Examen du cours "Théorie de Perron-Frobenius non-linéaire pour le contrôle optimal et les jeux"

S. Gaubert
Stephane.Gaubert@inria.fr
M2 OJME

Mercredi 3 Avril 2013
Durée: 3 h 00

1 Gains ergodiques et optimisation du pagerank

1.1 *Caractérisation et calcul du pagerank*

Pour classer les pages de la toile, Sergey Brin et Larry Page, les fondateurs de Google, on proposé le modèle suivant, qui permet d'associer à chaque page un indice de popularité appelé pagerank. Lors d'une requète, parmi les pages pertinentes, le moteur de recherche liste en priorité les pages les plus populaires.

La toile sera vue comme un graphe avec n nœuds représentant les pages (par exemple des documents html). On met un arc de i à j quand la page i contient un hyperlien vers la page j. Rappelons qu'un hyperlien est un pointeur vers une autre page, en cliquant sur l'hyperlien, on est redirigé vers cette dernière. On note N_i le nombre d'hyperliens présents dans la page i, que l'on suppose être toujours non-nul. On se donne un paramètre $\gamma \in [0,1]$, appelé probabilité de zapping, ainsi qu'un vecteur de probabilité $\pi \in \mathbb{R}^n$. On note Q la matrice stochastique telle que $Q_{ij} = N_i^{-1}$ s'il y a un hyperlien de i vers j, et $Q_{ij} = 0$ sinon. On définit finalement la matrice stochastique

$$P_{ij} = (1-\gamma)Q_{ij} + \gamma\pi_j \enspace .$$

On considère un promeneur surfant aleatoirement sur le web, dont la suite des pages visitées est une chaine de Markov de matrice de transition P. Soit $m \in \mathbb{R}_+^n$ un vecteur ligne solution de $mP = m$, avec $\sum_{1\leq i\leq n} m_i = 1$. Le *pagerank* de la page $i \in \{1,\dots,n\}$ est défini comme étant m_i.

Question 1. Interpréter très simplement la forme de Q_{ij} et de P_{ij} en terme de comportement du promeneur aléatoire. En particulier, que représentent concrètement la probabilité de zapping γ et la probabilité π_j?

Question 2. Démontrer que le vecteur m est défini de manière unique, quelle que soit la valeur de $\gamma \in [0,1]$, pourvu que le graphe du web soit fortement connexe.

Il s'agit maintenant de calculer le vecteur $m \in \mathbb{R}_+^n$, sachant que le nombre n de pages du web peut être très gros (de l'ordre de 8×10^{10} en 2012).

Question 3. Donner un contre-exemple de graphe du web fortement connexe, pour lequel, lorsque $\gamma = 0$, l'itération de point fixe:

$$m^{k+1} = m^k P$$

initialisée avec un vecteur de probabilité quelconque, ne converge pas toujours vers la mesure invariante de P. Indication: il existe un contre-exemple avec $n = 2$.

Question 4. Démontrer que $m \mapsto mP$ est une contraction de taux $1-\gamma$ pour la norme L_1. Conclure que la mesure invariante m est unique même si le graphe du web n'est pas fortement connexe, dès lors que $\gamma > 0$. Que concluez vous quant à l'itération de point fixe $m^{k+1} = m^k P$?

La question suivante donne une méthode alternative de calcul du pagerank m_i.

Question 5. Définissons le vecteur $r \in \mathbb{R}^n$ tel que $r_j = 1$ si $j = i$ et $r_j = 0$ sinon.

Démontrer que si le graphe du web est fortement connexe, il existe un unique scalaire λ tel qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda e + u = r + Pu$. Démontrer en outre que $\lambda = m_i$. (Comme dans le cours, e désigne le vecteur dont toutes les composantes valent 1).

Question 6. Démontrer que l'application $x \mapsto r + Px$ est une contraction de taux $1-\gamma$ pour la semi-norme de Hilbert

$$\|x\|_H = \max_{1\leq i\leq n} x_i - \min_{1\leq i\leq n} x_i \enspace .$$

En déduire un algorithme itératif permettant de calculer u ainsi que λ.

