

# **THÈSE**

présentée à

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS**

par

**Stéphane GAUBERT**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS**

Spécialité:

**MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE**

Sujet de la thèse:

**THÉORIE DES SYSTÈMES LINÉAIRES  
DANS LES DIOÏDES**

soutenue le 1<sup>er</sup> Juillet 1992 devant le jury composé de:

MM. Michel MINOUX

Président et Rapporteur

Michel FLIESS

Michel VIOT

Rapporteurs

Guy COHEN

Geert Jan OLSDER

Jean-Pierre QUADRAT

Examinateurs

# Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes

## Résumé

On étudie les systèmes linéaires sur certaines structures de *dioïdes* (demi-anneaux dont l'addition est idempotente).

On étudie tout d'abord les systèmes d'équations linéaires dans certains dioïdes, pour lesquels on retrouve l'analogie de la théorie de Cramer à condition de se placer dans un dioïde *symétrisé*. On adapte les algorithmes itératifs usuels (Jacobi, Gauss-Seidel). On obtient des résultats de dualité. On étend par ailleurs aux matrices réductibles la théorie spectrale ( $\max, +$ ).

On étudie ensuite les systèmes dynamiques linéaires dans ces algèbres (représentation par des opérateurs à noyaux ou opérateurs de convolution, rôle de la transformée de Fenchel). On obtient à l'aide de résultats de symétrisation une borne inférieure pour la dimension minimale de réalisation.

L'on donne ensuite des algorithmes de calcul dans un dioïde de séries rationnelles propre à représenter les graphes d'événements temporisés. On présente MAX, le programme de calcul formel écrit en MAPLE dans lequel on a implémenté ces algorithmes (fonction de transfert, calcul du taux de production). On considère enfin l'optimisation des ressources. Ce problème conduit à une énumération algébrique de contraintes modulo certaines congruences. Une seconde approche formule ces contraintes en termes de sous-vecteur propre.

**Mots clés** Dioïdes, Systèmes Linéaires, Systèmes à événements discrets, Graphes d'événements temporisés, Symétrisation

## Theory of linear systems over dioids

### Abstract

We develop a system theory for linear systems over certain dioid structures (semirings with idempotent addition).

We study general systems of linear equations in certain dioids. The introduction of a new notion of *symmetrization* results in the linear closure of these algebras: the generic system of  $n$  linear equations with  $n$  unknowns admits a unique solution in the symmetrized dioid, given by Cramer's formulae. We adapt the Jacobi and Gauss-Seidel algorithms to this context. We also give some duality results. The spectral theory of irreducible ( $\max, +$ ) matrices is extended to the reducible case.

Later, we consider the associated linear system theory (representation by kernels and convolutions in dioid, use of the Fenchel transform). We obtain a lower bound for minimal realizations in terms of minors.

We develop some algorithms for an algebra of rational series devoted to timed event graphs. We present MAX, the program written in MAPLE which implements these algorithms (transfer series, periodic throughput). Finally, we show that the resource optimization problem reduces to an algebraic enumeration of constraints modulo some simplification rules. These constraints also reduce to a sub-eigenvector problem.

**Key words** Diods, Linear Systems, Discrete Event Systems, Timed Event Graphs, Symmetrization.

# **THÈSE**

présentée à

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS**

par

**Stéphane GAUBERT**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS**

Spécialité:

**MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE**

Sujet de la thèse:

**THÉORIE DES SYSTÈMES LINÉAIRES  
DANS LES DIOÏDES**

soutenue le 1<sup>er</sup> Juillet 1992 devant le jury composé de:

MM. **Michel MINOUX**

Président et Rapporteur

**Michel FLIESS**

**Michel VIOT**

Rapporteurs

**Guy COHEN**

**Geert Jan OLSDER**

**Jean-Pierre QUADRAT**

Examinateurs



Je voudrais remercier

J.P. Quadrat pour m'avoir accueilli à l'INRIA, dirigé, conseillé, encouragé, fait partager sa culture, confirmé dans mes inclinations mathématiques et révélé cette difficile vérité: un plus un égale un.

