrales des processus $V_j$ (i.e. les transformées de Fourier des fonctions d'autocorrélation). Notons $\Omega_L^\varepsilon$ l'ensemble mesurable des réalisations des processus $V_j$ telles que l'onde transmise se compose d'un soliton plus une partie radiative. On note $\nu^\varepsilon$ et $\mu^\varepsilon$ les processus changés d'échelle définis sur $\Omega_L^\varepsilon$ par $\nu^\varepsilon(x) = \nu(x/\varepsilon^2)$ et $\mu^\varepsilon(x) = \mu(x/\varepsilon^2)$ (i.e. les coefficients du soliton transmis à la position $x/\varepsilon^2$), et sur ${\Omega_L^\varepsilon}^c$ par $\nu^\varepsilon(x) = 0$ et $\mu^\varepsilon(x) = 0$. Le résultat principal est le suivant.

**Proposition 3.2**
*Sous l'approximation adiabatique, les assertions suivantes sont vraies pour tout $L > 0$.*
*1.* $\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}\left(\Omega_L^\varepsilon\right) = 1.$
*2. Le processus $(\nu^\varepsilon(x),\mu^\varepsilon(x))_{x\in[0,L]}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ converge en probabilité dans $\mathcal{C}^0$ vers la fonction déterministe $(\nu_l(x),\mu_l(x))_{x\in[0,L]}$ qui satisfait le système (3.16).*

Le premier point signifie que l'événement "l'onde transmise se compose d'un soliton et d'une partie radiative" est vérifié avec très grande probabilité pour $\varepsilon$ suffisamment petit; le second point donne l'équation d'évolution effective des coefficients du soliton transmis dans l'asymptotique $\varepsilon \to 0$.

## 3.5 Eléments de la démonstration

On donne les étapes essentielles de la démonstration effectuée dans [G6] et [G16].

*1) Démontrer la stabilité du zéro du coefficient de Jost $a$.* Le zéro correspond à la partie soliton de l'onde. Cette démonstration repose sur les propriétés analytiques de $a$ dans le demi-plan complexe supérieur.

*2) Calculer la quantité de radiation.* Sous l'approximation adiabatique, on résout les équations d'évolution (3.14) et on obtient que la quantité $\bar{b}/a(t,\lambda) = b/a(t,\lambda)e^{4i\lambda^2 t}$ au temps $t/\varepsilon^2$ est donnée

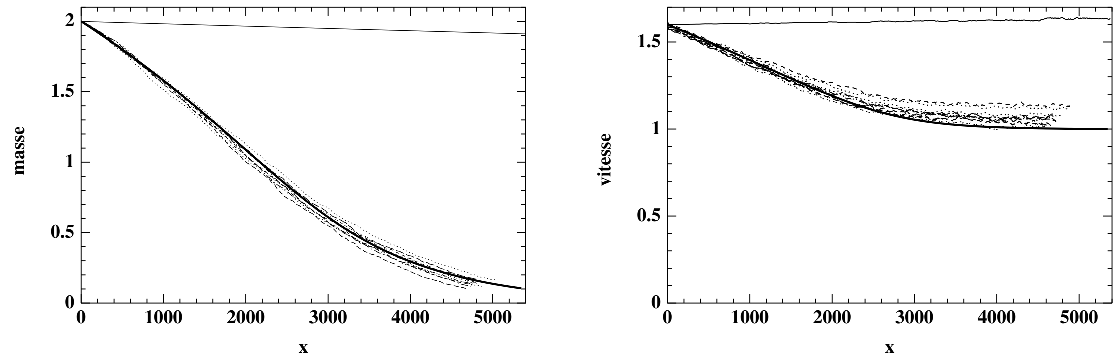


Figure 3.4: *Coefficients du soliton transmis pour des valeurs initiales $N_0 = 2$ et $V_0 = 1.6$ avec un potentiel $V_1$ aléatoire prenant les valeurs $-1/2$ et $1/2$ avec probabilité $1/2$ sur les couches élémentaires de longueur 1. Ici $\varepsilon = 0.1$. Les traits pleins épais représentent les valeurs théoriques données par le système (3.16) avec $x \to x/\varepsilon^2$. Les trais pleins fins dessinent le résultat d'une simulation numérique de l'équation de Schrödinger non-linéaire homogène $V_1 \equiv 0$ qui valide le code numérique utilisé. Les traits fins pointillés et hachurés correspondent à des simulations numériques de l'équation de Schrödinger non-linéaire avec différentes réalisations du potentiel aléatoire $V_1$.*

par :

$$\frac{\bar{b}}{a}(\frac{t}{\varepsilon^2}, \lambda) = -i\varepsilon \int_0^{x_s(t/\varepsilon^2)} e^{i\phi_s(x) - 2\lambda x + 4\lambda^2 t_s(x)} \sum_{j=1}^{3} V_j(x) c_j(\lambda, \nu(x), \mu(x)) dx, \qquad (3.18)$$

où $x_s(t)$ est la position du centre du soliton au temps $t$ défini par (3.20), $t_s(x)$ est l'instant d'arrivée du soliton au point $x$ (inverse de la fonction $x_s(t)$), $\phi_s(x)$ est la phase du soliton définie par (3.20) et l'expression explicite des coefficients $c_j$ est donnée dans [G6] et [G16]. Eq. (3.18) permet d'estimer la quantité de radiation émise durant un certain intervalle de temps en termes de masse et d'énergie. On peut alors en déduire les équations d'évolution des coefficients du soliton en utilisant la conservation de la masse totale et de l'énergie totale. Pour des temps d'ordre $O(1)$, comme $N_{tot}$ et $E_{tot}$ sont conservées, les variations $\Delta(..)$ des différentes quantités que l'on regarde sont liées par les relations :

$$\begin{aligned} 0 &= 4\Delta\nu + \int \Delta n(\lambda) d\lambda, \\ 0 &= 16\Delta\left(\nu\mu^2 - \nu^3/3\right) + 4\int \lambda^2 \Delta n(\lambda) d\lambda + \varepsilon\Delta\left(\int_{\mathbb{R}} H_1(x)dx\right). \end{aligned}$$

$\Delta n(\lambda)$ est d'ordre $\varepsilon^2$, mais le dernier terme de l'expression de l'énergie totale est d'ordre $\varepsilon$, et on ne sait pas le calculer précisément. Donc notre stratégie est inefficace pour estimer les variations des coefficients du soliton pour des temps d'ordre $O(1)$. Par contre, si on considère des temps d'ordre $O(\varepsilon^{-2})$, alors $\Delta n(\lambda)$ est d'ordre 1 pendant que le dernier terme gênant dans l'expression de l'énergie totale est d'ordre $o(1)$ d'après le Lemme 3.1. On peut donc calculer efficacement le comportement en temps long des coefficients du soliton dans l'asymptotique $\varepsilon \to 0$, c'est-à-dire lorsque le dernier terme dans l'expression de l'énergie totale est négligeable. En appliquant des théorèmes limites de type approximation-diffusion, on trouve que les coefficients du soliton convergent en probabilité vers des quantités déterministes qui satisfont le système (3.16).

*3) Calculer la forme de l'onde transmise.* Sous l'approximation adiabatique, en négligeant les termes d'ordre supérieur, l'onde totale peut être représentée comme la somme $u(t/\varepsilon^2, x) = u_S(t/\varepsilon^2, x) +$

$u_L(t/\varepsilon^2, x)$, où $u_S$ est soliton de masse $4\nu(t/\varepsilon^2)$ et de vitesse $4\mu(t/\varepsilon^2)$ :

$$u_S(\frac{t}{\varepsilon^2}, x) = -2i\nu \frac{\exp i\left(2\mu(x - x_s) + \phi_s\right)}{\cosh\left(2\nu(x - x_s)\right)}, \tag{3.19}$$

$x_s$ et $\phi_s$ sont respectivement la position et la phase du soliton au temps $t/\varepsilon^2$ :

$$x_s = \frac{1}{2\nu} \ln\left(\frac{1}{2\nu}\left|\frac{\rho_r(t/\varepsilon^2)}{a'(t/\varepsilon^2, \lambda_s)}\right|\right), \quad \phi_s = \arg\left(-i\frac{\rho_r(t/\varepsilon^2)}{a'(t/\varepsilon^2, \lambda_s)}\right) + 2\mu x_s, \tag{3.20}$$

$\lambda_s = \mu(t/\varepsilon^2) + i\nu(t/\varepsilon^2)$ et $u_L$ admet l'expression suivante :

$$\begin{aligned} u_L(\frac{t}{\varepsilon^2}, x) = \; & \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{a}(\lambda) \frac{\left(\lambda - \mu + i\nu \tanh\left(2\nu(x - x_s)\right)\right)^2}{(\lambda - \mu + i\nu)^2} e^{2i\lambda x} d\lambda \\ & + \frac{\nu^2}{i\pi} \frac{\exp 2i\left(2\mu(x - x_s) + \phi_s\right)}{\cosh^2\left(2\nu(x - x_s)\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^*}{a^*}(\lambda) \frac{1}{(\lambda - \mu - i\nu)^2} e^{-2i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \tag{3.21}$$

$u_S$ est la partie soliton de l'onde totale. La première composante de $u_L$ représente le paquet d'ondes diffractées ou partie radiative avec une correction dans le voisinage du soliton $x \sim x_s(t/\varepsilon^2)$. La seconde composante de $u_L$ représente l'interaction entre le soliton et la partie radiative, qui est seulement apparent dans le voisinage du soliton.

*4) Vérifier a posteriori l'approximation adiabatique.* La partie finale de la preuve consiste à vérifier a posteriori l'hypothèse adiabatique en montrant que le partie radiative qui a été déterminée n'a pas d'influence notable sur les équations d'évolutions (3.14) des coefficients de Jost $a$ et $b$. On doit pour cela estimer les composantes des fonctions $\gamma$ et $\bar{\gamma}$ qui ont été négligées jusqu'alors et qui sont issues de l'interaction entre le soliton et la partie radiative d'une part, ou qui proviennent de l'effet seul de la partie radiative. Ce sont des calculs techniques qui sont basés sur les propriétés de mélange des processus $V_j$.

## 3.6 Conclusions et perspectives

Nous avons montré l'intérêt de la méthode d'inverse scattering pour traiter le problème de la transmission de solitons à travers des couches de milieu aléatoire. Nous avons pu mettre en évidence la stabilité du soliton qui peut traverser le milieu sans encombre si son caractère non-linéaire (c'est-à-dire sa masse) est suffisamment fort. Nous avons ainsi démontré que le phénomène de localisation exponentielle, universel en milieu linéaire et aléatoire, pouvait être détruit en milieu non-linéaire.

Il serait maintenant très intéressant de considérer d'autres systèmes complètement intégrables, c'est-à-dire pour lesquels il existe une transformation d'inverse scattering associée, ce qui démontre en particulier l'existence de solitons. Parmi ces systèmes, citons l'équation de Korteweg-de Vries, qui possède une dispersion du troisième ordre [73], et le système de Manakov qui comprend deux équations de Schrödinger non-linéaires couplées [75]. D'autre part, l'interaction de solitons en milieu aléatoire est un sujet intéressant fortement la communauté des opticiens car ce problème se pose lors de la propagation de trains de solitons dans des fibres optiques et n'a pour l'instant été considérée qu'en milieu homogène [115].

# Chapitre 4

# Instabilité modulationnelle dans les fibres optiques non-linéaires à coefficients variables

## 4.1 Introduction

Nous abordons dans ce chapitre un autre aspect de la compétition entre des effets aléatoires et non-linéaires dans les phénomènes de propagation dans des fibres optiques. Il est maintenant connu que la compétition entre l'effet Kerr optique et la dispersion chromatique conduit au phénomène d'instabilité appelé instabilité modulationnelle (IM) des ondes lumineuses [5]. Cette instabilité a été mise en évidence de façon quasi-simultanée dans différents contextes au milieu des années 60. Dans le cadre des ondes de gravité en eau profonde, on l'appelle instabilité de Benjamin-Feir [13, 14] après que Benjamin et Feir eurent constaté qu'il étaient dans l'impossibilité de maintenir un train d'ondes non-linéaires d'amplitude constante. C'est en physique des plasmas qu'on lui donna pour la première fois le nom d'instabilité modulationnelle, parce qu'elle provoque l'effondrement des ondes de Langmuir [113]. En fait ce phénomène est commun à de nombreux contextes physiques : plasmas, fluides, circuits électriques, optique non-linéaire, ... L'IM provoque la décomposition d'ondes continues ou quasi-continues en un train d'impulsions ultra-courtes par la croissance exponentielle de modulations d'amplitude à certaines fréquences. Le gain IM en milieu homogène a été étudié en détail dans le cadre de l'équation de Schrödinger Non-Linéaire scalaire [5], et aussi dans celui de l'équation de Schrödinger Non-Linéaire vectorielle à la fois en régime de diffusion normal [100] et anormale [33]. Il a été montré que l'IM dépend des fréquences des modulations initiales et de la puissance de l'onde plane perturbée. Tous ces résultats ont été obtenus dans des milieux pour lesquels les paramètres caractéristiques étaient constants. Dans des fibres optiques réelles, la dispersion chromatique et le coefficient non-linéaire ne sont pas constants mais ils varient légèrement de manière aléatoire autour de leurs valeurs moyennes respectives. La source de ces inhomogénéités peut être inhérente au milieu [70] ou bien induite par la propagation d'autres ondes [6]. Récemment il a été souligné que des inhomogénéités aléatoires dans des milieux dispersifs non-linéaires pouvait étendre le domaine d'IM à tout le spectre de modulations. Cet effet est analogue à la résonnance paramétrique stochastique de l'oscillateur harmonique [68, ch. 6]. En fait plusieurs auteurs ont étudié l'IM des ondes électromagnétiques dans des milieux à non-linéarité Kerr avec un coefficient non-linéaire aléatoire [1] ou bien une dispersion de vitesse de groupe (DVG) aléatoire [2, 64]. Dans ces références les auteurs suivent la même stratégie. Ils considèrent le cas de bruits blancs pour les fluctuations des coefficients et ils calculent la moyenne de l'intensité de la modulation d'amplitude (i.e. l'exposant de Lyapunov de la moyenne) dans la limite de petits bruits. Nous avons d'une part voulu généraliser ces résultats à une classe beaucoup plus large de fluctuations. Nous avons obtenu les mêmes résultats qualitatifs que les Refs. [1, 2, 64] pour l'exposant de Lyapunov moyen, mais nous avons montré d'autre part que cet exposant est beaucoup plus grand que l'exposant de Lyapunov presque sûr qui gouverne la croissance typique de la modulation, car l'intensité de cette modulation présente d'exceptionnelles mais très grandes déviations. Ce comportement est prévu par la théorie des produits de matrices aléatoires [16], qui prédit que les stabilités presque sûre et en moyenne de systèmes dynamiques aléatoires peuvent être très différents.

Ce problème est d'un intérêt pratique certain pour la conception des systèmes de télécommunication par fibres optiques. D'une part l'IM est un facteur limitant sérieusement le débit dans les longues fibres optiques (typiquement trans-océaniques). D'autre part on peut se servir de l'IM pour la création d'un train d'impulsions de type solitons [54, 85]. En effet quand une petite modulation est appliquée à un signal d'entrée, l'IM peut se développer si la fréquence de modulation $\Omega$ se trouve dans le spectre de gain IM. Si on laisse se développer cette IM induite, alors il est possible de générer une train d'ondes de type solitons avec un taux de répétition égal à l'inverse de la fréquence de modulation appliquée $\Omega$ [85]. Comme le remarque Hasegawa [54], afin de produire le train d'impulsions désiré il est nécessaire d'extraire ce train après une distance appropriée qui est très sensible au gain IM à la fréquence $\Omega$. Il est par conséquent nécessaire d'avoir des expressions précises du gain IM dans des fibres réelles qui prennent en compte les inévitables fluctuations aléatoires des paramètres de la fibre. La question est de déterminer si oui ou non l'aléa conduit à une extension substantielle du spectre d'IM par rapport au cas déterministe, et si l'aléa provoque une diminution ou une augmentation du gain IM maximal. Des expressions précises pour les différents exposants de Lyapunov fournissent les réponses à ces questions.