1.2 *Optimisation du référencement*

On suppose désormais que $\gamma > 0$.

Un administrateur contrôle un sous-ensemble $K \subset \{1,\dots,n\}$ de l'ensemble des n pages de la toile. Pour chaque page $k \in K$, on suppose donnés un ensemble non-vide $O_k \subset \{1,\dots,n\}$ d'hyperliens obligatoires (qui seront présent dans la page k de toute manière), et un ensemble $F_k \subset \{1,\dots,n\}$ d'hyperliens facultatif (que l'administrateur peut inclure ou pas). Une stratégie de référencement consiste, pour chaque $k \in K$, à choisir l'ensemble des liens facultatifs inclus dans la page k. Il y a donc autant de graphes du web possibles que de stratégies de référencement. Étant donné une page cible i fixée une fois pour toutes (par exemple, la page d'accueil d'un site commercial), le but de l'administrateur est de trouver l'ensemble des hyperliens facultatifs à inclure, afin de maximiser le pagerank de la page i (i.e., rajouter des liens pour que la page i apparaissent le plus haut possible lors d'une recherche google).

Question 7. Démontrer que la stratégie de référencement optimale peut être déterminée en résolvant le problème ergodique suivant: trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^n$ tels que $T(u) = \lambda e + u$, où T est l'opérateur de programmation dynamique associé à un problème de décision Markovienne à un joueur, que l'on explicitera. On demande en particulier d'expliciter les actions dans chaque page $k \in K$ et les revenus et probabilités de transition correspondantes.

Indication. Quand il n'y a aucune page contrôlée, i.e., $K = \emptyset$, on doit retrouver $T(x) = r + Px$, l'opérateur intervenant à la question précédente.

Question 8. Démontrer que T est une contraction de taux γ pour la semi-norme de Hilbert, et en déduire un algorithme itératif pour calculer u et λ.

Remarquons (ou admettons) que l'opérateur T précédent peut s'écrire sous la forme abstraite

$$T_j(x) = r_j + \max_{a \in A_j}((1-\gamma)q_j^a + \gamma\pi) \cdot x, \qquad 1 \leq j \leq n$$

où q_i^a est un vecteur de probabilité, $r_j \in \mathbb{R}$, et A_j un ensemble fini.

Question 9. Expliciter un algorithme d'itération sur les politiques permettant de calculer u et λ, pour un tel opérateur.

Question 10. Énoncer des hypothèses garantissant la convergence de cet algorithme d'itération sur les politiques, et démontrer cette convergence.

2 Points fixes d'applications semi-différentiables monotones additivement homogènes

On dit qu'une application continue T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est semi-différentiable au point v s'il existe une application g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ continue et positivement homogène de degré 1 (ce qui signifie que $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$) appelée *semi-différentielle* de T au point v, telle que l'on ait le développement limité

$$T(v + x) = T(v) + g(x) + o(\|x\|)$$

lorsque $x \to 0$. On entend par là:

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|T(v+x) - T(v) - g(x)\|}{\|x\|} = 0 \ .$$

Question 11. Montrer que $g(x)$ coincide nécessairement avce la dérivée directionnelle de T au point v dans la direction x:

$$g(x) = T'_v(x) := \lim_{s \to 0^+} s^{-1}(T(v + sx) - T(v)) \ . \qquad (1)$$

Considérons l'application max-plus linéaire:

$$T_i(x) = \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij} + x_j \ , \qquad (2)$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, la matrice $a = (a_{ij})$ ayant au moins un coefficient fini par ligne. Est-t-elle différentiable? Montrer qu'elle est semi-différentiable en tout point et calculer sa semi-différentielle. Indication: l'ensemble des indices j maximisant (2) au point $x = v$ doit jouer un rôle dans l'expression de T'_v.

Dans la suite, on utilisera la notation T'_v pour désigner la semi-différentielle de T au point v.