G. Cohen pour avoir co-piloté et fait progresser cette thèse, n'ayant été avare ni de temps, ni d'idées, ni de rigueur.

M. Viot pour avoir encouragé ce travail, en avoir suggéré certains développements et pour avoir rapporté.

M. Minoux et M. Fliess pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail en acceptant de rapporter.

G.J. Olsder qui s'est intéressé à ces recherches depuis le début et me fait l'honneur d'être membre du Jury.

M. Akian et R. Nikoukhah pour les nombreuses idées et discussions mathématiques.

M. Plus pour la dynamique de groupe.

S. Steer et Basile pour leur aide.

Les chercheurs du Bâtiment 12 pour le soutien scientifique et moral, particulièrement A. Sulem, J. Clairambault, C. Klimann, F. Delebecque, Y. Sorel, C. Lavarenne, P.A. Bliman, G. Launay, C. Lemaréchal, ainsi que M. Verneuil.



# Table des Matières

<b>A</b>	<b>Résultats algébriques</b>	<b>19</b>
<b>0</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>21</b>
1	Demi-anneaux et dioïdes . . . . .	21
2	Dioïdes et structures ordonnées . . . . .	24
2.1	L'ordre naturel d'un dioïde . . . . .	24
2.2	Inf-dioïdes . . . . .	27
2.3	Continuité . . . . .	27
3	Moduloïdes . . . . .	28
3.1	Généralités . . . . .	28
3.2	Familles génératrices minimales . . . . .	30
4	Équations implicites linéaires dans les dioïdes complets . . . . .	30
4.1	Généralités . . . . .	30
4.2	Équations implicites matricielles et interprétation combinatoire . . . . .	32
5	Résiduation . . . . .	34
5.1	Applications résiduables . . . . .	34
5.2	Dioïdes additivement résidués . . . . .	37
5.3	Dioïdes multiplicativement résidués . . . . .	39
5.4	Résiduation matricielle . . . . .	41
5.5	Caractérisation des familles génératrices minimales . . . . .	42
6	Matrices inversibles dans les demi-anneaux positifs . . . . .	45
6.1	Préliminaires . . . . .	45
6.2	Matrices inversibles . . . . .	46
7	Inversibilité d'applications linéaires . . . . .	47
7.1	Prolongement d'applications linéaires . . . . .	47
7.2	Applications linéaires injectives . . . . .	48
<b>I</b>	<b>Symétrisation</b>	<b>51</b>
1	Structure de demi-anneau symétrisé . . . . .	51

1.1	Demi-anneau symétrisé libre . . . . .	52
1.2	La relation d'équilibre . . . . .	53
1.3	Relation d'équilibre dans un demi-anneau symétrisé libre . . . . .	54
1.4	Valeur absolue dans les demi-anneaux symétrisés libres . . . . .	54
2	Quelques identités algébriques et combinatoires . . . . .	54
2.1	Déterminants . . . . .	55
2.2	Applications . . . . .	58
<b>II</b>	<b>Dioïde symétrisé</b>	<b>61</b>
1	Motivations . . . . .	61
1.1	Premier exemple . . . . .	61
1.2	Construction élémentaire du dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$ . . . . .	62
2	Le symétrisé d'un demi-anneau . . . . .	64
2.1	Symétrisation régulière . . . . .	64
2.2	Symétrisation régulière minimale . . . . .	65
2.3	Dioïde des fractions d'un dioïde commutatif . . . . .	68
3	Dioïdes symétrisés . . . . .	70
3.1	Solutions de l'équilibre élémentaire $x \nabla a$ . . . . .	70
3.2	Symétrisé du dioïde de Boole . . . . .	71
3.3	Le dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$ . . . . .	71
3.4	Autres dioïdes symétrisés . . . . .	77
3.5	Domaine de transitivité de la relation d'équilibre . . . . .	79
3.6	Eléments substituables . . . . .	81
3.7	Elimination . . . . .	84
<b>III</b>	<b>Systèmes d'équilibres linéaires</b>	<b>85</b>
1	Dualité . . . . .	86
1.1	Orthogonalité dans $\mathbb{S}_{\max}^n$ . . . . .	86
1.2	Dualité $\mathbb{R}_{\max}^n \leftrightarrow \mathbb{S}_{\max}^n$ . . . . .	89
2	Solutions générales d'équilibres linéaires . . . . .	93
2.1	Systèmes homogènes . . . . .	93
2.2	Solutions des équilibres non homogènes . . . . .	95
3	Systèmes de Cramer . . . . .	96
3.1	Solution de Cramer . . . . .	96
3.2	Systèmes de Cramer dans $\mathbb{S}_{\max}$ . . . . .	96
3.3	Application aux systèmes d'équations linéaires à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$ . . . . .	98
3.4	Commentaires . . . . .	100

