Examen du cours "Théorie de Perron-Frobenius non-linéaire pour le contrôle optimal et les jeux"

S. Gaubert
Stephane.Gaubert@inria.fr
M2 OJME

Vendredi 16 Mars 2012
Durée: 3 h 00

1 Minimisation de la croissance

On représente l'état d'une population à l'instant t par un vecteur $X(t) := (X_i(t))_{i\in[n]} \in \mathbb{R}^n_+$. Ici, $[n] := \{1,\dots,n\}$, $i \in [n]$ représente le type d'un individu, et $X_i(t)$ représente le nombre d'individus de type i. On considère la situation où cette population est nuisible (il peut s'agir de cellules tumorales, de parasites, etc.) et l'on va chercher à minimiser sa croissance.

On supposera pour cela que la population est gouvernée par une dynamique de la forme

$$X(t) = F(X(t-1)) \enspace ,$$

avec, pour $Y \in \mathbb{R}^n_+$,

$$F_i(Y) = \min_{\alpha\in A_i} \sum_{j\in[n]} M^\alpha_{ij} Y_j \enspace ,$$

où les ensembles A_i et les coefficients $M^\alpha_{ij} \geq 0$ sont donnés (on prendra garde que l'exposant α dans M^α_{ij} désigne un simple indice, et non pas une puissance). Ceci s'interprète en disant qu'à chaque instant, un opérateur choisit un contrôle $\alpha \in A_i$ dépendant du type i, et cherche à minimiser la population $\sum_{j\in[n]} M^\alpha_{ij} X_j(t-1)$. *L'espace des actions A_i sera toujours supposé fini.*

On s'intéresse au log de la population:

$$x(t) := \log X(t), \qquad \text{i.e.}$$

(dans la suite, les notations log et exp pour des vecteurs s'entendent composante par composante, en l'occurrence, $x_i(t) := \log X_i(t)$), et à la dynamique "en coordonnées logarithmiques"

$$x(t) = f(x(t-1))$$

avec

$$f_i(y) := \min_{\alpha\in A_i} \log(\sum_{j\in[n]} M^\alpha_{ij} \exp(y_j))$$

1.1 Cas de matrices à coefficients strictement positifs

Dans cette sous-section, on supposera que tous les coefficients M^α_{ij} sont strictement positifs.

Question 1. Déduire d'un théorème du cours qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(u) = \lambda + u$$

Question 2. En déduire que pour toute population initiale $X(0)$ telle que $X_i(0) > 0$, pour tout $i \in [n]$, on a

$$\lim_{t\to\infty} (X_i(t))^{1/t} = \exp(\lambda) \qquad \forall i \in [n] \tag{1}$$

Interpréter.

On appelle *stratégie* une application $\sigma : [n] \to \cup_i A_i$ telle que $\sigma(i) \in A_i$, et l'on associe à une telle stratégie la matrice $M^{(\sigma)}$ de coefficients $M^{(\sigma)}_{ij} := M^{\sigma(i)}_{ij}$. On désigne par $\rho(M^{(\sigma)})$ l'unique valeur propre de $M^{(\sigma)}$ associée à un vecteur propre à coordonnées strictement positives.

Question 3. Montrer que pour toute stratégie σ,

$$\exp(\lambda) \leq \rho(M^{(\sigma)}) \enspace .$$

Question 4. Montrer qu'il existe une stratégie σ telle que

$$f(u) = \log M^{(\sigma)}(\exp(u))$$

(u est le vecteur de la Question 1) et conclure que

$$\exp(\lambda) = \min_\sigma \rho(M^{(\sigma)}) \enspace .$$

où le min est pris sur l'ensemble des stratégies.

1.2 Cas de matrices dégénérées

On suppose dans cette sous-section que pour tout $\alpha \in A_i$, il existe un unique indice $j \in [n]$ tel que le coefficient M^α_{ij} soit non-nul. On définit le graphe G d'ensemble de nœuds $[n]$ avec un arc $i \to j$ s'il existe $\alpha \in A_i$ et $j \in [n]$ tel que $M^\alpha_{ij} > 0$, et l'on suppose ce graphe fortement connexe.

Question 5. Montrer que dans ce cas, la limite (1) existe, et montrer que λ est donné par une formule combinatoire très simple. Expliciter λ lorsque $n = 2$ et

$$F_1(X) = \min(3X_1, X_2), \qquad F_2(X) = \min(2X_1, 7X_2) \enspace .$$

1.3 Cas général: approximation par un jeu à espace d'actions fini

Nous considérons maintenant la situation où les coefficients M^α_{ij} sont positifs ou nuls, et sont tels que pour tout $i \in [n]$ et pour tout $\alpha \in A_i$, il existe au moins un coefficient $M^\alpha_{ij} > 0$,

Question 6. Montrer par un argument général que les limites

$$\lim_{t\to\infty} (\max_{i\in[n]} X_i(t))^{1/t}$$

$$\lim_{t\to\infty} (\min_{i\in[n]} X_i(t))^{1/t}$$

existent (on suppose toujours $X_i(0) > 0$ pour tout $i \in [n]$).