Question 12. Montrer que si T est localement Lipschitzienne au voisinage de v, la semi-différentiabilité de T au point v est équivalente à l'existence de la limite (1), pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Indication: appliquer le théorème d'Ascoli. Admettez le résultat de la question si vous ne connaissez pas ce théorème.

Question 13. Montrer que si T est une application continue semi-différentiable au point v, ayant v comme point fixe (i.e. $T(v) = v$), et si T'_v n'a pas d'autre point fixe que 0, alors v est un point fixe isolé de T (ce qui signifie qu'il existe un voisinage de v ne contenant pas d'autre point fixe de T).

Afin d'obtenir un résultat d'unicité globale et non locale du point fixe de T, nous supposerons désormais que T vérifie les propriétés de monotonie et de contraction au sens-large suivantes:

$$\begin{aligned} &(M) \qquad x \leq y \implies T(x) \leq T(y) \\ &(C) \qquad \|T(x) - T(y)\|_\infty \leq \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

Question 14. On suppose que T admet au moins un point fixe. On note E l'ensemble des points fixes de T. Montrer qu'il existe une application P de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés (M) et (C) et telle que $P = P^2$ et $P(\mathbb{R}^n) = E$. Indication. Considérer:

$$Q(x) = \sup_{k \geq 1} \inf_{\ell \geq k} T^\ell(x) \ ,$$

puis

$$P(x) = \lim_{k \to \infty} T^k(Q(x)) \ .$$

Question 15. En déduire que E est connexe par arcs, ce qui signifie que pour tous x et y dans E, il existe une application continue z d'un intervalle $I = [a, b]$ dans E telle que $z(a) = x$ et $z(b) = y$. Conclure que si v est un point fixe quelconque de T, et si T'_v a 0 pour unique point fixe, alors v est l'unique point fixe de T dans $\mathbb{R}^n$.

Considérons une application T de la forme

$$T(x) := \sup_{a \in A} r^a + P^a x \ , \qquad (3)$$

où A est un ensemble fini, $r^a \in \mathbb{R}^n$, et P^a est une matrice à coefficients positifs ou nuls, telle que chaque ligne de P^a soit de somme strictement inférieure à 1. On note $\rho < 1$ le maximum des sommes des lignes des matrices P^a, pour $a \in A$.

Question 16. Interpréter T comme un opérateur de programmation dynamique d'un problème de contrôle stochastique que l'on décrira précisément. Donner l'interprétation de ρ.

Question 17. Montrer que chaque application

$$T^a(x) := r^a + P^a x$$

vérifie

$$\|T^a(x) - T^a(y)\|_\infty \leq \rho \|x - y\|_\infty \ .$$

Que dire des points fixes de T^a?

Question 18. Montrer que si une application de la forme (3), telle que l'on ait la propriété de sélection:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \exists a \in A \qquad T(x) = T^a(x) \ ,$$

est telle que chaque T^a a un unique point fixe (on n'a pas besoin de supposer ici $\rho < 1$), alors T admet un point fixe. Indication. On pourra appliquer un argument d'itération sur les politiques.

Question 19. Calculer T'_v et montrer que

$$\|T'_v(x) - T'_v(y)\|_\infty \leq \rho \|x - y\|_\infty \ .$$

Question 20. Montrer que T a un unique point fixe.

Question 21. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\limsup_{k\to\infty} \|T^k(x) - v\|_\infty^{1/k} \leq \rho \ ,$$

où v désigne l'unique point fixe de T.

3 Problème de scaling DAD'

Soit A une matrice de taille $n \times p$, à coefficients positifs ou nuls, α et β des vecteurs de tailles respectives n et p, à coefficients strictement positifs.