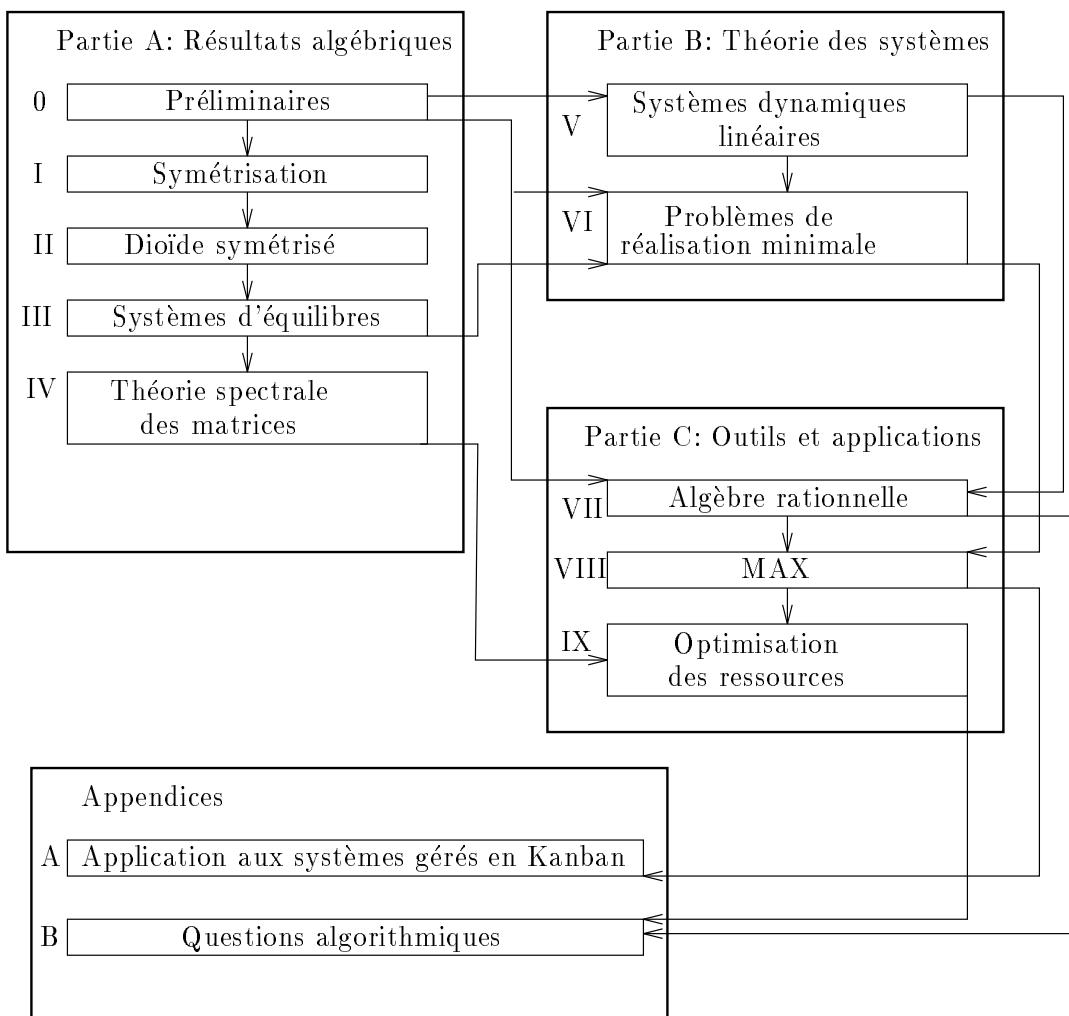
4	Conditions de compatibilité de systèmes rectangulaires . . . . .	104
4.1	Rang mineur . . . . .	104
4.2	Conditions supplémentaires de compatibilité . . . . .	104
5	Existence de solutions signées d'équilibres linéaires . . . . .	108
6	Algorithme de Jacobi . . . . .	108
6.1	Existence de la suite $\{x^p\}$ . . . . .	109
6.2	Stationnarité de la suite $\{x^p\}$ . . . . .	110
6.3	Etoiles et cofacteurs . . . . .	111
7	Algorithme de Gauss-Seidel . . . . .	112
8	Preuve directe du Théorème 5.0.1 . . . . .	113
8.1	Préliminaires . . . . .	113
8.2	Lemme fondamental . . . . .	114
8.3	Seconde preuve . . . . .	115
9	Systèmes homogènes carrés . . . . .	118
9.1	Cas de nullité du déterminant . . . . .	118
9.2	Cas d'équilibre d'une permutation de poids maximal . . . . .	118
9.3	Cas d'opposition des signes de deux permutations . . . . .	119
10	Rangs dans $\mathbb{S}_{\max}$ . . . . .	121
<b>IV</b>	<b>Résultats supplémentaires de théorie spectrale des matrices</b>	<b>125</b>
1	Préliminaires . . . . .	125
1.1	Graphe associé à une matrice . . . . .	125
1.2	Classes . . . . .	126
1.3	Rappels de théorie spectrale des matrices irréductibles . . . . .	128
2	Théorie spectrale des matrices réductibles . . . . .	131
2.1	Préliminaires . . . . .	131
2.2	Etude du spectre . . . . .	132
2.3	Vecteurs propres des matrices réductibles . . . . .	134
3	Lien avec le rayon spectral usuel . . . . .	137
3.1	Rayon spectral usuel et $(\max, \times)$ . . . . .	137
3.2	Applications . . . . .	140
<b>B</b>	<b>Théorie des Systèmes</b>	<b>141</b>
<b>V</b>	<b>Systèmes dynamiques linéaires sur un dioïde</b>	<b>143</b>
1	Exemples . . . . .	143