Nous allons maintenant interpréter f comme un opérateur de jeu. Pour cela, on note

$$\Sigma := \{p \in \mathbb{R}^n \mid p_i \geq 0, \forall i, \ \sum_{j\in[n]} p_j = 1\}$$

le simplexe, et on désigne par

$$S(p) := \sum_{j\in[n]} p_j \log p_j$$

l'entropie de $p \in \Sigma$. En outre, pour $q \in \mathbb{R}^n_+$, on désigne par $S(p;q)$ l'entropie relative

$$S(p;q) := \sum_{j\in[n]} p_j \log(p_j/q_j) \ .$$

Question 7. Montrer que

$$\log(e^{y_1} + \cdots + e^{y_n}) = \sup_{p\in\Sigma}(p\cdot y - S(p)) \ .$$

Question 8. En déduire que

$$f_i(y) = \min_{\alpha\in A_i} \max_{p\in\Sigma} \left(p\cdot y - S(p; M_i^\alpha)\right)$$

où $M_i^\alpha := (M_{ij}^\alpha)_{j\in[n]}$ est vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^n_+$.

Interpréter f comme l'opérateur journalier d'un jeu stochastique (on explicitera actions, paiments, probabilités de transition, information des joueurs).

Notre but est maintenant de montrer que la limite

$$\chi(f) := \lim_{k\to\infty} f^k(0)/k$$

existe.

Nous dirons qu'une application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est *affine par morceaux* si l'on peut couvrir $\mathbb{R}^n$ par un nombre fini de polyèdres de telle sort que g soit affine sur chacun de ces polyèdres. Nous admettrons un théorème dû à Kohlberg: si g est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ contractante au sens large pour une norme quelconque, et si g est affine par morceaux, alors g admet une demi-droite invariante, ce qui signifie qu'il existe des vecteurs $v, \eta \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$g(v + t\eta) = v + (t+1)\eta, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+ \ . \tag{2}$$

Question 9. Montrer que sous les hypothèses du théorème de Kohlberg, $\chi(g)$ existe et est égal à η.

Étant donné un sous-ensemble *fini* $F \subset \Sigma$, on définit l'opérateur approché $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$g_i(y) = \min_{\alpha\in A_i} \max_{p\in F} \left(p\cdot y - S(p; M_i^\alpha)\right)$$

Question 10. Montrer que pour cette dernière application g, $\chi(g)$ existe.

Question 11. Montrer que pour tout choix de l'ensemble fini $F \subset \Sigma$, on a $g \leq f$ et

$$\chi(g) \leq \liminf_{k\to\infty} f^k(x)/k \ .$$

Question 12. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on peut choisir $\delta > 0$ tel que pour tout $i \in [n]$, et pour tout $\alpha \in A_i$,

$$\|p - q\| \leq \delta, p, q \in \Sigma \implies |S_i(p; M_i^\alpha) - S_i(q; M_i^\alpha)| \leq \epsilon \ . \tag{3}$$

Question 13. Montrer que pour tout δ, on peut trouver des sous-ensembles finis $F_1, \ldots, F_k$ du simplexe Σ tels que $\mathrm{co}(F_1) \cup \cdots \cup \mathrm{co}(F_k) = \Sigma$, et tels que chaque ensemble F_j, $j \in [k]$, soit de diamètre au plus δ. (On désigne par $\mathrm{co}(F_j)$ l'enveloppe convexe de F_j). On pourra se contenter d'expliquer l'argument sur un dessin lorsque $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ et $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

Question 14. Montrer que si $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ est choisi comme dans la question précédente, δ vérifiant (3), alors $f \leq g + \epsilon$.

Question 15. Montrer qu'on a alors:

$$\limsup_{k\to\infty} f^k(x)/k \leq \chi(g) + \epsilon \ .$$

Question 16. Conclure que $\chi(f)$ existe. Qu'en concluez vous pour

$$\lim_{t\to\infty} (X_i(t))^{1/t}?$$

2 Des polyèdres tropicaux aux jeux combinatoire à somme nulle

2.1 *Convexes tropicaux*

Les trois premières questions sont utiles pour comprendre comment dessiner les convexes tropicaux, cependant, les questions suivantes peuvent être abordées directement.

Une droite affine tropicale de paramètres a, b, c est le lieu des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que le maximum dans l'expression

$$\max(a + x, b + y, c)$$

soit atteint au moins deux fois.