## 4.2 Instabilité modulationnelle et exposants de Lyapunov

L'évolution du champ électrique dans une fibre optique mono-mode est gouvernée par l'équation de Schrödinger non-linéaire (3.5) dérivée dans le chapitre 4, ou qu'on peut aussi trouver dans [5] par exemple :

$$iu_z + \beta u_{tt} + \gamma |u|^2 u = 0. \tag{4.1}$$

On a utilisé des variables sans dimension. $\gamma$ est le coefficient non-linéaire. Le coefficient de DVG est $\beta$ qui est positif (resp. négatif) pour une dispersion anormale (resp. normale). Ces deux coefficients fluctuent autour de leur valeur moyenne $\gamma_0$ et $\beta_0$ si bien qu'on les représente sous la forme :

$$\gamma(z) = \gamma_0 \left(1 + \sigma m_\gamma(z)\right), \tag{4.2}$$

$$\beta(z) = \beta_0 \left(1 + \sigma m_\beta(z)\right), \tag{4.3}$$

où $\sigma$ est un paramètre sans dimension qui caractérise l'amplitude des fluctuations. Les fluctuations du coefficient non-linéaire sont modélisées par le processus $m_\gamma$ et celles du coefficient de DVG par $m_\beta$. On suppose que $\mathbf{m} := (m_\beta, m_\gamma)$ est un processus aléatoire, centré, stationnaire et ergodique. Un modèle usuel pour une fibre aléatoire est la concaténation aléatoire de différentes sections de fibre dont les paramètres sont différents [112, 87]. L'Eq. (4.1) possède des solutions de type ondes planes :

$$u(z,t) = \sqrt{P_0} \exp\left(i \int_0^z \gamma(z')dz' P_0\right). \tag{4.4}$$

L'analyse de stabilité s'effectue de manière standard. On considère une petite modulation de la solution plane :

$$u(z,t) = \left(\sqrt{P_0} + u_1(z,t)\right) \exp\left(i \int_0^z \gamma(z')dz' P_0\right). \tag{4.5}$$

En substituant Eq. (4.5) dans Eq. (4.1) et en ne retenant que les termes de premier ordre on obtient une version linéarisée du problème de stabilité pour la modulation $u_1(z,t)$ :

$$iu_{1z} + \beta u_{1tt} + 2\gamma P_0 \mathrm{Re}(u_1) = 0. \tag{4.6}$$

En prenant la transformée de Fourier $\hat{u}_1 = \int u_1 e^{-i\omega t} dt$, et en séparant les parties réelles et imaginaires : $\hat{u}_1 = \hat{u}_{1r} + i\hat{u}_{1i}$, on obtient un système d'équations différentielles ordinaires pour les coefficients de Fourier de la modulation :

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} \hat{u}_{1r} \\ \hat{u}_{1i} \end{pmatrix} = Y(z)\begin{pmatrix} \hat{u}_{1r} \\ \hat{u}_{1i} \end{pmatrix}, \qquad Y(z) = \begin{pmatrix} 0 & \beta(z)\omega^2 \\ 2\gamma(z)P_0 - \beta(z)\omega^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Le gain presque sûr est le gain observé pour presque toutes les réalisations des fluctuations des coefficients. Il est défini comme l'exposant de Lyapunov qui gouverne la croissance exponentielle de la modulation :

$$G(\omega) := \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} \ln |\hat{u}_1(z,\omega)|^2. \tag{4.8}$$

L'exposant $G(\omega)$ aurait pu être une variable aléatoire car $\beta$ et $\gamma$ sont aléatoires. En fait on va voir que c'est une quantité déterministe par ergodicité de $m_\beta$ et $m_\gamma$. Cependant on peut aussi définir les exposants de Lyapunov moyens qui gouvernent la croissance exponentielle du moment d'ordre $n$ de l'intensité de la modulation :

$$G_{2n}(\omega) := \lim_{z\to\infty} \frac{1}{nz} \ln \mathbb{E}\left[|\hat{u}_1(z,\omega)|^{2n}\right], \tag{4.9}$$

où $\mathbb{E}$ représente l'espérance par rapport à la loi du processus $(m_\gamma, m_\beta)$. Ces exposants sont des généralisations du gain moyen standard $G_2$ qui caractérise la croissance exponentielle de l'intensité moyenne de la modulation. Si le processus d'instabilité modulationnelle était déterministe, alors on aurait $G_{2n}(\omega) = G_2(\omega)$ pour tout $n$, puisque $\ln|\hat{u}_1(z,\omega)|^{2n} = n\ln|\hat{u}_1(z,\omega)|^2$. A cause de l'aléa ceci n'est pas vrai car on ne peut pas inverser l'ordre entre la fonction puissance non-linéaire "$|.|^n$" et la moyennisation statistique linéaire "$\mathbb{E}[.]$". En fait l'inégalité de Jensen prouve l'inégalité $G_{2n}(\omega) \geq G_2(\omega)$. La théorie des matrices aléatoires s'applique au problème (4.7). Sous certains jeux d'hypothèses sur les processus $m_\gamma$ et $m_\beta$ (voir [11, Théorème 4], mais aussi [40, 108, 16, 9]...) on prouve qu'il existe une fonction analytique $g(p)$ telle que :

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} \ln \mathbb{E}[|\hat{u}_1(z,\omega)|^p] \quad = \quad g(p), \tag{4.10}$$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} \ln |\hat{u}_1(z,\omega)| \quad = \quad g'(0) \text{ presque sûrement}, \tag{4.11}$$

$$\frac{\ln|\hat{u}_1(z,\omega)| - zg'(0)}{\sqrt{z}} \quad \xrightarrow{dist.} \quad \mathcal{N}(0, g''(0)). \tag{4.12}$$

De plus la convergence est uniforme pour $\hat{u}_1(z=0)$ sur la sphère unité, et la fonction $p \mapsto g(p)/p$ est croissante. Ceci prouve en particulier que $G(\omega) = 2g'(0)$ est déterministe. Malheureusement l'expression de $g(p)$ est compliquée même pour des processus aléatoires $m_\beta$ et $m_\gamma$ très simples. Notre contribution principale consiste en la dérivation d'expressions explicites pour les exposants de Lyapunov $G(\omega)$ et $G_{2n}(\omega)$ dans l'asymptotique naturelle correspondant aux applications en télécommunication, où le niveau de bruit est bas.

## 4.3 Calculs et développements des exposants

On passe en coordonnées polaires $(R(z), \psi(z))$ définies par $\hat{u}_{1r}(z) = R(z)\cos(\psi(z))$, $\hat{u}_{1i}(z) = R(z)\sin(\psi(z))$ et on trouve que (4.7) se réécrit :

$$R(z) \quad = \quad R_0 \exp\left(\int_0^z q(\psi(z'), \mathbf{m}(z'))dz'\right), \tag{4.13}$$

$$\frac{d\psi(z)}{dz} \quad = \quad h(\psi(z), \mathbf{m}(z)), \tag{4.14}$$

où $q$ et $h$ se mettent sous la forme $q(\psi, \mathbf{m}) = q_0(\psi) + \sigma q_1(\psi, \mathbf{m})$ et $h(\psi, \mathbf{m}) = h_0(\psi) + \sigma h_1(\psi, \mathbf{m})$.

**Exposant presque sûr.** Supposons par exemple que le processus $\mathbf{m}(z)$ est markovien, satisfait l'alternative de Fredholm et admet une unique mesure de probabilité invariante $\pi(d\mathbf{m})$ sur l'espace d'états $M$ sous laquelle il est ergodique. D'après Eq. (4.14) $(\psi, \mathbf{m})$ est un processus de Markov sur l'espace $S^1 \times M$ où $S^1$ est le cercle unité, avec pour générateur : $\mathcal{L} = Q + h(\psi, \mathbf{m})\frac{\partial}{\partial\psi}$ et pour mesure invariante $p(\psi, \mathbf{m})d\psi\pi(d\mathbf{m})$ où $p$ peut être obtenue comme la solution de $\mathcal{L}^* p = 0$. D'après le théorème de Crauel [27] le comportement en temps long de $R(z)$ est caractérisé par l'exposant de Lyapunov $G(\omega)$ donné par :

$$G(\omega) = 2 \int_{S^1 \times M} q(\psi, \mathbf{m}) p(\psi, \mathbf{m}) d\psi \pi(d\mathbf{m}). \tag{4.15}$$

Ce résultat est vrai pour tout $\sigma$ sous différents jeux de conditions sur le processus $\mathbf{m}$ présentés dans [G31]. On suppose ensuite que $\sigma \ll 1$ et on recherche le développement de $G(\omega)$ par rapport à $\sigma \ll 1$. Cette stratégie suit celle développée dans Ref. [10]. On décompose d'abord $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \sigma \mathcal{L}_1$ avec $\mathcal{L}_0 = Q + h_0(\psi)\partial_\psi$ et $\mathcal{L}_1 = h_1(\psi, \mathbf{m})\partial_\psi$. Comme montré dans [10] la densité de probabilité $p$ peut être développée sous la forme $p = p_0 + \sigma p_1 + \sigma^2 p_2 + ...$ où $p_0$, $p_1$, et $p_2$ satisfont $\mathcal{L}_0^* p_0 = 0$ et $\mathcal{L}_0^* p_1 + \mathcal{L}_1^* p_0 = 0$, $\mathcal{L}_0^* p_2 + \mathcal{L}_1^* p_1 = 0$,... Une fois le développement de $p$ connu, on peut le reporter dans (4.15) pour obtenir le développement de $G(\omega)$ à l'ordre 2 en $\sigma$:

$$G(\omega) = 2 \int_{S^1 \times M} \left( q_0 p_0 + \sigma(q_1 p_0 + q_0 p_1) + \sigma^2 (q_1 p_1 + q_0 p_2) \right) (\psi, \mathbf{m}) d\psi \pi(d\mathbf{m}). \tag{4.16}$$

**Fluctuations.** L'exposant de Lyapunov presque sûr $G(\omega)$ est la limite de

$$G(\omega) = 2 \lim_{z \to \infty} \frac{1}{z} \int_0^z q(\psi(z'), \mathbf{m}(z')) dz'$$

avec probabilité 1. On peut alors étudier les fluctuations de ce processus :

$$F(z) := \frac{1}{\sqrt{z}} \int_0^z 2q(\psi(z'), \mathbf{m}(z')) - G(\omega) dz'.$$

Notons $\bar{q}(\psi, \mathbf{m}) := 2q(\psi, \mathbf{m}) - G(\omega)$. Par définition de $G(\omega)$ la variable aléatoire $\bar{q}(\psi, \mathbf{m}(0))$ est centrée par rapport à la mesure invariante $p\pi(d\mathbf{m})d\psi$. Par conséquent l'équation $\mathcal{L}v = \bar{q}$ a une solution $v$ qui est unique à une constante additive près. Notons $v$ la solution qui vérifie $\int vp(\psi, \mathbf{m})\pi(d\mathbf{m})d\psi = 0$. Le processus $M_v$ défini par :

$$M_v(z) := v(\psi(z), \mathbf{m}(z)) - v(\psi, \mathbf{m}(0)) - \int_0^z \mathcal{L}v(\psi(z'), \mathbf{m}(z'))dz'$$

est une martingale [74, Section 1.5]. En appliquant un théorème central limite pour martingale (Théorème 2.1 [12]) on établit que $z^{-1/2} M_v(z)$ converge en loi vers une variable gaussienne centrée de variance :

$$V_\sigma = -2 \int_{S^1 \times M} \bar{q} v p(\psi, \mathbf{m}) d\psi \pi(d\mathbf{m}). \tag{4.17}$$

On peut ensuite calculer le développement de $V_\sigma$ en puissances de $\sigma \ll 1$.

**Exposants moyens.** Le processus $R$ s'exprime en fonction de la martingale $M_v$ sous la forme :

$$R(z)^2 = R_0^2 \exp\left(G(\omega)z - M_v(z) + v(\psi(z), \mathbf{m}(z)) - v(\psi, \mathbf{m}(0))\right), \tag{4.18}$$

ce qui implique que l'exposant de Lyapunov moyen $G_{2n}(\omega)$ s'écrit :

$$G_{2n}(\omega) = G(\omega) + \lim_{z\to\infty} \frac{1}{nz} \ln \mathbb{E}\left[\exp(nM_v(z))\right].$$

Connaissant l'exposant presque sûr $G(\omega)$ et ses fluctuations $M_v$ il reste juste un petit travail technique à réaliser pour obtenir le développement : $G_{2n}(\omega) = G(\omega) + nV_\sigma/2 + O(\sigma^3)$.

## 4.4 Expressions des spectres de gain

On va formuler les résultats principaux dans le cadre simple où les processus $m_\beta$ et $m_\gamma$ sont des bruits blancs indépendants de covariances $\sigma^2\mathbb{E}[m_j(z)m_j(z')] = \sigma_j^2\delta(z-z')$. Les résultats complets avec des processus ergodiques quelconques se trouvent dans [G31]. La fréquence caractéristique $\omega_c^2 = 2\gamma_0 P_0/|\beta_0|$ joue un rôle central.

**Cas homogène.** Si $m_\gamma = m_\beta \equiv 0$, alors [5, Section 5.1] dans le régime de dispersion anormale $\beta_0 > 0$, il n'y a pas d'IM au dessus de la fréquence $\omega_c$. Les fréquences en dessous de $\omega_c$ sont instables et le gain IM correspondant est : $G_{det}(\omega) = 2\beta_0|\omega|\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}$. Le gain IM maximal $G_{det,opt}$ et la fréquence optimale associée $\omega_{det,opt}$ sont par conséquent : $G_{det,opt} = \beta_0\omega_c^2$ et $\omega_{det,opt}^2 = \omega_c^2/2$. Dans le régime de dispersion normale $\beta_0 < 0$, il n'y a pas d'IM : $G_{det} \equiv 0$.

**Régime stable.** On suppose ici que $\beta_0 < 0$ ou bien $\beta_0 > 0$ et $\omega^2 > \omega_c^2$, qui sont les deux régions qui sont stables ($G_{det} \equiv 0$) dans le cadre homogène. Les exposants de Lyapunov presque sûr et moyens admettent des développements par rapport à $\sigma_j$ qui sont de la forme suivante à l'ordre 2 :

$$G(\omega) = \frac{\beta_0^2\omega_c^4\omega^2}{4(\omega_c^2+\omega^2)}\left(\sigma_\gamma^2 + \sigma_\beta^2\right)$$

et les exposants moyens se déduisent simplement par $G_{2n}(\omega) = G(\omega)(1+n)$. L'aléa étend donc le spectre de gain au spectre complet des modulations et augmente le gain maximal. De plus ce phénomène est fluctuant, car $G_{2n} \uparrow$ quand $n \uparrow$. Ceci répond par l'affirmative à la question "l'aléa augmente-t-il l'IM en régime normal de diffusion ?".

**Régime instable.** On suppose ici que $\beta_0 > 0$ et $\omega^2 < \omega_c^2$, qui est la région instable dans le cadre homogène. L'exposant de Lyapunov presque sûr se développe à l'ordre 2 en $\sigma_j$ :

$$G(\omega) = G_{det}(\omega) - \frac{\beta_0^2\omega_c^4\omega^2}{4(\omega_c^2-\omega^2)}\left(\sigma_\gamma^2 + \sigma_\beta^2\right) < G_{det}(\omega).$$

Il apparaît donc que l'aléa réduit l'exposant presque sûr maximal et la fréquence optimale :

$$\begin{aligned} G_{opt} &= G_{det,opt} - \frac{\beta_0^2\omega_c^4}{4}\left(\sigma_\gamma^2 + \sigma_\beta^2\right), \\ \omega_{opt}^2 &= \omega_{det,opt}^2 - \frac{\beta_0\omega_c^4}{4}\left(\sigma_\gamma^2 + \sigma_\beta^2\right). \end{aligned}$$

Ceci répond par la négative à la question “l'aléa augmente-t-il l'IM en régime anormal de diffusion ?”. Cependant les exposants moyens ne se déduisent pas simplement des exposants presque sûrs :

$$
\begin{aligned}
G_{2n}(\omega) &= G(\omega) + n\frac{\beta_0^2\omega^2}{2(\omega_c^2-\omega^2)}\left((\omega_c^2-2\omega^2)^2\sigma_\beta^2+\omega_c^4\sigma_\gamma^2\right),\\
G_{2n,opt} &= G_{det,opt} + \frac{\beta_0^2\omega_c^4}{4}\left((2n-1)\sigma_\gamma^2-\sigma_\beta^2\right),\\
\omega_{2n,opt}^2 &= \omega_{det,opt}^2 + \frac{\beta_0\omega_c^4}{4}\left((2n-1)\sigma_\gamma^2-\sigma_\beta^2\right).
\end{aligned}
$$

Ces expressions montrent que la réduction du gain maximal est un phénomène très fluctuant, car en fait, si on prend un exposant moyen d'ordre $n$ suffisamment élevé, alors on trouve que le gain maximal correspondant est augmenté par l'aléa.

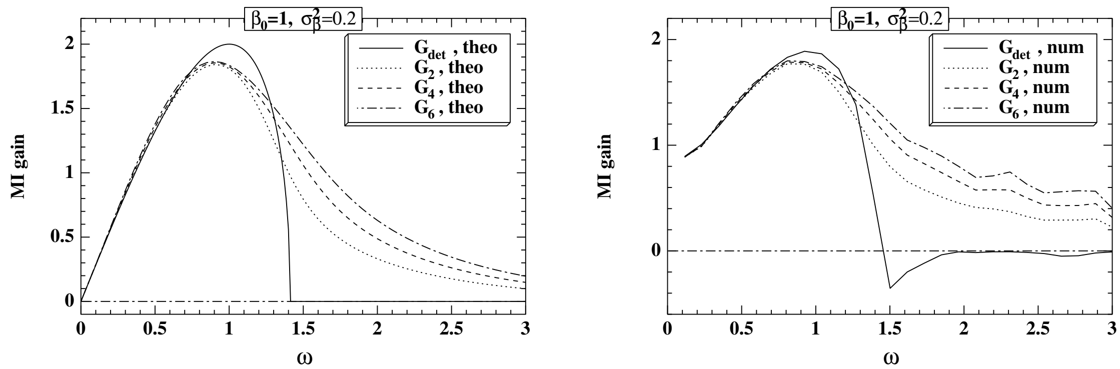


Figure 4.1: *Gains moyens pour $\beta_0 = 1$, $\gamma_0 = 1$, $P_0 = 1$, un coefficient non-linéaire homogène $m_\gamma \equiv 0$ et un coefficient de DVG tel que $\sigma_\beta^2 = 0.2$. Le trait plein correspond au cas homogène, et les pointillés aux gains moyens $G_{2n}$ dans le cas aléatoire. La figure de gauche correspond aux formules théoriques des développements. La figure de droite correspond à des simulations numériques de l'équation de Schrödinger; le processus $m_\gamma$ est constant sur des intervalles de longueur $l = 0.2$ et prend pour valeurs $-1$ et $+1$ avec equiprobabilité; les résultats affichés correspondent à une moyennisation sur 100 simulations.*

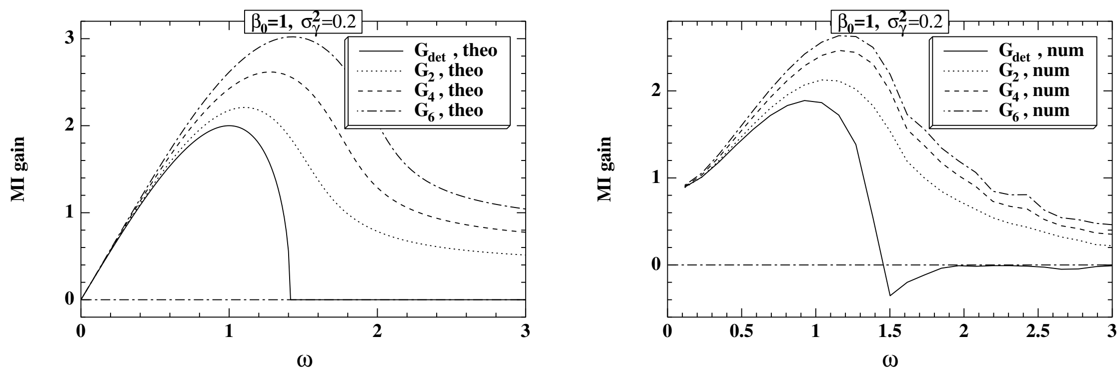


Figure 4.2: *Gains moyens pour $\beta_0 = 1$, $\gamma_0 = 1$, $P_0 = 1$, un coefficient de DVG homogène $m_\beta \equiv 0$ et un coefficient non-linéaire tel que $\sigma_\gamma^2 = 0.2$. Mêmes conventions que dans la figure 4.1.*

Regardons par exemple le cas de fluctuations de DVG pures, où $m_\beta$ est un bruit blanc et $m_\gamma \equiv 0$. Le gain presque sûr maximal est réduit exactement de la même quantité que le gain moyen maximal d'ordre $n$, quel que soit $n$ (figure 4.1). Par contre, dans le cas de fluctuations de la non-linéarité pures, où $m_\gamma$ est un bruit blanc et $m_\beta \equiv 0$, alors le gain presque sûr maximal est *diminué* d'une certaine quantité : $G_{opt} = G_{det,opt} - \sigma_\gamma^2 \beta_0^2 \omega_c^4/4$, alors que le gain moyen d'ordre 2 maximal est lui *augmenté* de la même quantité : $G_{2,opt} = G_{det,opt} + \sigma_\gamma^2 \beta_0^2 \omega_c^4/4$; de manière plus générale, $G_{2n,opt} = G_{det,opt} + (2n-1)\sigma_\gamma^2 \beta_0^2 \omega_c^4/4$ (figure 4.2).