1.1	Un système continu et son analogue discret . . . . .	143
1.2	Equations dynamiques . . . . .	144
1.3	Analogue discret . . . . .	145
1.4	Mélangeur . . . . .	145
1.5	Exemple de système $(\max, +)$ linéaire . . . . .	145
2	Systèmes linéaires . . . . .	146
2.1	Systèmes élémentaires $(\min, +)$ linéaires . . . . .	148
2.2	Systèmes élémentaires $(\max, +)$ linéaires . . . . .	149
3	Représentation des systèmes linéaires . . . . .	150
3.1	Systèmes linéaires sur $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ . . . . .	150
3.2	Système linéaires continus sur des bons ensembles de signaux . . . . .	153
3.3	Application aux fonctions croissantes . . . . .	154
3.4	Systèmes vectoriels sur les bons ensembles de signaux . . . . .	156
4	Fonction de transfert des systèmes $(\min, +)$ linéaires stationnaires . . . . .	158
4.1	Transformation de Fenchel . . . . .	158
4.2	Résumé . . . . .	161
<b>VI</b>	<b>Quelques remarques sur la réalisation minimale</b>	<b>163</b>
1	Séries $(\max, +)$ rationnelles . . . . .	163
1.1	Réalisabilité, rationalité, périodicité . . . . .	163
1.2	Réalisation faible . . . . .	167
2	Critères de minimalité . . . . .	173
2.1	Critère de rang mineur . . . . .	173
2.2	Un contre exemple . . . . .	174
2.3	Critère classique . . . . .	175
<b>C</b>	<b>Outils et applications</b>	<b>177</b>
<b>VII</b>	<b>Algèbre rationnelle des graphes d'événements temporisés</b>	<b>179</b>
1	Un exemple de graphe d'événements temporellement ordonné . . . . .	179
1.1	Représentation par des systèmes linéaires récurrents . . . . .	180
1.2	Approche opératorielle . . . . .	182
2	Etude de l'algèbre des opérateurs $\gamma$ et $\delta$ . . . . .	183
2.1	Le dioïde $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . . . . .	183
2.2	Preuve du théorème 2.1.1 . . . . .	184
2.3	Calcul dans le dioïde $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ . . . . .	186