Question 17. Dessiner une droite tropicale, par exemple pour $a = 0, b = 1, c = 3$. Par deux points, passe-t-il une unique droite tropicale?

Si u, v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n_{\max}$, on définit le *segment* $[u, v]$ comme l'ensemble des vecteurs de la forme

$$\sup(\lambda + u, \mu + v)$$

où λ, μ sont des scalaires de $\mathbb{R}_{\max}$, assujettis à la condition $\max(\lambda, \mu) = 0$.

Question 18. Dessiner les trois segments $[(0,1),(1,0)]$, $[(1,0),(2,2)]$, $[(0,1),(2,2)]$. Expliciter la règle très simple qui, lorsque les points u, v sont en position générique (i.e., sauf dans des cas dégénérés), permet de tracer le segment $[u, v]$ à partir de l'unique droite tropicale passant par u et v.

Un sous-ensemble K de $\mathbb{R}^n_{\max}$ est dit convexe tropical si

$$u, v \in K \implies [u, v] \in K \ .$$

Question 19. Dessiner le plus petit convexe tropical contenant les points $(0,1),(1,0),(1.5,1),(2,2)$.

Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n_{\max}$ est un cône convexe tropical si des que $u,v\in C$, le vecteur

$$\sup(\lambda+u,\mu+v)$$

où λ,μ sont des scalaires de $\mathbb{R}_{\max}$ quelconques (on ne demande plus que $\max(\lambda,\mu)=0$), appartient encore à C.

La question suivante montre que traiter les convexes tropicaux est équivalent à traiter des cônes convexes tropicaux, comme dans le cas de la convexité classique.

Question 20. Montrer que si C est un cône convexe tropical de $\mathbb{R}^n_{\max}$, alors $K(C):=\{x\in C\mid x_n=0\}$ est un ensemble convexe tropical.

Montrer réciproquement que si K est un sous-ensemble convexe tropical de $\mathbb{R}^n_{\max}$, alors

$$V(K):=\{(x+\lambda,\lambda)\in\mathbb{R}^n_{\max}\times\mathbb{R}_{\max}\mid\lambda\in\mathbb{R}_{\max},x\in K\}$$

est un cone convexe tropical de $\mathbb{R}^{n+1}_{\max}$ (identifié à $\mathbb{R}^n_{\max}\times\mathbb{R}_{\max}$).

Nous nous bornerons donc à étudier les cônes convexes tropicaux dans ce qui suit.

2.2 Algorithme de projection cyclique

On se donne C un cône convexe tropical de $\mathbb{R}^n_{\max}$, fermé pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n_{\max}$ (c'est la topologie obtenue en identifiant $\mathbb{R}^n_{\max}$ à $\mathbb{R}^n_+$ par l'application exponentielle, et en munissant $\mathbb{R}^n_+$ de la topologie usuelle).

Question 21. Si $x\in\mathbb{R}^n_{\max}$, on définit le projeté de x sur C comme le vecteur

$$P_C(x):=\max\{v\in C\mid v\le x\}\enspace .$$

Montrer que l'on a bien le droit d'écrire "max" (autrement dit, que l'ensemble de vecteurs en question admet un plus grand élément), et montrer que x est dans C si et seulement si $x=P_C(x)$. Montrer que P_C est croissant et commute avec l'addition d'une constante.

Si U est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n_{\max}$, on note $\mathrm{cone}(U)$ le cone convexe tropical engendré par U, lequel coïncide avec l'ensemble des combinaisons linéaires tropicales d'un nombre fini d'éléments de U, i.e., l'ensemble des vecteurs de la forme

$$\sup(\lambda_1+u^1,\dots,\lambda_m+u^m),$$

avec $u^1,\dots,u^m\in U$, $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbb{R}_{\max}$. Lorsque U est fini, $\mathrm{cone}(U)$ est dit être finiment engendré.

Question 22. Montrons l'analogue suivant (plus facile que dans le cas classique) du théorème de Carathéodory: si un point de $\mathbb{R}^n_{\max}$ est dans le cone convexe tropical engendré par un ensemble U, alors, il est encore dans le cone convexe tropical engendré par au plus n vecteurs de U.

Question 23. Montrer qu'un cône convexe tropical finiment engendré est fermé.

Question 24. Montrer que si le cône convexe tropical C de $\mathbb{R}^n_{\max}$ est engendré par les vecteurs $u^1,\dots,u^m$, alors $P_C(x)$ est donné par la formule suivante

$$P_C(x)=\sup_{1\le k\le m}(x/u^k)+u^k$$

où pour $x,y\in\mathbb{R}^n_{\max}$, on note:

$$x/y=\min_{1\le j\le n}x_j-y_j\enspace ,$$

avec ici la convention $-\infty+(-\infty)=+\infty$.