**Extensions.** En réalité on ne peut pas se contenter d'une équation scalaire pour modéliser la propagation d'une onde dans une fibre optique car on néglige alors tous les effets de polarisation. L'évolution des deux composantes d'un champ dans une fibre biréfringente est gouvernée par une équation de Schrödinger Non-Linéaire vectorielle du type [5] :

$$iu_z + i\Delta(z)u_t + \beta(z)u_{tt} + \left(\gamma(z)|u|^2 + \alpha(z)|v|^2\right)u = 0, \tag{4.19}$$

$$iv_z - i\Delta(z)v_t + \beta(z)v_{tt} + \left(\gamma(z)|v|^2 + \alpha(z)|u|^2\right)v = 0. \tag{4.20}$$

Par rapport au cas scalaire, deux nouvelles sources potentielles d'aléa apparaissent : la différence de vitesse de groupe $\Delta(z)$ entre les deux modes (polarisations) et le coefficient de couplage non-linéaire $\alpha(z)$ entre les modes. Les techniques utilisées sont essentiellement les mêmes que dans le cas scalaire, et on renvoie à [G13] et [G28] pour des premiers résultats. Il reste encore tout un travail d'optimisation à effectuer avec des expérimentateurs en vue de déterminer les configurations les moins sensibles aux perturbations.

# Chapitre 5

# Propagation de faisceaux laser partiellement cohérents

## 5.1 Le lissage optique pour les chaînes laser de puissance

On développe dans cette partie une approche statistique d'un problème dont l'intérêt s'est brutalement accru depuis la fin des essais nucléaires réels. Dorénavant, ces essais seront remplacés d'une part par des simulations numériques et d'autre part par des expériences de fusion en laboratoire. La Fusion par Confinement Inertiel consiste à déclencher la fusion thermonucléaire d'une petite capsule contenant un mélange de deutérium et de tritium par irradiation par un ensemble de lasers de puissance. Le principe est le suivant : On irradie de toutes parts une cible sphérique de quelques centaines de microns de rayon par des impulsions laser dont la durée est de quelques nanosecondes. La cible implose, s'échauffe et la réaction de fusion s'amorce.

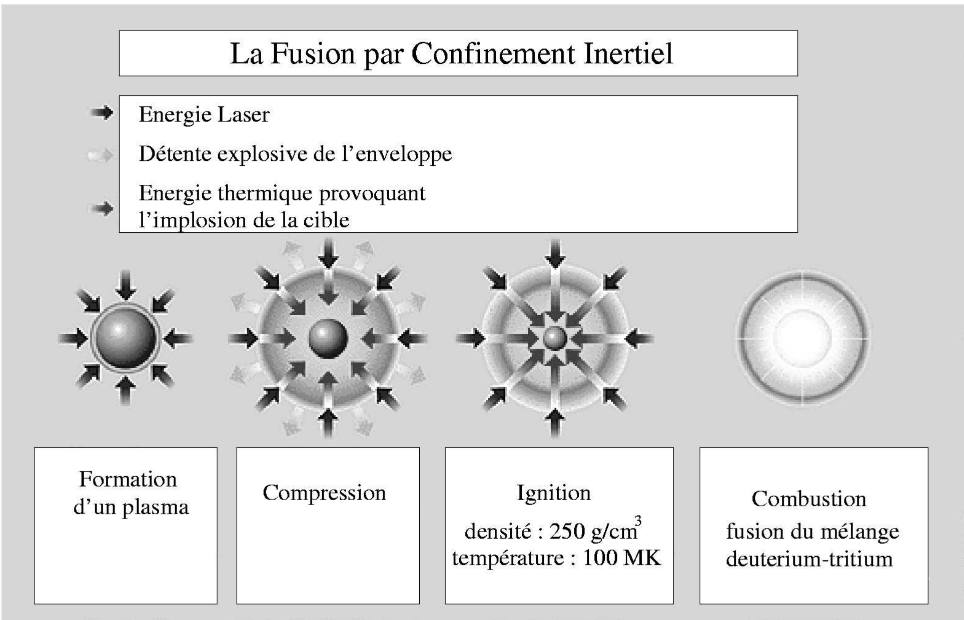


Figure 5.1: *Principe de la fusion par confinement inertiel.*

Pour atteindre les conditions de température et de pression nécessaires il faut beaucoup d'énergie laser (200 faisceaux de 10 kJ chacun sont prévus pour le Laser MégaJoule en construction à Bordeaux). Chaque faisceau est produit par un oscillateur, puis est véhiculé dans des amplificateurs (barreaux de verre dopés au néodyme). Pour que l'intensité lumineuse qui croît à de très hautes valeurs ne provoque pas de dommages aux amplificateurs, on étale progressivement les faisceaux au long de la chaîne d'amplification, si bien qu'en fin de chaîne ils font plusieurs dizaines de centimètres de diamètre. Les seuls amplificateurs connus pouvant être produits dans de telles dimensions sont les verres dopés aux terres rares. Leur inconvénient est qu'ils amplifient dans le proche Infra-Rouge (longueur d'onde $800 - 1000$nm) alors qu'il est nécessaire d'irradier la cible dans l'Ultra-Violet (longueur d'onde $< 400$nm) pour obtenir un bon échange d'énergie entre le laser et le plasma. Par conséquent on place un système convertisseur de fréquence entre les derniers amplificateurs et la grande lentille de focalisation qui projette le faisceau sur la cible. Le système convertisseur de fréquence se compose de cristaux non-linéaires de type KDP susceptibles de doubler puis de tripler la fréquence de l'onde qui les traversent, sous réserve que certaines conditions d'accord de phase soient remplies.

Les opticiens désirent propager dans la chaîne d'amplification un faisceau aussi uniforme que possible, c'est-à-dire une onde quasi-plane avec un profil spatial carré, afin de remplir la section des barreaux amplificateurs et d'en tirer le maximum d'énergie. Les expérimentateurs en interaction laser-matière demandent aux opticiens qu'ils leur fournissent une irradiation uniforme de la cible afin de provoquer son implosion. En effet, un défaut dans l'uniformité de l'irradiation va entraîner une altération de la forme sphérique de la cible, et finalement sa rupture et sa destruction, au lieu de l'implosion attendue. Or, pour un faisceau mono-mode spatial, l'exigence d'un faisceau uniforme dans la chaîne d'amplification d'une part et l'exigence d'une irradiation uniforme de la cible d'autre part sont incompatibles, car les champs proches et lointains sont reliés par une transformée de Fourier. Une onde plane laser à profil spatial carré correspond donc à une tache d'Airy (en sinus cardinal) sur la cible. Détruire la cohérence du faisceau est une solution pour rendre indépendantes et donc compatibles ces exigences.

Enfin, des instabilités du plasma, qu'on ne manquera pas de générer avec les puissances envisagées, sont très sensibles aux modulations spatiales du rayonnement. Ces arguments justifient l'implantation sur les installations laser de puissance de dispositifs permettant le lissage optique du faisceau. L'objectif du lissage optique est d'irradier une cible le plus uniformément possible, c'est-à-dire de déposer sur un petit élément de surface de quelques dizaines de microns de diamètre de l'énergie laser avec une fluence (i.e. une densité surfacique d'énergie) aussi constante que possible. Il s'agit d'obtenir une empreinte intégrée sur la cible la plus uniforme possible, où l'intégration temporelle s'entend sur le temps caractéristique de réponse du plasma. Pour cela, le concept de base est d'irradier la cible avec une intensité qui fluctue spatialement et temporellement de manière incohérente, avec un temps de cohérence le plus petit possible. Ainsi, l'intensité intégrée en temps sera la somme de plusieurs composantes indépendantes, et tendra vers un profil plat.

A partir de cette idée générale, plusieurs procédés ont été développés pour irradier une cible avec des faisceaux lumineux intenses et incohérents. Le lissage comprend trois phases, à savoir la création d'une source étendue, la génération d'un spectre large et le codage spatio-temporel. Ces trois opérations peuvent être effectuées de manière indépendante, soit au début de la chaîne laser au niveau des oscillateurs, soit à la fin de la chaîne laser au niveau de la focalisation sur cible. Nous mentionnons ici les trois principales méthodes qui permettent d'aboutir au lissage sur les lasers de puissance.

• Dans la première, tout se passe directement en début de chaîne, le faisceau est ensuite véhiculé, amplifié et converti en fréquence. Le faisceau est ensuite focalisé sur la cible. C'est la méthode la plus simple à implanter, car en début de chaîne le faisceau a un petit diamètre et une faible fluence. C'est la méthode utilisée sur le Laser Phebus du CEA, avec un oscillateur à spectre large couplé à une fibre optique multi-modes.

• La deuxième approche consiste à démarrer avec un laser incohérent temporellement ou avec un laser parfaitement cohérent dont on élargit le spectre en début de chaîne. C'est seulement dans le dernier parcours optique, juste avant la focalisation, qu'on étale la source et qu'on disperse le spectre. Cette méthode a été testée au Lawrence Livermore National Laboratory, la source étendue étant obtenue au moyen d'une lame de phase aléatoire et la dispersion au moyen de réseaux.

• Le dernier procédé reste théorique, car aucune implantation expérimentale n'a pu être mise au

point. Il consisterait à produire le lissage dans le dernier étage de propagation, ou sur la cible elle-même. Ceci serait particulièrement intéressant dans la mesure où la chaîne d'amplification fonctionnerait alors selon son mode normal sans être affecté par le lissage.
Les points communs des deux premières méthodes sont la propagation, l'amplification et la conversion de fréquence d'impulsions à spectre large, temporellement incohérentes pour la deuxième technique, temporellement et spatialement incohérentes pour la première. Un point délicat de ces méthodes est lié à la sensibilité des effets non-linéaires à de telles impulsions incohérentes. En particulier, il a été mis en évidence expérimentalement une limitation de l'énergie de sortie du laser à une valeur inférieure à la valeur nominale d'un faisceau standard [110].

On a développé une approche statistique du lissage optique qui permet d'obtenir des informations sur les quantités moyennes (intensité moyenne, contraste, spectre spatial de puissance) pour la distribution instantanée et pour la distribution intégrée de l'intensité lumineuse. On a aussi étudié la statistique des points les plus chauds du faisceau (statistique des valeurs extrêmes) et la dynamique de ces points. La propagation, l'amplification et la conversion de fréquence de faisceaux partiellement cohérents sont les problèmes qui nous ont pris le plus de temps. En effet des mécanismes complexes entrent en jeu. Ainsi la propagation de faisceaux lumineux intenses résulte d'une compétition entre les effets non-linéaires d'une part et la diffraction transverse et la dispersion de la vitesse de groupe de l'onde électromagnétique d'autre part. En l'absence de dispersion, l'autofocalisation transverse d'une impulsion laser se développe lorsque les effets de compression non-linéaire dominent les effets naturels et linéaires de la diffraction. Lorsque ce mécanisme conduit à un rétrécissement global du rayon du faisceau, jusqu'à atteindre une quasi-singularité, on parle d'autofocalisation catastrophique. Mais cette dynamique peut aussi conduire à la génération locale de pics d'intensités très élevées; on parle alors de filamentation. C'est en particulier le cas pour des faisceaux présentant initialement des fluctuations d'amplitudes importantes. Pour ce qui est de la conversion de fréquence, les conditions d'accord de phase qui assurent un bon rendement de conversion sont très strictes et ne sont pas compatibles avec une largeur de bande importante de l'impulsion. En particulier les vitesses de groupe sont différentes pour les ondes fondamentales et l'onde harmonique, ce qui tend à séparer temporellement les impulsions et à limiter la bande spectrale d'accord de phase. D'autres mécanismes interviennent (double réfraction, dispersion de vitesse de groupe, diffraction), si bien qu'il reste un gros travail à faire pour quantifier et prévoir les rendements de conversion.

## 5.2 Etude statistique des méthodes de lissage optique

Afin d'obtenir une irradiation de la cible uniforme, différentes techniques de lissage optique sont envisagées : Induced Spatial Incoherence with echelons [76], Smoothing by Spectral Dispersion (SSD) and random phase plate [106], Smoothing by multimode Optical Fiber (SOF) [109]. On a passé en revue les avantages et inconvénients de ces méthodes. Toutes ces techniques cherchent à générer un laser dont l'intensité fluctue de manière rapide et incohérente avec le temps. L'intensité intégrée en temps est alors la somme de plusieurs composantes indépendantes, et tend ainsi vers un profil plat (loi des grands nombres). Plus exactement, le contraste (rapport de la déviation standard sur la valeur moyenne) d'une figure intégrée en temps est imposé par le nombre de figures indépendantes générées sur l'intervalle de temps considéré. Si on intègre sur un temps $N$ fois plus grand que le temps de cohérence, le contraste de la figure intégrée sera $\sqrt{N}$ fois plus petit que le contraste de la figure instantanée. Indépendamment de la méthode, si on arrive à générer un faisceau de largeur spectrale $\Delta\nu$, le temps de cohérence sera plus grand que $1/\Delta\nu$, et donc la réduction maximale du contraste sera de $\sqrt{\Delta\nu T}$. Le temps d'intégration $T$ étant fixé par les contraintes physiques, une méthode de lissage optimale sera celle qui, pour un même élargissement spectral, réalise cette réduction maximale théorique.

**Qu'est-ce qu'une figure de speckle ?** Toutes les méthodes de lissage optique conduisent à mettre le champ dans le plan de la cible sous la forme d'une superposition de champs élémentaires :

$$E(t,\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} E_j(t,\mathbf{x}), \tag{5.1}$$

où les champs $E_j$ sont statistiquement indépendants et centrés (i.e. de moyenne statistique nulle), et le nombre de ces champs $N$ est grand. Dans l'asymptotique $N \to \infty$, on trouve par le théorème central limite que le champ $E$ est un processus gaussien centré. En particulier, en un point $(t,\mathbf{x})$ fixé, les parties réelle et imaginaire du champ sont indépendantes et identiquement distribuées et suivent une loi normale. En conséquence, l'intensité du champ suit une loi exponentielle et la phase du champ suit une loi uniforme sur $[0,2\pi]$. Le contraste instantané d'une telle figure est 1. Le contraste de la figure intégrée dépend lui du temps de cohérence de l'intensité totale $|E|^2$.

**Deux méthodes de lissage.** Bien que les études aient portées sur des cas plus généraux, on ne va ici présenter sommairement que deux méthodes de lissage qui présentent des avantages et des inconvénients propres.
- Le lissage par dispersion spectrale (SSD). Une source monochromatique est élargie spectralement par un modulateur de phase (disons sinusoïdal de fréquence $\nu_1$ et de profondeur $\beta$). Cette source est injectée dans la chaîne. En fin de chaîne le faisceau est dispersé sur une lame de phase aléatoire par un réseau imposant un temps de retard $T_d$. La lame est constituée de petits carrés qui imposent un déphasage de 0 ou $\pi$ avec probabilité 1/2. Les faisceaux élémentaires issus de ces petits carrés sont enfin focalisés sur la cible, où ils interfèrent et forment une figure de speckle fluctuant avec le temps.
- Le lissage par fibre optique (SOF). Une source à spectre large éclaire une longue fibre optique multi-modes. De nombreux modes sont excités et ceux-ci se propagent à des vitesses différentes. On note $T_d$ le temps de retard entre les modes extrêmes en sortie de fibre. De plus les imperfections de la fibre impriment des défauts de phase aléatoires sur chaque mode qui se cumulent, si bien qu'après une distance de propagation suffisamment grande, ces phases peuvent être considérées comme indépendantes et uniformément distribuées sur $[0,2\pi]$ (voir [G3]). En sortie de fibre, les modes interfèrent et leur superposition produit une figure de speckle fluctuant avec le temps qui est injectée dans la chaîne.

**Justification de l'analyse statistique.** Il s'agit de prouver que le calcul des probabilités permet de mener une étude efficace des différentes méthodes de lissage. En effet, d'un point de vue pratique, on étudie la répartition de l'intensité sur une certaine surface $\Sigma$ : $(I(t,x))_{x\in\Sigma}$. Pour cela on introduit la mesure empirique $\mu$ sur $\Sigma$, qui à toute fonctionnelle de l'intensité $f(I)$ associe la moyenne spatiale $\frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma f(I)(x)dx$. Ce sont des informations sur la mesure empirique $\mu$ qui nous intéressent, pour une réalisation de la figure (celle qui est expérimentalement observée).