3	Séries rationnelles . . . . .	188
3.1	Généralités . . . . .	188
3.2	Représentation des rationnels . . . . .	188
3.3	Analogie avec les parties rationnelles de $\mathbb{N}$ . . . . .	189
4	Règles de calcul sur les éléments simples . . . . .	190
4.1	Somme de deux éléments simples . . . . .	190
4.2	Produit de deux éléments simples . . . . .	192
4.3	Une décomposition en éléments simples et ses conséquences . . . . .	194
5	Algèbre des séries périodiques . . . . .	194
5.1	Caractéristiques de la somme de séries périodiques . . . . .	196
5.2	Produit de séries périodiques générales . . . . .	196
5.3	Etoile de polynômes et problème diophantien de Frobenius . . . . .	197
5.4	Pentes et étoiles dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . . . . .	198
6	Algèbre rationnelle des matrices . . . . .	199
6.1	Pente des matrices rationnelles . . . . .	199
6.2	Preuve du Théorème 6.1.3 . . . . .	201
6.3	Cyclicité des matrices à coefficients dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . . . . .	203
6.4	Cyclicité des matrices rationnelles dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . . . . .	204
6.5	Preuve du Théorème 6.4.5 . . . . .	206
6.6	Application au calcul du taux de production d'un système autonome . . . . .	209
<b>VIII</b>	<b>MAX: un outil de calcul rationnel dans les dioïdes</b>	<b>211</b>
1	Syntaxe générale . . . . .	212
2	Opérations sur les constantes . . . . .	213
2.1	Le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{\text{max}}$ . . . . .	213
2.2	Opérations matricielles dans $\overline{\mathbb{R}}_{\text{max}}$ . . . . .	213
3	Calcul rationnel dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . . . . .	215
3.1	Polynômes . . . . .	215
3.2	Séries périodiques . . . . .	217
3.3	Validation de MAX . . . . .	219
4	Exemple: calcul du transfert d'un atelier flexible de type flowshop . . . . .	220
<b>IX</b>	<b>Calcul formel du taux de production et optimisation des ressources</b>	<b>223</b>
1	Les problèmes d'optimisation des ressources . . . . .	224
1.1	Exemple . . . . .	224
1.2	Premier problème . . . . .	224
1.3	Second problème . . . . .	225

2	Polynômes multivariables et ressources . . . . .	225
2.1	Le dioïde $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_i, \delta]]$ . . . . .	225
2.2	Représentation géométrique . . . . .	226
2.3	Ressources et polynômes . . . . .	227
3	Enumération des contraintes . . . . .	229
3.1	Chemins élémentaires . . . . .	229
3.2	Congruences polyédriques en dimension 2 . . . . .	234
3.3	Congruences polyédriques en dimension quelconque . . . . .	239
3.4	Exemple . . . . .	240
3.5	Autre exemple . . . . .	241
3.6	Calcul modulo une congruence polyédrique . . . . .	241
3.7	Complexité en dimension 2 . . . . .	241
4	Quelques raffinements . . . . .	242
4.1	Agrégation . . . . .	242
4.2	Taux de production d'un flowshop à 2 types de pièces et $n$ étages identiques . . . . .	243
4.3	Complexité . . . . .	245
5	Application . . . . .	246
5.1	Implémentation courante . . . . .	246
5.2	Un exemple réel . . . . .	249
6	Formulation en termes de vecteurs propres . . . . .	254
6.1	Équivalence à la recherche d'un sous-vecteur propre . . . . .	254
6.2	Lien avec l'algorithme de Proth et Xie . . . . .	255
<b>A</b>	<b>Etude d'une ligne de production déterministe gérée en "Kanban"</b>	<b>257</b>
1	Modèle algébrique . . . . .	257
1.1	Modélisation des cellules kanban . . . . .	257
1.2	Transfert d'une ligne kanban . . . . .	258
1.3	Équations générale du transfert . . . . .	259
1.4	Réponse à la demande d'une cellule Kanban . . . . .	260
1.5	Cas à $p$ cellules . . . . .	261
2	Exemples . . . . .	261
2.1	Un exemple de calcul de transfert . . . . .	261
2.2	Un exemple d'optimisation des kanbans . . . . .	262
2.3	Annexe: les routines <code>kanban2bidiag</code> et <code>invertbidiag</code> . . . . .	263