On cherche un "scaling", c'est à dire des matrices diagonales D et D', de taille respectives $n \times n$ et $p \times p$, à coefficients diagonaux strictement positifs, telles que la matrice

$$B = DAD' : \qquad B_{ij} = D_{ii} A_{ij} D'_{jj}$$

aie des sommes par lignes et par colonnes prescrites comme suit:

$$\forall i, \ \alpha_i = \sum_j B_{ij}$$

$$\forall j, \ \beta_j = \sum_i B_{ij}$$

Ce problème est un cas simplifié d'identification de matrice de traffic: A_{ij} est le traffic de i à j l'an dernier, on voudrait identifier la matrice de traffic de l'année actuelle, B, mais on n'est capable de mesurer que les traffics entrants en i et sortant en j, α_i et β_j.

3.1 *Approche point-fixe*

Question 22. Montrer qu'une condition nécessaire pour que le problème soit soluble est que

$$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j \ .$$

Nous supposerons désormais cette condition vérifiée.

Question 23. On note $x = (x_1, \ldots, x_n)$ les coefficients diagonaux de la matrice D, et $y = (y_1, \ldots, y_p)$ les coefficients diagonaux de la matrice D'. Exprimer y en fonction de x. On note

$$J(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1})$$

et $\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $x_1, \ldots, x_n$. En déduire que les assertions suivantes sont équivalentes:

1. il existe une solution au problème de scaling;
2. il existe des vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ à coefficients strictements positifs tels que
$$x = \mathrm{diag}(\alpha) J(Ay) \qquad \text{et} \qquad y = \mathrm{diag}(\beta) J(A^T x)$$
3. L'opérateur F défini par
$$F(x) = \mathrm{diag}(\alpha) J\big(A\, \mathrm{diag}(\beta) J(A^T x)\big)$$
admet un point fixe à coefficients strictements positifs.

La *métrique projective de Hilbert* d_H sur $\mathbb{R}^n_{+*}$ est définie par

$$d_H(x, x') = \| \log x - \log x' \|_H$$

avec

$$\|u\|_H := \max_i u_i - \min_i u_i \ .$$

On admet un théorème de Birkhoff montrant que si tous les coefficients de A sont strictement positifs, l'application $x \mapsto Ax$ est strictement contractante pour la metrique projective de Hilbert: $d_H(Ax, Ax') \leq r d_H(x, x')$ avec $r < 1$.

On considère l'opérateur $T := \log \circ F \circ \exp$.

Question 24. Déduire du théorème de Birkhoff que, en supposant que tous les coefficients de A sont strictement positifs, T est une contraction stricte pour $\| \cdot \|_H$. En déduire qu'il existe un vecteur u, unique à une constante additive près, et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T(u) = \lambda e + u$. Conclure à l'existence et l'unicité du point fixe de F dans l'intérieur relatif du simplexe, $\mathrm{relint}\, \Sigma := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 + \cdots + x_n = 1, \ x_i > 0, \forall i\}$ (indication, montrer que $v = \exp(u)$ est point fixe de F).

Question 25. En déduire un algorithme itératif très simple pour calculer ce point fixe.

Question 26. Montrer que T est l'opérateur de Shapley associé à un jeu, dont on explicitera actions, paiements, et probabilités de transition.

3.2 *Maximisation de l'entropie: le problème DAD' retrouvé*

Soit la fonction d'une variable réelle:

$$\phi(r) = r \log r - r$$

On considère le problème d'optimisation

$$\min_Y \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \phi\Big(\frac{Y_{ij}}{A_{ij}}\Big) A_{ij} \ ,$$

le minimum étant pris sur l'ensemble des matrices $Y = (Y_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{n\times p}$ telles que

$$\forall i, \ \alpha_i = \sum_{1\leq j\leq p} Y_{ij}, \tag{4a}$$

$$\forall j, \ \sum_{1\leq i\leq n} Y_{ij} = \beta_j \ . \tag{4b}$$

Lorsque $A_{ij} = 0$, on convient que $\phi(Y_{ij}/A_{ij})A_{ij} = +\infty$, à moins que $Y_{ij} = 0$.

Question 27. Formuler le problème d'optimisation dual, obtenu en dualisant les contraintes (4). En étudiant ce problème dual, montrer que la solution $Y = (Y_{ij})$ du problème d'optimisation, si elle existe, est de la forme DAD'.