D'un point de vue théorique, on va effectuer des calculs statistiques en un point choisi de la surface $\Sigma$ sur plusieurs réalisations de la figure, correspondant à autant de réalisations possibles des dispositifs expérimentaux. L'aléa se situe au niveau des fluctuations du rayon de la fibre et de l'indice de réfraction à l'intérieur de celle-ci dans le cas du SOF, et au niveau des déphasages apportés par les éléments de la lame de phase dans le cas du SSD. L'étude statistique consiste à calculer des moyennes sur plusieurs réalisations de la figure. On peut alors regarder la loi de l'intensité en un point $x$ à l'instant $t$ : $P(I(t,x) \in [a,b])$. Sous une hypothèse d'ergodicité spatiale, les mesures empirique $\mu$ et statistique $P$ sont équivalentes pour une surface $\Sigma$ adéquate (i. e. où le champ mesuré est macroscopiquement similaire, mais microscopiquement fluctuant).

$$\mu\left(\mathbb{1}_{I(t,.)\in[a,b]}\right) = P(I(t,x) \in [a,b]). \tag{5.2}$$

*Il est équivalent de faire une moyenne statistique sur toutes les réalisations en un point $x$ fixé et une moyenne spatiale sur $x \in \Sigma$ pour une réalisation donnée.* En résumé : On fait des calculs sur $P$. On fait des mesures sur $\mu$. Les résultats coïncident par ergodicité spatiale.

**Résultats obtenus.** Grâce à notre approche statistique du lissage optique, nous avons obtenu des expressions explicites pour les contrastes et les spectres spatiaux des distributions d'intensité intégrées en temps pour les différentes techniques de lissage [G4]. Comme application on a en particulier montré que le SOF et le SSD présentaient des avantages et des inconvénients spécifiques. Du pur point de vue du lissage, le SOF est plus efficace. En effet, pour toutes les méthodes, la fréquence spatiale de coupure (en dessous de laquelle les fréquences spatiales ne sont plus lissées, c'est-à-dire que des modulations d'intensité à ces fréquences ne sont pas supprimées) est inversement proportionnelle au temps de retard du dispositif dispersif. Or le temps de retard induit par la fibre est de l'ordre de la nanoseconde, alors que celui induit par un réseau est de l'ordre de 10 picosecondes. On comprend donc pourquoi la fréquence de coupure est nettement plus basse pour le SOF que pour le SSD. De plus, le lissage par SSD présente des phénomènes de résonance qui se traduisent par un mauvais lissage de certaines fréquences spatiales pourtant situées au delà de la fréquence de coupure (voir la figure de gauche de la Figure 5.2), alors que le lissage par SOF lisse de manière équitable toutes les fréquences spatiales. Cependant, le SOF entraîne des modulations d'intensité dans la chaîne ce qui laisse craindre des complications pour l'amplification et la conversion de fréquence du faisceau. Les chaînes d'amplification laser ne peuvent en effet fournir leur rendement optimal que pour des faisceaux monochromatiques plans ou quasi-plans, et toute fluctuation autour de cette situation idéale peut entraîner des diminutions de rendement.

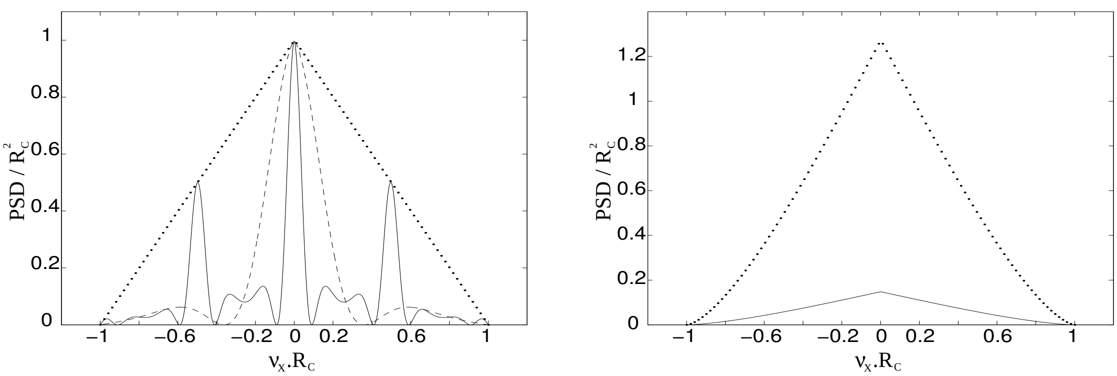


Figure 5.2: *Densité de puissance spectrale (= spectre spatial) de la distribution spatiale d'intensité. Figure de gauche : SSD pour deux fréquences de modulation différentes. Les pointillés représentent la densité de la figure instantanée. Les densités des figures lissées sont dessinées en traits hachurés dans le cas $T_d\nu = 0.5$ et en traits pleins dans le cas $T_d\nu = 2$. La profondeur de modulation est $\beta = 5$. Figure de droite : SOF avec un modulateur de phase sinusoïdal de profondeur 10. Les traits pointillés (resp. pleins) représentent la densité de la figure instantanée (resp. intégrée).*

## 5.3 Propagation linéaire de faisceaux partiellement cohérents

Avant de se pencher sur le problème de la propagation non-linéaire nous avons examiné le cas plus simple mais pourtant intéressant de la propagation linéaire de faisceaux partiellement cohérents à statistique gaussienne [G34]. Le champ $E_0$ dans le plan initial $z = 0$ est supposé être à statistique gaussienne, de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation :

$$\left\langle E_0(\mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}) E_0^*(\mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}) \right\rangle = g\left(\frac{\mathbf{r}}{r_0}\right) f\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho_0}\right).$$

La fonction $g$ décrit l'enveloppe lentement variable du champ, de rayon $r_0$. La fonction $f$ est la fonction d'autocorrélation locale, de largeur $\rho_0$. Jusqu'à présent seules les études du modèle dit de Gauss-Schell, pour lesquels $f$ et $g$ sont de formes gaussiennes, ont donné des résultats exploitables, et ceci dans le cadre de l'approximation paraxiale [39, 47]. On peut trouver quelques extensions de ces travaux mais seulement pour des modèles très proches [105, 48, 49]. Nous avons étudié la propagation du champ $E_0$ selon l'équation de Helmholtz ou l'équation de Schrödinger linéaire dans le cadre asymptotique $\rho_0 \ll r_0$, sans rien supposer sur la forme des fonctions $f$ et $g$, si ce n'est qu'elles appartiennent à $L^1 \cap L^2$. Deux approches différentes et complémentaires sont développées, la première est basée sur la résolution de l'équation d'évolution de la fonction d'autocorrélation, ou de manière équivalente la fonction de Wigner associée, la seconde sur l'étude de la propagation découplée des modes élémentaires qui composent la source $E_0$. On a ainsi obtenu des résultats précis sur les quantités macroscopiques et microscopiques qui caractérisent le faisceau, à savoir d'une part la forme de l'enveloppe d'intensité et la distance de Rayleigh, et d'autre part la forme moyenne des grains et le rayon de corrélation. On a en particulier appliqué cette théorie pour déterminer de manière exacte la forme hors plan focal de la tache générée par une lame de phase de phase aléatoire utilisée pour certaines méthodes de lissage optique (SSD).

Dans le cadre simple de l'approximation paraxiale, valable si $k_0\rho_0 \gg 1$, où $k_0$ est le nombre d'onde principal de la source, on a montré que la fonction d'autocorrélation tri-dimensionnelle du champ est :

$$\left\langle E(z + \frac{\zeta}{2}, \mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}) E^*(z - \frac{\zeta}{2}, \mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}) \right\rangle = \exp(ik_0\zeta) \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{\mathbf{r}}{r_0} - \mathbf{u}\frac{z}{z_0}\right) \hat{f}(\mathbf{u}) \exp i\left(\frac{\mathbf{u}.\boldsymbol{\rho}}{\rho_0} - \frac{|\mathbf{u}|^2\zeta}{4\zeta_0}\right) d^2\mathbf{u},$$

où $\zeta_0 = k_0\rho_0^2/2$, $z_0 = k_0\rho_0 r_0$ et $\hat{f}$ est la transformée de Fourier inverse de $f$. La propagation d'une figure de speckle telle que $E_0$ avec un rayon global $r_0$ et un rayon de corrélation $\rho_0 \ll r_0$ peut être décrite par les deux distances caractéristiques $\zeta_0$ et $z_0$.
- $\zeta_0$ est la taille des grains dans la direction $z$, mais la statistique microscopique de la figure (et en particulier la taille des grains) ainsi que l'enveloppe globale du faisceau (et en particulier le rayon global du faisceau) ne sont pas modifiées pour des distances de propagation de l'ordre de $\zeta_0$.
- La statistique de la figure et l'enveloppe globale du faisceau ne sont affectées que pour des distances de propagation de l'ordre de $z_0$. On a mis en évidence que l'enveloppe macroscopique du faisceau après une distance de propagation $z$ est donnée par la convolution de l'enveloppe initiale avec une forme renormalisée (dépendant de $z$) de la transformée de Fourier inverse de la fonction d'autocorrélation locale :

$$\langle |E|^2(z, \mathbf{r}) \rangle = g * \hat{f}_{z/z_0}\left(\frac{\mathbf{r}}{r_0}\right), \qquad \hat{f}_{\bar{z}}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\bar{z}^2}\hat{f}\left(\frac{\bar{\mathbf{r}}}{\bar{z}}\right). \tag{5.3}$$

De même, la forme typique des points chauds, qui est imposée par la fonction d'autocorrélation locale [4], est donnée par la convolution de la forme initiale avec la transformée de Fourier inverse de l'enveloppe macroscopique.

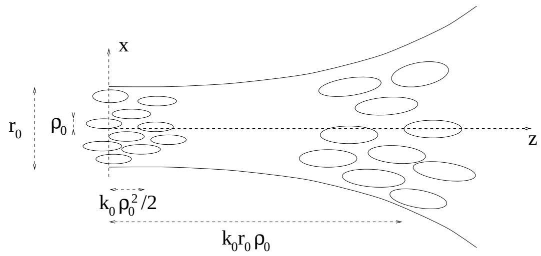


Figure 5.3: *Grandeurs caractéristiques relatives à la propagation d'un faisceau partiellement cohérent (vue d'artiste). Les "ellipses" représentent les zones de forte intensité ou points chauds.*

## 5.4 Statistique des points chauds

Il convient d'étudier les points chauds du faisceau lors de la propagation dans la chaîne laser, car ils pourraient éventuellement provoquer des dommages aux composants optiques de la chaîne. D'autre part, certains phénomènes fortement non-linéaires, telle la diffusion Brillouin ou Raman, sont susceptibles de se développer dans les points chauds de la tache focale. Afin de prédire avec une suffisante précision le développement de ces instabilités paramétriques à l'aide de codes numériques modélisant l'interaction laser-plasma, il faut au préalable avoir une bonne idée de la statistique des points chauds. Cette étude a donné des résultats qui ont pu être vérifiés sur des simulations numériques. On a d'abord étudié la statistique générale des maxima locaux d'une figure de speckle [G10]. On a révisé les résultats de Rose et DuBois [99] en montrant que leur théorie sous-estime légèrement le nombre des points les plus chauds. Les résultats principaux sont les suivants.
*1.* Dans le plan focal, le nombre de points chauds au dessus de l'intensité $I$ est proportionnel à $(I/I_0)\exp(-I/I_0)$ :

$$\langle M_I \rangle = \frac{4|S||\det\Lambda|^{\frac{1}{2}}}{\pi^2 I_0}\left((\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4})\frac{I}{I_0}+\frac{1}{2}\right)\exp\left(-\frac{I}{I_0}\right), \tag{5.4}$$

où $S$ est la surface de référence, $I_0$ l'intensité optique moyenne, et $\Lambda$ est la matrice des moments spectraux d'ordre deux, dont le déterminant est proportionnel à la surface moyenne d'un grain de speckle :

$$\Lambda_{ij} = -\left.\frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=0}, \tag{5.5}$$

où $C(\mathbf{x}) := \langle E(.)E^*(.+\mathbf{x})\rangle$ est la fonction d'autocorrélation du champ.
*2.* Dans le volume focal, le nombre de points chauds au dessus de l'intensité $I$ est proportionnel à $(I/I_0)^{3/2}\exp(-I/I_0)$:

$$\langle M_I \rangle = \frac{20|V||\det\Lambda|^{\frac{1}{2}}}{3\pi^{\frac{5}{2}} I_0^{\frac{3}{2}}}\left((\frac{I}{I_0})^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{10}(\frac{I}{I_0})^{\frac{1}{2}}\right)\exp\left(-\frac{I}{I_0}\right), \tag{5.6}$$

où $V$ est le volume de référence et $\Lambda$ est la matrice des moments spectraux d'ordre deux, dont le déterminant est proportionnel au volume moyen d'un grain de speckle.

On a ensuite étudié plus spécifiquement le point le plus chaud du profil d'intensité [G11]. On a pu mettre en évidence qu'il existait un paramètre important, proportionnel au rapport du volume spatio-temporel de l'impulsion globale sur le volume moyen d'un grain de speckle, et que l'intensité maximale d'une impulsion variait au premier ordre comme le logarithme de ce rapport. On étudie aussi dans l'article [G11] l'influence des différentes méthodes de lissage sur la statistique du point le plus chaud du volume focal.

Enfin on a développé (avec L. Videau du CEA) un modèle statistique permettant de décrire le mouvement des points chauds dans le volume focal. Ce mouvement dépend de la méthode de lissage retenu, et on peut le caractériser à l'aide de deux paramètres qui sont la vitesse des grains et leur temps de vie. Ce dernier est en général plus long que le temps de cohérence du laser (inverse de la largeur spectrale), ce qui pourrait avoir d'importantes répercussions sur les taux de rétrodiffusion Brillouin et Raman. Des analyses précises du lissage SSD-1D (Smoothing by Spectral Dispersion uni-dimensionnel), du lissage par chromatisme latéral et du lissage par fibre optique ont donné des résultats précis sur ces différentes quantités [G12].

## 5.5 Propagation non-linéaire et amplification d'impulsions partiellement cohérentes

**Modèle.** Nous avons considéré la propagation d'une impulsion à spectre large (nombre d'onde central $k_0$) à travers un milieu non-linéaire avec gain. Dans le cadre de l'approximation paraxiale, l'enveloppe lentement variable $A$ du champ électrique et la polarisation $P$ vérifient les équations couplées [104] :

$$i\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2k_0}\Delta_r A - \sigma\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{k_2}{2}|A|^2 A = \frac{P}{2}, \tag{5.7}$$

$$T_2\frac{\partial P}{\partial t} + P = i\gamma A, \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\gamma}{T_\gamma} = \frac{i}{2f_s}(A^*P - AP^*), \tag{5.9}$$

avec des conditions initiales du type : $\left\{\begin{array}{l}\text{gain } \gamma(r,t=0)=\gamma_0 \text{ uniforme,}\\ A(z=0,r,t)=A_0(r,t),\end{array}\right.$ où $A_0(r,t)$ est un champ partiellement cohérent à statistique gaussienne. $\gamma$ est le gain à faible signal, relié à l'inversion de population du milieu. $T_\gamma$ est la durée de vie du niveau d'énergie supérieur et $f_s$ la fluence de saturation. $1/T_2$ la largeur de la courbe de gain. Dans le cas d'un milieu sans gain, le problème se réduit à l'étude de l'équation (5.7) avec un second membre nul. $z$ est l'axe de propagation du faisceau et $\Delta_r$ le Laplacien orthogonal $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. On note $r$ le vecteur $(x, y)$ et $\tau$ le temps local, i.e. le temps dans le repère qui se déplace à la vitesse de groupe. Le coefficient de dispersion de la vitesse de groupe $\sigma$ est relié au facteur de dispersion $\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\mid_{\omega_0}$ par : $\sigma := -k''(\omega_0)/2$. Les milieux que l'on considère ont une dispersion dite normale, c'est-à-dire que $\sigma < 0$. Le coefficient non-linéaire est $k_2 = k_0 n_{2E}/n_0$, où $n_0$ est l'indice de réfraction linéaire et $n_{2E}$ est le coefficient de Kerr optique qui caractérise la réponse du milieu à l'amplitude de l'onde. Notez que l'intensité laser est proportionnelle à l'intensité du champ scalaire : $I_{\rm laser} = \epsilon c|A|^2/2$ et que le coefficient usuel $n_2$ est simplement lié à $n_{2E}$ par la formule $n_{2E}|A|^2/2 = n_2 I_{\rm laser}$.

Nous avons étudié la propagation à travers un tel milieu d'un faisceau incohérent localement stationnaire. Comme valeurs numériques des différents paramètres qui interviennent, nous avons choisi celles qui correspondent le mieux aux conditions expérimentales des chaînes laser de la classe MégaJoule. Ainsi nous avons supposé que le champ incident admet une enveloppe spatiale et temporelle déterministes, dont le rayon spatial est de l'ordre de 10 à 20 cm, et la durée d'impulsion est de l'ordre de la nanoseconde. Le champ incident est en outre modulé de manière aléatoire dans les domaines spatial et temporel, de rayon de corrélation de l'ordre de quelques millimètres et de temps de cohérence de l'ordre de la picoseconde. D'un point de vue statistique, nous avons considéré que ces fluctuations obéissent à des lois gaussiennes. En effet, nos premiers travaux ont prouvé que cette description statistique est conforme aux conditions expérimentales correspondant aux techniques possibles de lissage optique [G4].