Indication. On pourra prouver d'abord le résultat lorsque C est engendré par un unique vecteur.

Un problème classique en analyse convexe consiste à calculer un point dans l'intersection de deux convexes, souvent, on sait projeter explicitement sur chacun des deux convexes, mais l'on ne sait pas projeter sur l'intersection. Un algorithme élégant qui résoud cette difficulté est fondé sur l'idee de projection cyclique. Nous allons voir que la même idée marche dans le cas tropical.

Soient C_1,C_2 des cônes convexes tropicaux fermés. On propose l'algorithme suivant pour déterminer un vecteur non-trivial (ie distinct de $\mathbb{0}:=(-\infty,\dots,-\infty)$) dans $C_1\cap C_2$.

On part de $x^0\in\mathbb{R}^n_{\max}$, tel que $x^0\neq\mathbb{0}$. On forme la suite $x^1=P_{C_1}(x^0)$, $x^2=P_{C_2}(x^1)$, $x^3=P_{C_1}(x^2)$, $x^4=P_{C_2}(c^3)$, etc. (on projette alternativement sur C_1 et C_2).

Question 25. Montrer que la suite x^k est décroissante, qu'elle converge vers $\mathbb{0}$ si $C_1\cap C_2=\{\mathbb{0}\}$, et que sinon elle converge vers un vecteur de $C_1\cap C_2$ différent de $\mathbb{0}$.

On rappelle la version additive de la formule de Collatz-Wielandt. Si f est une application continue de $(\mathbb{R}\cup\{-\infty\})^n$ dans lui même, préservant l'ordre usuelle, et commutant avec l'addition d'une constante, alors

$$\rho(f)=\mathrm{cw}(f)$$

où $\mathrm{cw}(f)$ désigne le plus petit réel λ tel qu'il existe $u\in\mathbb{R}^n$ tel que $f(u)\le\lambda+u$, et $\rho(f)$ désigne le plus grand $\mu\in\mathbb{R}_{\max}$ tel qu'il existe $u\in\mathbb{R}^n_{\max}\setminus\{\mathbb{0}\}$ tel que $f(u)=\mu+u$.

Question 26. Montrer que $C_1\cap C_2=\{\mathbb{0}\}$ si et seulement si il existe un indice k tel que $x^k_i<x^0_i$, pour tout $1\le i\le n$.

Quel est l'intérêt de ce résultat d'un point de vue algorithmique?

2.3 Polyèdres tropicaux et jeux à somme nulle

Nous appelerons cône polyèdral tropical un cône convexe tropical de la forme

$$P:=\{x\in\mathbb{R}^n_{\max}\mid Ax\le Bx\}$$

où A,B sont des matrices max-plus $m\times n$, ie,

$$(Ax)_i=\max_{1\le j\le n}A_{ij}+x_j,\qquad 1\le i\le m,$$

et de même pour B. On appelle *adjoint* de A l'opérateur min-plus linéaire

$$A^\sharp:\mathbb{R}^m_{\max}\to\mathbb{R}^n_{\max},\ \ (A^\sharp z)_i=\min_{1\le j\le m}-A_{ji}+z_j\enspace ,$$

pour $1 \leq i \leq n$. Observer que $A^\sharp$ envoie bien $\mathbb{R}^m_{\max}$ vers $\mathbb{R}^n_{\max}$ si A n'a aucune colonne identiquement $-\infty$, ce que nous supposerons désormais. Il sera commode aussi de supposer que B n'a aucune ligne identiquement $-\infty$.

Question 27. Montrer que $Ax \leq Bx$ si et seulement si $x \leq f(x)$, où f est l'opérateur défini par:

$$f(x) = A^\sharp \circ B(x) \ .$$

Question 28. Montrer que f peut s'interpréter comme l'opérateur de la programmation dynamique d'un jeu déterministe à deux joueurs, qui se joue sur un graphe avec $m+n$ noeuds, et que l'on explicitera (états, paiments, transitions?).

On admet l'existence du vecteur $\chi(f) = \lim_k f^k(y)/k$, pour $y \in \mathbb{R}^n$, ainsi que le théorème de Kohlberg rappelé dans le premier problème (cf. (2)).

Question 29. Montrer que le polyèdre tropical P contient un vecteur différent de zero si et seulement si le vecteur $\chi(f)$ a au moins une coordonnée positive ou nulle. (Autrement dit: décider si P est non-trivial est équivalent à résoudre un jeu répété.) Indication: lorsque $\eta_i \geq 0$, on pourra construire un vecteur u dans P (dont certaines coordonnées peuvent être $-\infty$) à partir de la demi-droite invariante v et η du théorème de Kohlberg.