**Résultats obtenus.** Nous avons tout d'abord cherché à étudier les effets de l'incohérence temporelle et considéré la situation simple où le faisceau est mono-mode spatialement. Il a alors été mis en évidence, d'un point de vue théorique, une saturation anormale de l'intensité qui avait déjà été observée expérimentalement. Cette saturation est essentiellement due à l'automodulation de phase qui génère de nouvelles longueurs d'ondes hors de la courbe de gain [G5]. Nous nous sommes ensuite attaqué au problème complet, à savoir l'étude de la compétition entre l'incohérence temporelle et spatiale et les différents phénomènes non-linéaires possibles. Des mécanismes complexes interviennent, telle la saturation du gain qui écrête les points chauds du faisceau alors que l'effet Kerr tend à augmenter l'intensité de ces mêmes points chauds par filamentation. Il se dégage cependant une image assez claire des conséquences possibles sur le rendement d'amplification. L'incohérence spatiale a en fait peu d'influence, car la taille des grains dans les amplificateurs est trop grande pour entraîner des conséquences notables [G7].

**Conclusions des travaux.** Nous avons passé en revue plusieurs problèmes liés à la propagation et à l'amplification non-linéaire d'impulsions incohérentes. Il est apparu comme un fait général que la compétition entre la non-linéarité et l'aléatoire entraîne une augmentation des différents phénomènes de saturation. Ceci est essentiellement dû la relation de base $\langle I^2 \rangle = 2 \langle I \rangle^2$ qui est vérifiée par des faisceaux à statistique gaussienne. Nous avons ainsi mis en évidence qu'il existait plusieurs mécanismes non-linéaires susceptibles d'entraîner une dégradation du rendement d'amplification. Cependant, à la vue des données numériques réalistes correspondant à une configuration du type de celle du futur Laser MégaJoule, on peut affirmer qu'il n'y a pas de diminution du rendement d'amplification significative à attendre dû à l'incohérence de l'impulsion, pourvu que les enveloppes moyennes, en temps et en espace, correspondent à la situation de référence par rapport à laquelle on compare les rendements. Ces constatations ont pu être vérifiées expérimentalement. En effet, dans [G23] il est rapporté une série d'expériences sur le Laser Phebus dans lesquelles des impulsions lissées par la technique de la fibre optique sont amplifiées à un rendement quasi-optimal.

Il apparaît donc que l'incohérence spatiale et temporelle n'entraîne qu'une réduction marginale ($<$ 10% pour une largeur de bande inférieure à 1.5 nm, et $<$ 5% pour une largeur de bande inférieure à 1.0 nm) pourvu qu'on reste dans le cadre d'un nombre de modes spatiaux et temporels tels que ceux envisagés aujourd'hui. Mais il est possible que les problèmes soient d'un tout autre ordre en ce qui concerne la conversion de fréquence. De nombreux phénomènes originaux sont apparus lors de l'étude de l'amplification d'impulsions incohérentes et ont montré combien peuvent être importants la compétition entre les effets dus à l'incohérence et des mécanismes non-linéaires. On peut s'attendre à un nombre équivalent de surprises lorsqu'on s'attaquera à l'étude du doublement et du triplement de fréquences de faisceaux lissés.

## 5.6 Conversion de fréquence d'impulsions partiellement cohérentes

**Dérivation des équation de conversion de fréquence pour des impulsions à spectre large.** Les deux articles [G32] et [G33] apportent une contribution théorique essentielle au problème de la conversion de fréquence d'impulsions partiellement cohérentes. Nous y dérivons les équations qui régissent la propagation et la conversion de fréquence d'impulsions dans des cristaux non centrosymétriques comme le KDP. La méthode utilisée repose sur des techniques déjà connues d'asymptotiques haute fréquence d'équations hyperboliques quasi-linéaires ou semi-linéaires [31]. Par des choix d'échelles convenables, nous pouvons dériver les modèles de l'optique géométrique et de l'optique de Schrödinger. Dans les échelles correspondant à l'optique géométrique, nous retrouvons des résultats classiques sur la conversion de fréquence d'impulsions dans des cristaux non-linéaires. Dans les échelles correspondant à l'optique diffractive nous mettons en évidence des résultats originaux concernant notamment une expression explicite du terme de diffraction qui s'exprime sous la forme d'un opérateur anisotrope, alors que les résultats classiques existant dans la littérature [29] proposent un Laplacien transverse isotrope.

Bien que les résultats dérivés dans [G32] et [G33] soient nettement plus généraux, on va les énoncer ici dans le cadre de la conversion de fréquence de faisceaux dans des cristaux uniaxes. Par rapport aux milieux isotropes classiques, les milieux dits biréfringents comme les cristaux uniaxes ont la particularité de posséder deux modes propres de propagation pour chaque fréquence, appelés ordinaire et extraordinaire, qui vérifient chacun une relation de dispersion propre. On considère le champ électrique comme la superposition de trois ondes quasi-monochromatiques et quasi-planes :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1,2,3} A_j(\mathbf{r},t)\exp i\left(\mathbf{k}_j.\mathbf{r} - \omega_j t\right)\hat{\mathbf{e}}_j + cc,$$

avec $A_j$ le champ complexe lentement variable, $\hat{\mathbf{e}}_j$ le vecteur unité donnant la direction de polarisation et cc la partie complexe conjuguée. Nous prenons le cas de trois ondes colinéaires se propageant selon l'axe $z$, dans un cristal uniaxe dont l'axe optique est compris dans le plan $xOz$. En appliquant les résultats généraux de [G33], on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial A_1}{\partial z} - \tan\alpha_1\dfrac{\partial A_1}{\partial x} + \dfrac{\partial k_1}{\partial \omega}\dfrac{\partial A_1}{\partial t} + \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial^2 k_1}{\partial \omega^2}\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} \\ \quad + i\dfrac{\partial \tan\alpha_1}{\partial \omega}\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial t\partial x} - \dfrac{ic_{1x}}{2k_1}\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} - \dfrac{ic_{1y}}{2k_1}\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} \end{array}\right\} = \frac{i\omega_1 d_{\mathrm{eff}}}{cn_1\cos^2\alpha_1}A_2^* A_3\exp(i\Delta k z), \tag{5.10}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial A_2}{\partial z} - \tan\alpha_2\dfrac{\partial A_2}{\partial x} + \dfrac{\partial k_2}{\partial \omega}\dfrac{\partial A_2}{\partial t} + \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial^2 k_2}{\partial \omega^2}\dfrac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} \\ \quad + i\dfrac{\partial \tan\alpha_2}{\partial \omega}\dfrac{\partial^2 A_2}{\partial t\partial x} - \dfrac{ic_{2x}}{2k_2}\dfrac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - \dfrac{ic_{2y}}{2k_2}\dfrac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} \end{array}\right\} = \frac{i\omega_2 d_{\mathrm{eff}}}{cn_2\cos^2\alpha_2}A_1^* A_3\exp(i\Delta k z), \tag{5.11}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial A_3}{\partial z} - \tan\alpha_3\dfrac{\partial A_3}{\partial x} + \dfrac{\partial k_3}{\partial \omega}\dfrac{\partial A_3}{\partial t} + \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial^2 k_3}{\partial \omega^2}\dfrac{\partial^2 A_3}{\partial t^2} \\ \quad + i\dfrac{\partial \tan\alpha_3}{\partial \omega}\dfrac{\partial^2 A_3}{\partial t\partial x} - \dfrac{ic_{3x}}{2k_3}\dfrac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \dfrac{ic_{3y}}{2k_3}\dfrac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} \end{array}\right\} = \frac{i\omega_3 d_{\mathrm{eff}}}{cn_3\cos^2\alpha_3}A_1 A_2\exp(-i\Delta k z), \tag{5.12}$$

où le module du vecteur d'onde est donné par $k_j = \omega_j n_j/c$ et le désaccord de phase par $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$. Le coefficient $d_{\mathrm{eff}}$ correspond au coefficient non-linéaire effectif calculé à partir du tenseur $\chi^{(2)}$ de susceptibilité non-linéaire d'ordre 2 du cristal. Les angles de double réfraction sont notés $\alpha_j$. On retrouve les termes classiques :
- d'abord les termes sources de génération de fréquence dans les membres de droite.
- les termes de premier ordre : le terme $k_j'\partial_t A_j$ correspond à l'effet de la vitesse de groupe, qui définit la vitesse de propagation de l'enveloppe des impulsions dans le milieu. Cette vitesse dépendant de la dispersion de l'indice linéaire est habituellement différente pour les trois ondes. De façon équivalente nous avons dans le domaine spatial le terme $\tan\alpha_j\partial_x A_j$ qui décrit la double réfraction, c'est-à-dire le fait que le vecteur de Poynting donnant la direction de propagation de l'énergie n'est pas colinéaire en général avec le vecteur d'onde. Il existe un écart angulaire entre les deux notés

$\alpha_j$. L'axe optique du cristal uniaxe étant compris dans le plan $xOz$, il n'y a de double réfraction que dans la direction $x$.
- le terme de second ordre temporel représente la dispersion de vitesse de groupe.

On peut noter deux caractères originaux dans ces équations quand on les compare avec les équations présentées dans la littérature classique (voir par exemple [29]).
- le terme de diffraction $c_x \partial_{xx}^2 + c_y \partial_{yy}^2$ est différent du Laplacien transverse communément admis. En fait, pour les ondes ordinaires, on trouve le Laplacien transverse, c'est-à-dire que $c_{o,x} = c_{o,y} = 1$. Par contre, pour une onde extraordinaire :

$$c_{e,x}(\omega) = \frac{n_o^2(\omega) n_e^2(\omega)}{\left(\cos^2\theta n_e^2(\omega) + \sin^2\theta n_o^2(\omega)\right)^2}, \qquad c_{e,y}(\omega) = \frac{n_o^2(\omega)}{\cos^2\theta n_e^2(\omega) + \sin^2\theta n_o^2(\omega)},$$

où $n_o$ et $n_e$ sont les indices ordinaire et extraordinaire du cristal, et $\theta$ est l'angle entre l'axe de propagation $Oz$ et l'axe optique du cristal.
- il existe de plus un terme en $\partial_t \partial_x A_j$. Ce terme est dû au fait que l'angle de double réfraction dépend de $\omega$. En réalité cela n'est vrai que pour une onde extraordinaire, car les ondes ordinaires sont polarisées selon l'axe $Oy$ quelle que soit leur fréquence, et donc $\alpha_o = 0$ et $\partial_\omega \tan \alpha_o = 0$.

Lorsqu'on considère des impulsions dont les spectres temporel et spatial ne sont pas très larges, alors les effets de second-ordre, et en particulier les termes originaux que l'on a découvert ici, ne jouent pas de rôle notable. Comme la propagation d'impulsions lumineuses dans des cristaux biréfringents sur des distances supérieures à la distance de Rayleigh du faisceau n'a jamais été étudiée, on n'a pas jusqu'ici observé d'écart notable entre la théorie et l'expérience. Néanmoins l'anisotropie de la diffraction est réelle et affecte certaines expériences qui réclament un haut degré de précision, comme le montre la paragraphe suivant.

**Conversion de fréquence d'impulsions divergentes.** Grâce aux résultats précédents et notamment grâce à la connaissance exacte de l'opérateur de diffraction, on a pu expliquer une observation récente menée sur le banc de mesure de l'angle de réglage des cristaux convertisseurs de fréquence du programme Laser MégaJoule. En effet, afin d'obtenir un bon rendement de triplement de fréquence, il est nécessaire d'ajuster l'alignement des cristaux convertisseurs de fréquences avec une très bonne précision, de l'ordre de $\pm 15$ $\mu$rad pour les cristaux doubleurs et de l'ordre de $\pm 30$ $\mu$rad pour les cristaux tripleurs. La direction d'accord de phase est repérée par la méthode dite de la frange verte. Cette méthode consiste à envoyer une faisceau divergent sur le cristal, et à regarder à l'infini la direction de l'étroit pinceau de lumière verte (c'est-à-dire la seconde harmonique) obtenu. En fait, on observe un fin réseau de franges du type sinus cardinal, et on repère avec précision les zéros de ce réseau. Or il est observé en laboratoire que la direction de conversion de fréquence, c'est-à-dire l'angle de sortie de l'onde harmonique, dépend de la distance entre le plan du waist du faisceau fondamental (c'est-à-dire le plan de la source quasi-ponctuelle) et celui du cristal convertisseur. Comme les écarts angulaires observés dépassent le niveau de précision requis, il est nécessaire d'en découvrir l'origine. Ces écarts sont inexplicables si on considère les équations de conversion de fréquence classiques, mais on peut les expliquer dans le cadre du système (5.6). Qualitativement, ce phénomène est engendré par le fait que la diffraction est différente pour l'onde fondamentale et pour l'onde harmonique. L'analyse quantitative et précise est fournie dans [G33]. Si on se concentre sur les positions des zéros du réseau de franges que forme l'onde harmonique en sortie, alors on prouve qu'en configuration conversion type I (o+o$\to$e), ces positions sont indépendantes de la distance entre le waist et le cristal (résultat vérifié expérimentalement), mais qu'elles dépendent de cette distance en configuration conversion type II (o+e$\to$e).

**Application numérique 1 - Conversion type I - Figure 5.4.**
La longueur d'onde centrale est $\lambda_0 = 1.053\ \mu$m, le cristal est taillé de telle sorte que $\theta = 41.1876$ deg, et les indices propres du cristal sont alors : $n_e(2\omega) = 1.4712$, $n_o(2\omega) = 1.5131$ et $n_o(\omega) = 1.4945$. L'angle de double réfraction de l'onde harmonique est alors de $\alpha_e(2\omega) = -1.6$ deg. Enfin l'épaisseur du cristal est de $z_c = 1$ cm et $z_0$ est la distance entre le plan du waist de l'onde fondamentale et la face d'entrée du cristal.

Pour tout $z_0$ les minima entourant le pic central sont en $k_{x1} = 1.885$ mrad, $k_{x-1} = -1.885$ mrad, $k_{x2} = 3.771$ mrad et $k_{x-2} = -3.769$ mrad. Notez que $k_{x2} - k_{x1} = 1.886$ mrad et $k_{x-1} - k_{x-2} = 1.884$ mrad. Les pics sont pratiquement aussi serrés d'un côté que de l'autre.

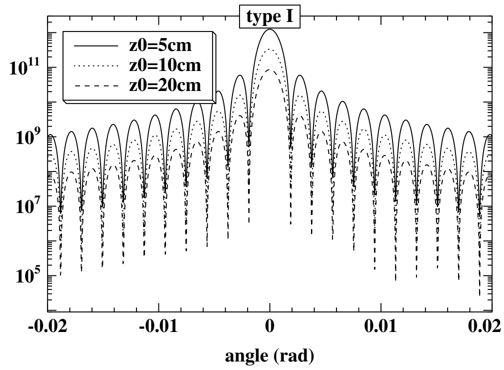


Figure 5.4: *Spectre spatial de l'onde harmonique correspondant aux données numériques de l'application 1 en fonction de l'angle de sortie du cristal.*

**Application numérique 2 - Conversion type II - Figure 5.5.**
La longueur d'onde centrale est $\lambda_0 = 1.053\ \mu$m, le cristal est taillé de telle sorte que $\theta = 59.2288$ deg, et les indices propres du cristal sont alors : $n_e(2\omega) = 1.4712$, $n_o(2\omega) = 1.5131$, $n_o(\omega) = 1.4945$ et $n_e(\omega) = 1.4604$. Les angles de double réfraction sont alors de $\alpha_e(\omega) = -1.15$ deg et $\alpha_e(2\omega) = -1.4$ deg. Enfin l'épaisseur du cristal est de $z_c = 1$ cm et $z_0$ est la distance entre le plan du waist de l'onde fondamentale et la face d'entrée du cristal.

Pour $z_0 = 20$ cm, les minima entourant le pic central sont en $k_{x1} = 3.827$ mrad, $k_{x-1} = -3.486$ mrad, $k_{x2} = 7.468$ mrad et $k_{x-2} = -7.158$ mrad. Notez $k_{x2} - k_{x1} = 3.641$ mrad alors que $k_{x-1} - k_{x-2} = 3.672$ mrad.
Les pics sont plus serrés d'un côté que de l'autre, mais pas de beaucoup. L'écart croît avec $p$, et on a approximativement: $|(k_{xp+1} - k_{xp}) - (k_{x-p} - k_{x-p-1})| \sim (2p-1)30\ \mu$rad.

Pour $z_0 = 5$ cm, les minima entourant le pic central sont en $k_{x1} = 4.277$ mrad, $k_{x-1} = -3.035$ mrad, $k_{x2} = 7.916$ mrad et $k_{x-2} = -6.708$ mrad. Les minima glissent d'une quantité quasi-constante (450 $\mu$rad entre $z_0 = 20$ et $z_0 = 5$ cm).

## 5.7 Conclusions et perspectives

L'étude statistique des points chauds dans le volume focal est une contribution importante dans l'étude des effets du lissage optique sur la réduction des instabilités de l'interaction. On connaît maintenant la statistique du nombre de points chauds au dessus d'une certaine intensité. On peut de plus décrire leur mouvement, toujours de manière statistique, à l'intérieur du volume focal. On

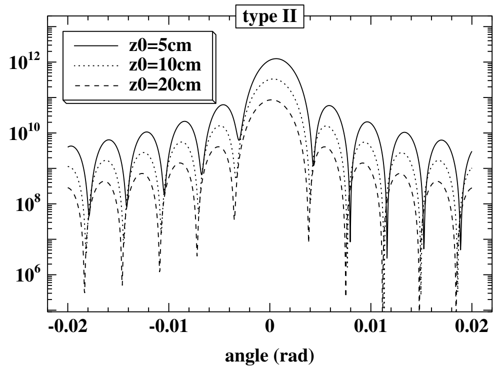


Figure 5.5: *Spectre spatial de l'onde harmonique correspondant aux données numériques de l'application 2 avec* $z_0 = 5$, $z_0 = 10$ *et* 20 *cm en fonction de l'angle de sortie du cristal.*

peut résumer les résultats obtenus à travers les deux assertions suivantes. Il est apparu d'une part que les caractéristiques instantanées (taille et intensité des points chauds) et intégrées (contraste) du faisceau sont peu dépendantes de la méthode de lissage. D'autre part on a mis en évidence que la dynamique des points chauds dépend fortement de la méthode de lissage choisie. Si le temps de vie des grains est égal au temps de cohérence du laser dans le cas du lissage par fibre, il est légèrement plus grand dans le cas du lissage par SSD-1D, et nettement plus grand dans le cas du lissage par chromatisme longitudinal. Il reste à déterminer si cette augmentation du temps d'interaction a une influence sur le développement d'instabilités.

La dérivation des équations de propagation dans les milieux anisotropes trouve d'importantes applications dans le cadre de la conversion de fréquence de faisceaux de la classe du Laser MégaJoule. En prenant en compte ces équations on obtient une précision accrue des calculs de rendement de conversion. Elles permettent une détection fiable de l'angle d'accord de phase pour la conversion de fréquence ce qui représente un enjeu majeur pour le bon fonctionnement des chaînes laser. Enfin les équations obtenues dépassent le cadre propre du Laser MégaJoule en démontrant que les équations couramment admises dans la littérature négligent l'effet de l'anisotropie sur l'expression du terme de diffraction.

Les résultats obtenus ont permis de relancer les études sur la technique de l'effet cascade qui permet la génération d'impulsions présentant des caractéristiques contrôlées de cohérences partielles dans les domaines temporel et spatial, avec le grand avantage de n'engendrer que des modulations de phase de l'impulsion, et pas de modulation d'amplitude qui sont critiques en termes de rendement d'amplification et de conversion de fréquence. Le principe est le suivant (proposé par L. Videau [111]). La technique repose sur le mélange d'une onde signal monochromatique de faible énergie avec une onde pompe incohérente de forte énergie dans un cristal non-linéaire. Dans cette configuration le cristal est placé loin des conditions d'accord de phase, de telle façon que le rendement de conversion de fréquence est très petit. Par contre, les modulations d'intensité de l'onde pompe peuvent être transférées sous la forme de modulations de phase sur l'onde signal. On peut tirer de cette technique le principe d'un générateur de phase tout optique massif à haute fréquence. Mais pour en appréhender le fonctionnement, il faut correctement prendre en compte les différences de vitesses de groupe et les dispersions de vitesses de groupe dans le domaine temporel, et la dispersion angulaire et la diffraction dans le domaine spatial [G30].

# Chapitre 6

# Etude de la convergence d'algorithmes génétiques

## 6.1 Une introduction rapide aux algorithmes évolutionnaires

L'introduction des algorithmes évolutionnaires comme outil d'optimisation stochastique n'est pas une idée récente [98, 59, 43], cependant seules des puissances de calcul croissantes ont permis leur réelle émergence. Ce type d'algorithmes propose des réponses à des problèmes dont la solution était jusque-là numériquement hors d'atteinte. En effet, 1) ils n'imposent aucune contrainte de régularité (méthode d'optimisation d'ordre 0, qui nécessite seulement les valeurs de la fonction à optimiser) ; 2) ils sont capables d'évoluer sur des paysages très chahutés (plusieurs optima locaux) ; 3) ils peuvent trouver plusieurs solutions quasi optimales en même temps.

Les algorithmes évolutionnaires ont un mécanisme de base similaire : celui-ci consiste à faire évoluer une population par transformation aléatoire de certains de ses éléments. Prenons l'exemple de la maximisation d'une fonction $f$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, appelée fonction adaptation ou *fitness*. En pratique, la fonction fitness est définie sur l'*espace des phénotypes* $\Phi$, éventuellement différent de l'*espace de recherche* $E$ (espace *génotypique*), dans lequel la solution est cherchée par l'algorithme. On se donne alors une fonction $\varphi$ de décodage du génotype au phénotype, ainsi, la fitness de $x \in E$ est définie par $f(\varphi(x))$. Dans le cadre binaire considéré dans ce chapitre, l'espace des phénotypes est le même que celui des génotypes, $\varphi$ est donc la fonction identité. Pratiquement, les algorithmes d'évolution commencent par choisir aléatoirement un p-uplet – *la population* – de points de $E = \{0,1\}^l$ – *les individus* –, ensuite le processus suivant est itéré jusqu'à satisfaction d'un critère d'arrêt (ex. nombre maximum d'itérations) :

1. Sélection d'individus (plutôt de grande fitness) à transformer (étape Darwinienne, où les meilleurs sont plus aptes à se reproduire).
2. Transformation de chaque individu sélectionné : par *mutation* (transformation aléatoire de E vers E), ou par *croisement* avec un autre individu (transformation de $E \times E$ vers $E$ où chaque *parent* participe par une partie complémentaire à la construction de *l'enfant*).
3. Remplacement : Sélection de $p$ individus parmi les points initiaux et ceux obtenus par la transformation précédente (étape Darwinienne, où les meilleurs sont plus aptes à survivre).

Détaillons un peu plus chacun de ces points.

**Stratégies d'évolution (ES).** On distingue deux types d'ES selon la sélection (déterministe) utilisée :
$(\mu + \lambda) - ES$ : $\mu$ parents donnent $\lambda$ enfants (chaque parent donne $\lambda/\mu$ enfants en moyenne), les $\mu$ meilleurs parmi parents et enfants sont choisis pour former la population suivante (il est élitiste par définition).
$(\mu, \lambda) - ES$ : $\mu$ parents donnent $\lambda$ enfants, les $\mu$ meilleurs enfants sont choisis pour former la population suivante (tous les parents meurent $\Rightarrow$ la meilleur fitness de la population peut décroître).
Deux cas particuliers sont les suivants :
$(1+1) - ES$ : Soit $X(0) \in E$. A chaque génération $t \in \mathbb{N}$, on note $X'(t)$ le résultat de la mutation

de $X(t)$. Si $X'(t)$ a une fitness strictement meilleure que celle de $X(t)$, alors $X(t+1) = X'(t)$, sinon $X(t+1) = X(t)$.
$(1,1) - ES$ : Soit $X(0) \in E$. A chaque génération $t \in \mathbb{N}$, on note $X'(t)$ le résultat de la mutation de $X(t)$ et on pose $X(t+1) = X'(t)$.

**Opérateurs d'évolution.** Les opérateurs de mutation agissent sur le codage des données. Prenons l'exemple d'un codage binaire $E = \{0,1\}^l$. Les mutations les plus utilisées sont :
1-*bit mutation* : choisir une position uniformément dans $\{1,...,l\}$, et changer la valeur du bit correspondant.
$c/l$ *mutation* : changer chaque bit indépendamment avec une probabilité $c/l$, $c > 0$.

**La distance de Hamming.** C'est la distance la plus naturelle sur l'espace $E = \{0,1\}^l$. Si $x, y \in E$, alors $d(x,y) = \sum_{j=1}^{l} \mathbb{I}_{x_j \neq y_j}$.

**L'approche probabiliste.** L'approche probabiliste qui utilise une modélisation par les chaînes de Markov donne des résultats de convergence globaux. On se place dans l'espace binaire, on considère une mutation irréductible (exemple la $c/l$ ou la 1-bit mutation) et un mécanisme de sélection. La population à l'instant $t$ est notée $X(t) = (x_1, \dots x_\mu)$, $x_i \in E$. L'espace d'états de la chaîne $X(t)$ est donc $E^\mu$, et la matrice de transition donne les probabilités de passer d'une population à une autre suivant le schéma :

$$X(t) \overset{\text{Mutation}}{\longrightarrow} X'(t) \overset{\text{Sélection}}{\longrightarrow} X(t+1).$$

La chaîne $X(t)$ est homogène, irréductible, sur l'espace fini $\{0,1\}^{l\mu}$. Elle est donc ergodique. Cela implique qu'il existe un processus limite, i.e. que le comportement de la chaîne converge asymptotiquement vers une loi de probabilité indépendante de la population de départ :

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\left(X(t) = y / X(0) = x\right) = \pi(y), \text{ avec } \pi(y) > 0 \quad \forall y \in E^\mu.$$

Cependant, ce résultat de convergence est insuffisant, vu que l'on s'intéresse au temps de convergence vers les optima de la fonction fitness. Ce chapitre est dédié à l'étude (et étalonnage) des types de convergences des algorithmes d'évolution d'un point de vue temporel (premier temps d'atteinte de la solution) et spatial (trajectoire). La première partie propose une comparaison de la trajectoire et du temps de convergence de deux opérateurs de mutation, d'une part avec le processus $(1,1) - ES$, et d'autre part le processus $(1+1) - ES$ sur le problème OneMax [1]. Les lois asymptotiques du premier temps d'atteinte de la solution sont calculées, indiquant la nette supériorité de la 1-bit mutation sur la $c/l$ mutation, pourtant plus utilisée en pratique. Les trajectoires des deux processus (avec chaque mutation) sont comparées.

Poussant plus loin la comparaison entre les deux mutations, la deuxième partie démontre l'existence de "chemins exponentiels" pour la $c/l$ mutation (à l'image des *longpaths* [60] pour la 1-bit mutation) : L'étude de la la distribution statistique du temps de convergence des stratégies d'évolution sur les *long k-path* de Rudolph [102] permet d'identifier une sous-classe de ces fonctions telle qu'un processus $(\mu + \lambda)$-ES muni de la $c/l$ mutation converge sans prendre de raccourcis, et donc en un temps exponentiel. Ceci prouve qu'il existe des chemins exponentiels et contrôlés pour la $c/l$ mutation. Cependant, la question reste ouverte pour les opérateurs de croisement qui prennent des raccourcis conséquents sur ces mêmes *long k-paths*.

---

[1] La fitness est simplement le nombre de 1. $f(x) = l - d(x, x_0)$, $x_0 = (1, ..., 1)$.

## 6.2 Comparaison de deux mutations binaires

On veut comparer deux types d'opérateurs de mutations binaires, à savoir $c/l$ mutation et la 1-bit mutation. Ces opérateurs donnent le même taux de mutation pour $c = 1$, mais seule la $c/l$ mutation autorise la mutation de plusieurs bits en même temps. L'étude consiste à comparer les premiers temps d'atteinte des chaînes de Markov associées à ces mutations d'une part pour l'algorithme $(1,1) - ES$ (c'est-à-dire sans sélection, ce qui correspond à une marche au hasard pure dans l'espace d'états $E$) et d'autre part pour l'algorithme $(1+1) - ES$ dans le cas du problème Onemax (c'est-à-dire avec une sélection élitiste) [G9].

**Cas de l'algorithme** $(1,1) - ES$**.** Les chaînes de Markov associées avec d'une part la $c/l$ mutation et la 1-bit mutation peuvent être vues comme des marches aléatoires aveugles avec des noyaux de transition imposés par la mutation choisie. Cette approche permet de comparer les deux mutations sans le biais introduit par le schéma de sélection. Des méthodes analogues ont déjà été appliquées pour étudier les effets de différents opérateurs intervenant dans les algorithmes évolutionnaires : voir les études du temps de convergence d'algorithmes à croisement pur [7, 77], le temps d'envahissement (temps nécessaire pour qu'un seul individu occupe toute la population) d'algorithmes à sélection pure [45, 23], et le temps d'innovation (temps nécessaire pour générer un individu de meilleure fitness que ceux de la population initiale) pour des algorithmes de croisement avec ou sans mutation en l'absence de sélection [107, 44].

Le résultat principal en l'absence de sélection est que l'espérance du temps d'atteinte pour la $c/l$ mutation est plus grande d'un facteur $(1 - e^{-c})^{-1}$ que pour celle de la 1-bit mutation. De plus, les temps d'atteinte correspondant à la $c/l$ mutation (resp. la 1-bit mutation) suivent une loi exponentielle avec moyenne $\frac{2^l}{(1-e^{-c})}$ (resp. $2^l$). Une conséquence directe de ce résultat est que le premier temps d'atteinte de $N$ processus de $c/l$ mutations indépendants (resp. 1-bit mutations) suit une loi exponentielle avec moyenne $\frac{2^l}{N(1-e^{-c})}$ (resp. $\frac{2^l}{N}$). Par conséquent le gain est nul en termes du nombre de mutations appliquées.

Finalement, si on compare les suites des points visités par chacune des chaînes, on s'aperçoit que ces suites coïncident (en loi) à des instants qui obéissent à une distribution poissonnienne, dans le sens où la chaîne $X$ correspondant à la $c/l$ mutation saute certains des points visités par la chaîne $\bar{X}$ correspondant à la 1-bit mutation. Par conséquent, quand $\bar{X}$ atteint le point final pour la première fois, la chaîne $X$ manque ce point avec probabilité $1 - \frac{1-e^{-c}}{c}$. Ce dernier résultat est intéressant car d'une part il donne une comparaison des trajectoires des deux processus et d'autre part il permet une compréhension intuitive de l'origine de la différence entre les deux espérances des temps d'atteinte entre les deux mutations.

**Remarque 6.1**
*Un autre point à considérer quand on analyse des résultats théoriques en termes pratiques est que, pour des grandes valeurs de $l$, une fraction $e^{-c}$ des $c/l$ mutations ne donne aucune modification de l'individu. Si on considère seulement les mutations actives, les temps d'atteinte des deux chaînes suivent la même loi.*

**Cas de l'algorithme** $(1+1) - ES$**.** On regarde maintenant une configuration avec sélection dans le cas du problème OneMax. Le parent génère un seul enfant, et le meilleur des deux devient le parent suivant. Des travaux précédents ont montré que la complexité de l'algorithme $(1+1) - ES$ pour le problème Onemax étaient pour les deux mutations de l'ordre de $O(l \log(l))$. Cependant ces résultats sont insuffisants en ce sens qu'ils ne permettent pas de comparer la $c/l$ et la 1-bit mutation, car ils n'explicitent pas les constantes multiplicatives associées à cet ordre de grandeur. Nous avons donc améliorer ces résultats en calculant les développements des espérances des temps d'atteinte jusqu'aux termes d'ordre $o(l)$. Ces développements montrent que le terme dominant pour la $c/l$ mutation (resp. la 1-bit mutation) est égal à $\frac{e^c}{c} l \ln l$ (resp. $l \ln l$). De plus l'écart quadratique normalisé (i.e. l'écart quadratique divisé par la moyenne) est de l'ordre de $(\ln l)^{-1}$ pour les deux mutations.

On a aussi calculé le développement de l'espérance du premier temps d'atteinte $T_N$ de $N$ processus indépendants construits sur la $c/l$ mutation (resp. $\bar{T}_N$ pour la 1-bit mutation), et on a ainsi montré que le gain apporté par l'utilisation de plusieurs processus indépendants était très faible. En fait le gain est de l'ordre de $l$, si bien que le terme dominant dans le développement de l'espérance du premier temps d'atteinte de $N$ processus est le même que celui pour un processus, i.e. $\frac{e^c}{c} l \ln l$ (resp. $l \ln l$). Ceci est dû à la très faible variance des distributions de $T_1$ et $\bar{T}_1$ ($(\ln l)^{-1}$ qui tend vers 0 quand $l$ tend vers l'infini). Cependant ce taux est plutôt lent en pratique. L'écart quadratique normalisé est en fait d'ordre 1 sur une grande plage de valeurs de $l$. Afin que cet écart soit en dessous de 20% (resp. 10%), il est nécessaire que $l > 7.10^2$ (resp. $l > 4.10^5$).

**Remarque 6.2**
*Comme montré dans la remarque 6.1 les chaînes construites sur la 1-bit et la c/l mutation nécessitent le même effort pour atteindre le point final en termes de nombre de mutations actives en l'absence de sélection. Ce n'est pas le cas en présence de sélection, L'espérance du temps de convergence pour la c/l mutation en nombre de mutations actives est encore d'un facteur* $\frac{e^c-1}{c}$ *plus grand que pour la 1-bit mutation pour l'algorithme* $(1+1)-ES$ *sur le problème OneMax.*

Pour résumer, la première morale de notre étude apparaît être la mise en évidence des meilleures performances de la 1-bit mutation par rapport à la $c/l$ mutation, à la fois en absence de pression sélective ou en appliquant l'algorithme de sélection $(1+1)-ES$ sur le problème OneMax. Cette assertion est vraie dans ce dernier problème même quand on remonte artificiellement les performances de la $c/l$ mutation en ne comptant que les mutations actives. La seconde morale est que le gain apporté par l'utilisation de $N$ processus indépendants est très faible dans tous les cas.

Cependant nous n'affirmons pas que la 1-bit mutation devrait être préférée à la $c/l$ mutation, car il est clair que la 1-bit mutation peut avoir beaucoup plus de mal à échapper à des optima locaux. Mais nous voulons souligner qu'un compromis doit être recherché entre la capacité de la $c/l$ mutation à échapper aux pièges locaux et l'efficacité de la 1-bit mutation en termes de vitesse de convergence. Les résultats de notre étude suggèrent que des mutations positives[2] peuvent être moins performantes que des mutations irréductibles[3] habituellement préférées. D'autre part, les résultats obtenus ici sont étroitement dépendants du caractère particulier du problème Onemax. C'est pourquoi nous avons considéré le problème des *long k-paths*.

## 6.3 Temps de convergence sur les *Long k-Paths*

Les *long k-paths* sont une famille de chemins indexée par deux entiers $k$ et $l$ tels que $l = 1 \mod k$, de longueur exponentielle ($O(k2^{\frac{l-1}{k}})$), construits récursivement par rapport à $l$ à partir d'une

[2]Une mutation positive relie toute paire de points de l'espace d'états avec probabilité strictement positive.
[3]Il existe une suite finie de mutations qui lie toute paire de points avec probabilité positive.

séquence d'individus ayant des fitness croissantes. (la fitness est proportionnelle à l'indice dans le chemin). Plus exactement, le chemin de base est $P(1,k) = \{0,1\}$. Etant donné le *long k-path* $P(l,k)$ au rang $l$, $P(l+k,k)$ est construit comme suit : un premier sous chemin $S_0$ est créé en prenant le chemin $P(l,k)$ et en faisant précéder chaque vecteur de $P(l,k)$ par $k$ zéros. Un deuxième sous-chemin $S_1$ est créé en prenant $P(l,k)$ dans l'ordre inverse et en faisant précéder chaque vecteur de ce chemin inversé par $k$ uns. Un troisième chemin $B$ (le "pont") composé de $k-1$ vecteurs est créé en prenant le dernier vecteur de $P(l,k)$ et en le faisant précéder par les chaînes suivantes de longueur $k$ : $0\ldots01$, $0\ldots011$, ..., $001\ldots11$ et $01\ldots11$. En fusionnant $S_0$, $B$ et $S_1$ on obtient le chemin $P(l+k,k)$ Par exemple considérons la construction du chemin $P(7,3)$. Commençant avec $P(1,3) = \{0,1\}$, on construit d'abord $P(4,3)$ :

$$\underbrace{0000_1 \quad 0001_2}_{S_0} \quad \underbrace{0011_3 \quad 0111_4}_{Bridge} \quad \underbrace{1111_5 \quad 1110_6}_{S_1} \tag{6.1}$$

puis le chemin désiré $P(7,3)$ :

$$\begin{array}{ccc} 0000000_1 & 0011110_7 & 1111110_9 \\ 0000001_2 & 0111110_8 & 1111111_{10} \\ 0000011_3 & & 1110111_{11} \\ 0000111_4 & & 1110011_{12} \\ 0001111_5 & & 1110001_{13} \\ 0001110_6 & & 1110000_{14} \\ & & \\ S_0 & \text{Pont} & S_1 \end{array} \tag{6.2}$$

- La distance entre deux points consécutifs du chemin est 1.
- La longueur du *long k-path* est $|P(l,k)| = (k+1)2^{(l-1)/k} - k + 1$.
- Une mutation de $i < k$ bits peut seulement faire faire passer d'un vecteur à un autre situé à une distance $i$ l'un de l'autre. Pour sauter de plus de $k$ positions consécutives dans le chemin, tous les bits d'au moins un des blocs $2j+1, \ldots, 2(j+1)$, pour $j \in \{0, \ldots, (l-1)/k\}$ doivent être échangés. Une telle mutation est appelée un *shortcut*. Le shortcut qui échange complètement le bloc $2j+1, \ldots, 2(j+1)$ est noté $\mathcal{S}_j$.

Rudolph [101] donne l'ordre de grandeur de l'espérance du temps d'atteinte $T$ du dernier point du chemin $P(l,k)$ en partant du premier point pour l'algorithme $(1+1)-ES$. Le cas de l'algorithme $(1+1)-ES$ avec la 1-bit mutation n'est pas étudié très à fond, car dans ce cas, et par construction du *longpath*, la chaîne visite tous les individus du chemin pour atteindre l'optimum global. Par conséquent le temps de convergence est proportionnel à la longueur du chemin qui est exponentiel en $l$. Rudolph a démontré une borne supérieure en $O(l^{k+1}/k)$ pour l'espérance de $T$ pour la chaîne associée à l'algorithme de sélection $(1+1)-ES$ avec la $1/l$ mutation. Pour une valeur fixée de $k$, cette borne est polynomiale en la taille des individus $l$. Ceci implique que pour des grandes valeurs de $l$ la chaîne associée à la $1/l$ mutation est beaucoup plus rapide que la chaîne associée à la 1-bit mutation. Le cas d'un $k$ dépendant de $l$ était laissé en question ouverte. Une étude complète du problème du *long k-path* est proposée dans [G14] Nous calculons explicitement l'espérance et la variance de $T$ pour $k$ fixé dans l'asymptotique $l \gg 1$. Ensuite on considère le cas $k = l^\alpha$ et on prouve que le temps de convergence est d'ordre exponentiel pour l'algorithme $(1+1)-ES$ avec la $c/l$ mutation.

**Cas $k$ fixé.** Notre résultat principal est que l'espérance du temps d'atteinte est $el^{k+1}/k\ln(l/k)$. Ce résultat n'est pas une borne mais le terme dominant du développement de cette espérance en $l \gg 1$.

De plus, nous montrons que la variance normalisée de $T$ tend vers 0 quand $l \to \infty$, mais que le taux de décroissance est si lent que la variance reste d'ordre 1 pour toutes les valeurs de $l$ d'intérêt pratique. En fait nous donnons le terme dominant de l'histogramme du temps d'atteinte $T$. Comme le montre la figure 6.1, l'histogramme de $T$ présente un pic anormal près de 0, correspondant à l'événement "le shortcut $\mathcal{S}_1$ se produit en premier", i.e. avant les autres shortcuts. Le probabilité de cet événement est $kl^{-1}$. Conditionnellement à cet événement le temps d'atteinte est $l^2$ fois plus petit que l'espérance $\mathbb{E}[T]$.
Cela montre d'une part qu'avec probabilité $kl^{-1}$, la chaîne atteint l'optimum global $l^2$ fois plus vite que la valeur moyenne de $T$. Par conséquent, la meilleure stratégie qu'on puisse imaginer en tenant compte de cette information consiste à mener de front $N = O(l)$ processus du type précédent de manière indépendante. Ainsi, il est très probable que l'un de ces $N$ processus réalise l'événement exceptionnel "le shortcut $\mathcal{S}_1$ se produit en premier". Le (minimum des) temps de convergence de ces processus indépendants sera $l^2$ fois plus petit que le temps de convergence d'un seul processus, ceci avec une forte probabilité. Le gain global en termes de nombre de calculs est donc d'un facteur $l^2/N \sim l$.
D'autre part l'utilisation d'une population $(\mu + \lambda) - ES$ n'accélère pas la convergence (en nombre d'évaluations), par rapport au cas d'une population composée d'un seul individu. En effet, le premier individu de la population qui réalise un raccourci $\mathcal{S}_j$, $j \neq 1$, colonise toute la population en moins de $O(\mu)$ générations à cause de l'élitisme. Ce qui anéantit toute chance de réaliser l'événement favorable "le shortcut $\mathcal{S}_1$ se produit en premier". Ainsi, une population d'individus qui ne communiquent pas donne de meilleurs résultats.

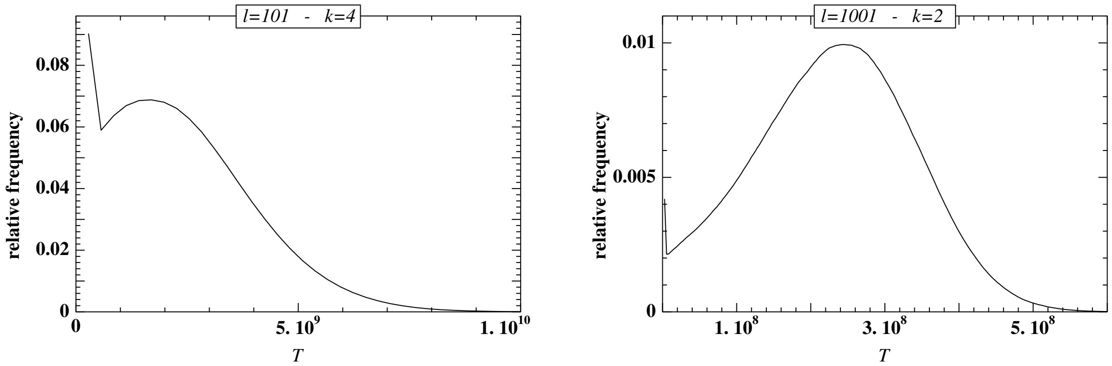


Figure 6.1: *Histogramme théorique du temps d'atteinte $T$ pour différentes valeurs des paramètres $k$ et $l$.*

**Cas $k = l^\alpha$.** On suppose d'une part $\alpha > 0$ pour ne pas retomber dans l'étude précédente, et d'autre part $\alpha < 1$ car si $k = O(l)$, alors la longueur du chemin est aussi d'ordre $O(l)$ et la question d'une complexité exponentielle n'a plus de sens. Le résultat principal est que l'espérance du temps d'atteinte de l'optimum global avec la $c/l$ mutation est exponentiel. De plus, les shortcuts accélèrent la convergence seulement si $\alpha < 1/2$. Sinon (si $\alpha \geq 1/2$), la chaîne visite tous les individus du chemin. Ce résultat démontre que le *long k-path* est un problème exponentiel pour l'algorithme $(1+1) - ES$ avec la $c/l$ mutation.

## 6.4 Evaluation des bassins d'attraction d'une fonction

On a considéré dans les sections précédentes des algorithmes d'optimisation assez élaborés, qu'on a comparés entre eux. On cherche ici à tester les performances d'un algorithme d'optimisation très naïf qui consiste à distribuer au hasard un certain nombre de points dans l'espace de recherche, puis à mener une optimisation locale autour de chacun de ces points, du type algorithme de plus fort gradient. Supposons que l'espace d'états $E$ (quelconque) puisse être partitionné en $N$ sous-ensembles $E_1$,...,$E_N$ correspondant aux bassins d'attraction des optima locaux $m_1$,...,$m_N$ d'une certaine fonction fitness (figure de gauche 6.2). Ceci peut être réalisé simplement en définissant le bassin attraction d'un optimum local $m$ comme l'ensemble des points $x$ de l'espace de recherches qui sont tels qu'un algorithme de plus fort gradient commençant en $x$ termine en $m$.

**Un problème direct.** Connaissant le nombre et les tailles des bassins d'attraction, et ayant réparti $M$ points au hasard dans $E$, on cherche la probabilité $p_{N,M}$ pour que l'on ait ainsi placé au moins un point dans chacun des bassins d'attraction. Notons $\alpha_j := |E_j|/|E|$ la taille normalisée des bassins d'attraction. Les résultats de base sont les suivants.
*1.* Si les bassins d'attraction ont tous la même taille $\alpha_j = 1/M$ (configuration Déterministe), alors pour $N \gg 1$ et $M = N(\ln N + \ln \alpha)$, on a $p_{N,M} = \exp\left(-\alpha^{-1}\right)$.
*2.* Si la taille des bassins est complètement aléatoire dans le sens où la loi des $\alpha_j$ est la distribution uniforme sur le simplexe $\sum_{j=1}^{M} \alpha_j = 1$ (configuration Aléatoire), alors pour $N \gg 1$ et $M = N^2\alpha$, $\alpha > 0$, on a $p_{N,M} = \exp\left(-\alpha^{-1}\right)$.
Le fait qu'on aie besoin d'un nombre de points de l'ordre de $N^2$ dans la configuration A et de seulement de l'ordre de $N \ln N$ dans la configuration D pour détecter tous les maxima est dû à l'existence dans la configuration A de bassins d'attraction de très petite taille, qu'il est très difficile de détecter. On voit donc qu'il existe une corrélation forte entre la distribution de la taille des bassins et le nombre de points de l'échantillonnage nécessaire pour détecter les optima.

**Un problème inverse : trouver le nombre d'optima locaux d'une fonction.** Notre but est de trouver le nombre $N$ des optima locaux, ainsi qu'autant d'information possible sur la distribution de la taille des bassins correspondants. Sans connaissance a priori du paysage de la fonction fitness, nous proposons la stratégie suivante :

1. `choisir des points` $(X_i)_{i=1,\dots,M}$ `au hasard uniformément dans` $E$.

2. `appliquer un algorithme de plus fort gradient partant de chacun des points` $X_i$.

3. `compter le nombre d'optima locaux qui ont été atteints avec exactement` $j$ `points initiaux` $X_i$ `différents (voir la figure de droite 6.2) :`

$$\beta_j := \text{nombre d'optima détectés avec } j \text{ points.}$$

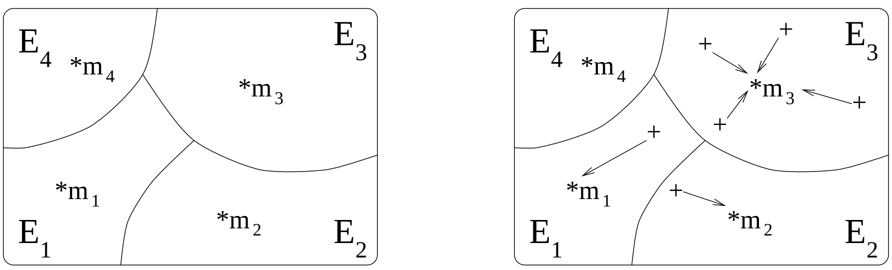


Figure 6.2: *Une partition de l'espace de recherche $E$ avec $N = 4$ bassins d'attraction et 4 optima locaux $m_1$,...,$m_4$. Sur la figure de droite 6 points ont été choisis au hasard. Après avoir laissé tourner l'algorithme de plus fort gradient, on trouve $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 0, \beta_3 = 0$, $\beta_4 = 1$.*

L'idée principale est la suivante. Remarquez tout d'abord que $\bar{N} := \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j$ est le nombre d'optima locaux détectés. $\bar{N}$ est donc une borne inférieure du nombre réel d'optima locaux. D'autre part, il y a moins d'information dans $\bar{N}$ que dans l'ensemble $(\beta_j)_{j\geq 1}$. Nous voulons exploiter plus à fond la quantité d'information disponible dans les valeurs expérimentales $(\beta_j)_{j\geq 1}$, afin de construire un estimateur de $N$ meilleur que $\bar{N}$. En effet, la distribution des $\beta_j$ et celle de la taille des bassins sont corrélées. Imaginons que la taille normalisée (i.e. divisée par la moyenne $|E|/N$) des bassins d'attraction suit une loi statistique parmi une famille de lois paramétrées par un réel strictement positif $\gamma$ :

$$p_\gamma(z) = \frac{\gamma^\gamma}{\Gamma(\gamma)} z^{\gamma-1} e^{-\gamma z}.$$

Sous $p_\gamma$, la moyenne est 1 et la variance $1/\gamma$. En fait, les configurations A et D décrites ci-dessus sont des cas particuliers de la famille $p_\gamma$. En effet, lorsque $\gamma = 1$, on retrouve la configuration A, alors que $\gamma \to \infty$ correspond à la configuration D. On dira qu'on est sous l'hypothèse $H^\gamma$ si la loi sous-jacente de la taille des bassins admet pour densité $p_\gamma$. Le point important est que, sous $H^\gamma$, les espérances des $\beta_j$ sont calculables et égales à :

$$\beta_{j,\gamma} = N \left. \frac{\Gamma(j+\gamma)}{j!\Gamma(\gamma)} \frac{\alpha^j \gamma^\gamma}{(\alpha+\gamma)^{j+\gamma}} \right|_{\alpha=M/N}. \tag{6.3}$$

De l'expression (6.3) on déduit la relation suivante vérifiée par le rapport $\alpha = M/N$ :

$$\frac{\sum_{j=1}^{\infty} \beta_{j,\gamma}}{M} = \frac{1-(1+\alpha/\gamma)^{-\gamma}}{\alpha}. \tag{6.4}$$

Revenons au problème inverse. On fait tourner l'algorithme de plus fort gradient avec $M$ points initiaux choisis uniformément sur l'espace d'états $E$, ce qui fournit un jeu de valeurs $(\beta_j)_{j\geq 1}$. Un test du $\chi^2$ permet, à partir du jeu de valeurs $(\beta_j)_{j\geq 1}$ de déterminer sous quelle configuration $H^{\gamma_0}$ on est, ou tout au moins quelle est parmi l'ensemble des lois $p_\gamma$ la loi $p_{\gamma_0}$ qui est la plus proche de la configuration considérée. La quantité $\bar{\alpha} = \bar{N}/M$ est connue. D'après (6.4), le rapport $\alpha = M/N$ est l'unique solution de :

$$\bar{\alpha} = \frac{1-(1+\alpha/\gamma_0)^{-\gamma_0}}{\alpha}, \tag{6.5}$$

ce qui fournit un bon estimateur du rapport $\alpha = M/N$, et donc de $N$. Cette méthode est analysée en détail dans [G27] et testée sur des simulations numériques de différents problèmes. Nous voudrions souligner que les performances de cette méthode sont dépendantes de la famille de lois sur les $(\alpha_j)$ que l'on se donne a priori. Les contraintes pour le choix de cette famille sont doubles et contradictoires. D'une part il faut prendre une famille suffisamment grande afin d'être raisonnablement sûr que la distribution réelle observée $(\beta_j)$ sera proche de l'un des éléments de la famille. D'autre part, on ne peut pas prendre une famille trop grande, sans quoi on aura trop de paramètres à estimer pour caractériser les $(\beta_j)$. C'est pourquoi le choix de la famille de distributions a priori est délicat et crucial. Nous pensons que la famille $p_\gamma$ que nous avons retenue satisfait des propriétés déterminantes. Premièrement elle contient deux distributions naturelles pour ce genre de problèmes, à savoir les configurations A et D que nous avons étudiées en détail. Deuxièmement les éléments de cette famille sont caractérisés par un simple paramètre facile à estimer. Troisièmement elle contient des distributions avec un continuum de variances, depuis 0 (la configuration D) jusqu'à l'infini, en passant par 1 (la configuration A). Nous proposons cependant dans [G14] une autre famille qui nous semble convenable, et des tests sur de nouveaux problèmes sont en cours de réalisation.

# Références

[1] F. Kh. Abdullaev, S. A. Darmanyan, S. Bishoff et M. P. Sørensen, *Modulational instability of electromagnetic waves in media with varying nonlinearity*, J. Opt. Soc. Am. B **14**, 27-33 (1997).

[2] F. Kh. Abdullaev, S. A. Darmanyan, A. Kobyakov et F. Lederer, *Modulational instability in optical fibers with variable dispersion*, Phys. Lett. A **220**, 213-218 (1996).

[3] M. J. Ablowitz et H. Segur, *Solitons and the inverse scattering transform* (SIAM, Philadelphia, 1981).

[4] J. Adler, *The geometry of random fields* (Wiley, New York, 1981).

[5] G. P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics, 2nd ed.* (Academic Press, New York, 1995).

[6] G. P. Agrawal, *Modulation instability induced by cross-phase modulation*, Phys. Rev. Lett. **59**, 880-883 (1987).

[7] C. A. Ankenbrandt, *An Extention To the Theory of Convergence and a proof of the Time Complexity of Genetic Algorithms*, dans Foundations of Genetic Algorithms, G. J. E. Rawlins, ed., Morgan Kaufmann, 1991, pp. 53-68.

[8] P. Anderson, *Absences of diffusion in certain random lattices*, Physical Review **109**, 1492-1505 (1958).

[9] L. Arnold, *A formula connecting sample and moment stability of linear stochastic systems*, SIAM J. Appl. Math. **44**, 793-802 (1984).

[10] L. Arnold, G. Papanicolaou et V. Wihstutz, *Asymptotic analysis of the Lyapunov exponent and rotation number of the random oscillator and applications*, SIAM J. Appl. Math. **46**, 427-450 (1986).

[11] P. H. Baxendale et R. Z. Khaminskii, *Stability index for products of random transformations*, Adv. Appl. Prob. **30**, 968-988 (1998).

[12] R. N. Bhattacharya, *On the functional central limit theorem and the law of the iterated logarithm for Markov process*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **60**, 185-201 (1982).

[13] T. B. Benjamin et J. E. Feir, *The disintregration of wave trains on deep water*, J. Fluid Mech. **27**, 417-430 (1967).

[14] D. J. Benney et A. C. Newell, *The propagation of nonlinear wave envelopes*, J. Math. Phys. **46**, 133-139 (1967).

[15] P. Bougerol, *Exemples de théorèmes locaux sur les groupes résolubles*, Ann. Inst. H. Poincaré **19**, 369-391 (1983).

[16] P. Bougerol et J. Lacroix, *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators* (Birkhauser, Boston, 1985).

[17] P. W. Brouwer, *Transmission through a many-channel random waveguide with absorption*, Phys. Rev. B **57**, 10526-10536 (1998).

[18] A. Bulatov, D. Livdan et J. L. Birman, *Statistical properties of the cumulative phase of electromagnetic radiation transmitted through a waveguide with random scatterers*, Phys. Rev. E **57**, 3574-3578 (1996).

[19] A. Bulatov, B. Vugmeister, A. Burin et H. Rabitz, *Nonadiabatic cooling and optimal control in off-resonance dipole optical components* Phys. Rev. A **58**, 1346-1351 (1998).

[20] L. Bunimovich, H. R. Jauslin, J. L. Lebowitz, A. Pellegrinotti et P. Nielaba, *Diffusive energy growth in classical and quantum driven oscillators*, J. Stat. Phys. **62**, 793-817 (1991).

[21] H. Cao, Y. G. Zhao, S. T. Ho, E. W. Seeilg, Q. W. Wang et R. P. H. Chang, *Random laser action in semiconductor powder*, Phys. Rev. Lett. **82**, 2278-2281 (1999).

[22] R. Carmona, *The random Schrödinger equation*, dans *Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour*, P. L. Hennequin, ed., Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1985, pp. 1-124.

[23] U. Chakraborty, K. Deb et M. Chakraborty, *Analysis of Selection Algorithms: A Markov Chain Approach*, Evolutionary Computation **4**, 133-168 (1996).

[24] R. E. Collins, *Field theory of guided waves* (Mac Graw-Hill, New York, 1960).

[25] M. Combescure, *The quantum stability problem for time-periodic perturbations of the harmonic oscillator*, Ann. Inst. H. Poincaré A **47**, 63-83 (1987).

[26] C. C. Constantinou et R. C. Jones, *Path-integral analysis of propagation in a waveguide with random inhomogeneities*, Waves Random Media **4**, 29-49 (1994).

[27] H. Crauel, *Lyapunov numbers of Markov solutions of linear stochastic systems*, Stochastic **14**, 11-28 (1984).

[28] P. Desvillard et B. Souillard, *Polynomially decaying transmission for the nonlinear Schrödinger equation in a random medium*, J. of Stat. Phys. **43**, 423-439 (1986).

[29] V. G. Dmitriev, G. G. Gurzadyan et D. N. Nikogosyan, *Handbook of nonlinear optical crystals* (Springer-Verlag, Berlin, 1991).

[30] P. Donnat, *Quelques contributions mathématiques à l'optique non-linéaire*, thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 1993.

[31] P. Donnat et J. Rauch, *Dispersive nonlinear geometric optics*, J. Math. Phys. **38**, 1484-1523 (1997).

[32] L. B. Dozier et F. D. Tappert, *Statistics of normal mode amplitudes in a random ocean, I Theory (II Computations)*, J. Acoust. Soc. Am. **63**, 353-365 (1978); **64**, 533-547 (1978).

[33] P. Drummond, T. Kennedy et J. Dudley, *Cross-phase modulational instability in high-birefringence fibers*, Optics Commun. **78**, 137-144 (1990).

[34] V. Enss et K. Veselić, *Bound states and propagating states for time-dependent Hamiltonians*, Ann. Inst. H. Poincaré A **39**, 159-191 (1983).

[35] S. N. Ethier et T. G. Kurtz, *Markov processes* (Wiley, New York, 1986).

[36] W. G. Faris et W. J. Tsay, *Time delay in random scattering*, SIAM J. Appl. Math. **54**, 443-455 (1994).

[37] W. Feller, *Introduction to probability theory and its applications* (Wiley, New York, 1971).

[38] D. Freedman, *Markov processes* (Holden-Day, San Francisco, 1971).

[39] A. T. Friberg et R. J. Sudol, *Propagation parameters of Gaussian Schell-model beams*, Opt. Commun. **41**, 383-387 (1982).

[40] H. Furstenberg, *Noncommuting random products*, Trans. Amer. Math. Soc. **108**, 377-428 (1963).

[41] A. Ghatak et K. Thyagarajan, *Graded index optical waveguides: a review*, dans Progress in Optics, Vol. XVIII, E. Wolf, ed., North Holland, Amsterdam, 1980, pp. 1-126.

[42] J. Glimm et A. Jaffe, *Quantum physics, a functional integral point of view* (Springer, New York, 1981).

[43] D. E. Goldberg, *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning* (Addison Wesley, Reading, Massachusettes, 1989).

[44] D. E. Goldberg *The race, the Hurdle and the sweet spot: Lessons from genetic algorithms for the automation of design innovation and creativity*, Illinois University, rapport interne 98007, 1998.

[45] D. E. Goldberg et K. Deb, *A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms*, dans Foundations of Genetic Algorithms, G. J. E. Rawlins, ed., Morgan Kaufmann, 1991, pp. 69-93.

[46] J. W. Goodman, *Statistical properties of laser speckle patterns*, dans Laser speckle and related phenomena, J. C. Dainty, ed. Topics in Applied physics **9**, Springer-Verlag, 1984, pp. 9-75.

[47] F. Gori, *Mode propagation of the field generated by Collet-Wolf Schell-model sources*, Opt. Commun. **46**, 149-154 (1983).

[48] F. Gori, G. Guattari et C. Padovani, *Modal expansion for $J_0$-correlatex Schell-model sources*, J. Opt. Soc. Am. A **3**, 311-316 (1987).

[49] F. Gori, M. Santarsiero, R. Borghi et S. Vicalvi, *Partially coherent sources with helicoidal modes*, J. Mod. Opt. **35**, 539-554 (1998).

[50] S. A. Gredeskul et Y. U. Kivshar, *Propagation and scattering of nonlinear waves in disordered systems*, Phys Rep. **216**, 1-61 (1992).

[51] S. A. Gredeskul, Y. U. Kivshar, A. Sánchez et L. Vásquez, *Localization decay induced by strong nonlinearity in disordered systems*, Phys. Rev. Lett. **64**, 1693-1696 (1990).

[52] J. E. Groell, *A circular harmonic computer analysis for rectangular dielectric waveguides*, Bell. Syst. Tech. J. **48** (1968).

[53] G. A. Hagedorn, M. Loss et J. Slawny, *Non-stochasticity of time-dependent quadratic Hamiltonians and the spectra of canonical transformations*, J. Phys. A **19**, 521-531 (1986).

[54] A. Hasegawa, *Optical solitons in fibers* (Springer, Berlin, 1989).

[55] A. Hasegawa et F. Tappert, *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers, I; Anomalous dispersion*, Appl. Phys. Lett. **23**, 142-144 (1973).

[56] R.M. Hervé et M. Hervé, *A mathematical treatment for a perturbation of the one-dimensional harmonic oscillator*, J. Math. Phys. **32**, 956-958 (1991).

[57] R. Hirota et J. Satsuma, *N-soliton solution of nonlinear network equations describing a Volterra system*, J. Phys. Soc. Japan **40**, 891-900 (1976).

[58] R. Hirota et J. Suzuki, *Studies on lattice solitons by using electrical networks*, J. Phys. Soc. Japan **28**, 1366-1369 (1970).

[59] J. H. Holland, *Adaptation in natural and artificial systems* (University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975).

[60] J. Horn, D. E. Goldberg et K. Deb, *Long path problems*, Proceedings of the $4^{th}$ Conference on Parallel Problems solving from Nature, volume 1141 of LCNS, édités par Y. Davidor, H.-P. Schwefel and R. Manner, Springer Verlag, Berlin, 1994, pages 149-158.

[61] M. Iosifescu, *Finite Markov processes and their applications* (Wiley, Bucarest, 1980).

[62] J. Jauch, K. Sinha et B. Misra, *Time delay in scattering processes*, Helv. Phys. Acta **45**, 398-426 (1972).

[63] N. S. Kapany, *Fiber optics* (Academic Press, New York, 1967).

[64] M. Karlsson, *Four-wave mixing in fibers with randomly varying zero-dispersion wavelength*, J. Opt. Soc. Am. B **15**, 2269-2275 (1998).

[65] V. I. Karpman, *Soliton evolution in the presence of perturbations*, Phys. Scr. **20**, 462-478 (1979).

[66] J. G. Kemeny et J. L. Snell, *Finite Markov chains* (Van Nostrand, Princeton, 1960).

[67] Y. U. Kivshar, A. M. Kosevich et O. A. Chubykalo, *Resonant and non resonant soliton scattering by impurities*, Phys. Lett. A **125**, 35-40 (1987).

[68] V. I. Klyatskin, *Ondes et équations stochastiques dans les milieux aléatoirement non homogènes* (Nauka, Moscou, 1980).

[69] R. Knapp, G. Papanicolaou et B. White, *Nonlinearity and localization in one dimensional random media*, dans *Disorder and nonlinearity*, A. R. Bishop, D. K. Campbell et S. Pnevmaticos, eds., Springer, 1989, pp. 2-26.

[70] Y. Kodama, A. Maruta et A. Hasegawa, *Long distance communications with solitons*, Quantum and Semiclassical Optics **6**, 463-516 (1994).

[71] W. Kohler, *Propagation in a randomly perturbed multimode matched waveguide*, Wave Motion **4**, 243-263 (1982).

[72] W. Kohler et G. Papanicolaou, *Power statistics for wave propagation in one dimension and comparison with transport theory*, J. Math. Phys. **14**, 1733-1745 (1973); **15**, 2186-2197 (1974).

[73] D. J. Korteweg et G. deVries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type long stationary waves*, Philos. Mag. Ser. **5**, 422-443 (1895).

[74] H. J. Kushner, *Approximation and weak convergence methods for random processes* (MIT Press, Cambridge, 1984).

[75] T. I. Lakoba et D. J. Kaup, *Perturbbbbation theory for the Manakov soliton and its applications to pulse propagation in randomly birefringent fibers*, Phys. Rev. E **56**, 6147-6165 (1997).

[76] R. H. Lehmberg, A. J. Schmitt et S. E. Bodner, *Theory of induced spatial incoherence*, J. Appl. Phys. **62**, 2680-2701 (1987).

[77] S. J. Louis et G. J. E. Rawlins, *Predicting Convergence Time for Genetic Algorithms*, dans Foundations of Genetic Algorithms 2, L. D. Whitley, ed., Morgan Kaufmann, 1993, pp. 141-161.

[78] D. W. McLaughlin, *A stochastic Gaussian beam II*, J. Math. Phys. **16**, 100-103 (1975).

[79] G. B. Malykin, V. I. Pozdnyakova et I. A. Shereshevskii, *Mathematical simulation of random coupling between polarization modes in single-mode fiber waveguides*, Optics and Spectroscopy **83**, 780-789 (1997).

[80] S. V. Manakov, S. Novikov, J. P. Pitaevskii et V. E. Zakharov, *Theory of solitons* (Consultants Bureau, New York, 1984).

[81] D. Marcuse, *Light transmission optics* (Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1982).

[82] R. Mazar et B. Katz, *Ray-mode analysis of a random medium waveguide*, J. Acoust. Soc. Am. **95**, 2495-2504 (1994).

[83] A. Messiah, *Quantum Mechanics* (North Holland, Amsterdam, 1962).

[84] D. Middleton, *Introduction to statistical communication theory* (Mc Graw Hill, New York, 1960).

[85] G. Millot, E. Seve, S. Wabnitz et M. Haelterman, *Observation of induced modulational polarization instabilities and pulse-train generation in the normal-dispersion regime of a birefringent optical fiber*, J. Opt. Soc. Am. B **15**, 1266-1275 (1998).

[86] T. S. Misirpashaev et C. W. J. Beenakker, *Reflectance fluctuations in an absorbing random waveguide*, JETP Letters **64**, 319-324 (1996).

[87] L. F. Mollenauer, K. Smith, J. P. Gordon et C. R. Menyuk, *Resistance of solitons of the effects of polarization dispersion in optical fibers*, Opt. Lett. **14**, 1219-1221 (1989).

[88] D. B. Mortimore et J. W. Arkwright, *Theory and fabrication of wavelengh flattened by 1 / N single-mode couplers*, Appl. Opt. **29**, 1814-1821 (1991).

[89] N. Mott, *Conduction in non-crystalline materials*, (Oxford University Press, Oxford, 1987).

[90] M. G. Nerurkar et H. R. Jauslin, *Stability of oscillators driven by ergodic processes*, J. Math. Phys. **35**, 628-645 (1994).

[91] A. C. Newell et J. V. Moloney, *Nonlinear optics* (Advanced Topics in the Interdisciplinary Mathematical Science, Addison-Wesley, 1992).

[92] G. Papanicolaou, *A kinetic theory for power transfer in stochastic systems*, J. Math. Phys. **13**, 1912-1918 (1972).

[93] G. Papanicolaou, *Waves in one-dimensional random media*, dans *Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour*, P. L. Hennequin, ed., Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1988, pp. 205-275.

[94] G. Papanicolaou et W. Kohler, *Asymptotic theory of mixing stochastic ordinary differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **27**, 641-668 (1974).

[95] G. Papanicolaou, D. McLaughlin et R. Burridge, *A stochastic Gaussian beam*, J. Math. Phys. **14**, 84-89 (1973).

[96] C. A. Pillet, *Some results on the quantum dynamics of a particle in a Markovian potential*, Commun. Math. Phys. **102**, 237-254 (1985).

[97] C. A. Pillet, *Asymptotic completeness for a quantum particle in a Markovian short range potential*, Commun. Math. Phys. **105**, 259-280 (1986).

[98] I. Rechenberg, *Evolutionstrategie: Optimierung Technisher Systeme nach Prinzipien des Biologischen Evolution* (Fromman-Holzboog Verlag, Stuttgart, 1973).

[99] H. A. Rose et D. F. DuBois, *Statistical properties of laser hot spots produced by a random phase plate*, Phys. Fluids B **5**, 590-596 (1993).

[100] J. E. Rothenberg, *Modulational instability for normal dispersion*, Phys. Rev. Lett. **64**, 813-817 (1987).

[101] G. Rudolph, *Convergence of non-elitist strategies*, dans Proceedings of the First IEEE International Conference on Evolutionary Computation, Z. Michalewicz, J. D. Schaffer, H.-P. Schwefel, D. B. Fogel et H. Kitano, eds., IEEE Press, 1994, pp. 63-66.

[102] G. Rudolph, *How Mutation and Selection Solve Long Path Problems in Polynomial Expected Time*, Evolutionary Computation **4**, 195-205 (1996).

[103] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* (Mac Graw Hill, New York, 1968).

[104] A. E. Siegman, *Lasers*, (University Science Books Mill Valley, California, 1986).

[105] R. Simon et N. Mukunda, *Twisted Gaussian Schell-model sources*, J. Opt. Soc. Am. A **10**, 95-109 (1993).

[106] S. Skupsky, R. W. Short, T. Kessler, R. S. Craxton, S. Letzring et J. M. Soures, *Improved laser-beam uniformity using the angular dispersion of frequency-modulated light*, J. Appl. Phys. **66**, 3456-3462 (1989).

[107] D. Thierens et D. E. Goldberg, *Mixing in Genetic Algorithms*, dans Proceedings of the $5^{th}$ International Conference on Genetic Algorithms, S. Forrest, ed., Morgan Kaufman, 1993, pp. 38-55.

[108] V. N. Tutubalin, *On limit theorems for products of random matrices*, Theory Prob. Appl. **10**, 15-27 (1965).

[109] D. Véron, H. Ayral, C. Gouédard, D. Husson, J. Lauriou, O. Martin, B. Meyer, M. Rostaing et C. Sauteret, *Improved laser-beam uniformity using the angular dispersion of frequency-modulated light*, Opt. Commun. **65**, 42-45 (1988).

[110] D. Véron, G. Thiell et C. Gouédard, *Optical smoothing of the high power Phebus Nd-glass laser using the multimode optical fiber technique*, Optics Comm. **97**, 259-271 (1993).

[111] L. Videau, *Le lissage optique pour les chaînes laser de puissance*, thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 1998.

[112] P. K. Wai, C. R. Menyuk et H. H. Chen, *Stability of solitons in randomly varying birefringent fibers*, Opt. Lett. **16**, 1231-1234 (1991).

[113] V. E. Zakharov, *Collapse of Langmuir waves*, Sov. Phys. JETP **35**, 908-914 (1972).

[114] V. E. Zakharov et A. B. Shabat, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Sov. Phys. JETP **34**, 62-69 (1972).

[115] V. E. Zakharov et A. B. Shabat, *Interaction between solitons in a stable medium*, Sov. Phys. JETP **37**, 823-828 (1973).