<b>B Questions algorithmiques</b>	<b>265</b>
1 Calcul dans des dioïdes de polynômes quotientés . . . . .	265
1.1 Représentant canonique d'un polynôme . . . . .	265
1.2 Un résultat général de représentant minimal . . . . .	266
1.3 Représentant minimal des séries formelles dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . . . . .	270
1.4 Somme modulo une bonne congruence . . . . .	271
1.5 Dioïde quotienté par une bonne congruence . . . . .	272
1.6 Quelques raffinements dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ . . . . .	275
1.7 Extension des degrés à $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . . . . .	277
2 Algorithmes relatifs aux séries périodiques . . . . .	278
2.1 Séries causales . . . . .	279
2.2 Représentations périodiques . . . . .	279
2.3 Représentation périodique minimale . . . . .	282
2.4 Somme de séries périodiques . . . . .	284
2.5 Autres opérations sur les séries périodiques . . . . .	287
2.6 Etoiles de polynômes . . . . .	288
2.7 Quelques raffinements possibles . . . . .	290
3 Calcul de la cyclicité . . . . .	291
3.1 Détermination du multigraphe critique . . . . .	291
3.2 Calcul de la cyclicité d'un graphe valué par des naturels . . . . .	292



# Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude des systèmes linéaires dans les dioïdes. Par "systèmes linéaires", on entend d'une part les systèmes d'équations linéaires qui s'écrivent sous la forme  $Ax \oplus b = Cx \oplus d$  dans certains demi-anneaux dont l'addition est idempotente (dioïdes), et d'autre part, au sens de la "Théorie des Systèmes", les applications  $u \mapsto \mathcal{S}(u)$  qui vérifient le principe de linéarité

$$\mathcal{S}(u \oplus v) = \mathcal{S}(u) \oplus \mathcal{S}(v), \quad \mathcal{S}(\lambda u) = \lambda \mathcal{S}(u) ,$$

dans des dioïdes convenables. Cela s'applique en particulier aux graphes d'événements temporisés, pour lesquels nous référons le lecteur à [23]. Plus généralement, on verra que cette linéarité sur une structure idempotente est propre à représenter certains phénomènes de saturation et de synchronisation.

Cette thèse est organisée en trois parties. Nous donnons d'abord des résultats algébriques relatifs aux systèmes d'équations linéaires. La deuxième partie est consacrée à la théorie des systèmes dynamiques linéaires dans les dioïdes. La troisième partie, plus appliquée, traite l'algèbre effective de certains dioïdes de séries rationnelles utiles pour l'étude de ces systèmes. On étudie aussi le problème d'optimisation des ressources.

Un chapitre de préliminaires résume les résultats utiles de théorie des dioïdes. Il contient une grande part de résultats déjà connus. Les résultats des chapitres suivants (éventuellement obtenus en collaboration avec Monsieur Max Plus) sont originaux, à certaines exceptions près qui sont signalées.

- Le premier chapitre introduit la notion de demi-anneau symétrisé et de symétrisation d'un demi-anneau (plongement dans un demi-anneau symétrisé). On étudie les propriétés élémentaires de ces demi-anneaux symétrisés et on établit certaines identités utiles pour la suite. Le fait essentiel est l'introduction d'une relation dite d'équilibre, qui permet de remplacer les équations dans un demi-anneau par des équilibres dans un demi-anneau symétrisé. La difficulté principale est d'ordre psychologique: la relation d'équilibre n'est pas transitive. On pourra éventuellement lire la motivation du chapitre II avant le chapitre I ou en parallèle avec celui ci.
- Le chapitre II met en évidence une notion de symétrisation canonique d'un demi-anneau. On commence par construire à la main le dioïde symétrisé du dioïde  $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$  (noté  $\mathbb{R}_{\max}$  dans ce qui suit). L'on donne ensuite une construction plus générale: étant donné un demi-anneau  $\mathcal{D}$ , on appelle symétrisation régulière une symétrisation  $\mathcal{S}$  telle que la résolution des systèmes d'équations linéaires dans  $\mathcal{D}$  soit obtenue à partir de celle des systèmes d'équilibres linéaires dans  $\mathcal{S}$ . On montre sous certaines conditions l'existence d'une "plus petite" symétrisation régulière. La fin de ce chapitre est technique, et caractérise cette symétrisation en termes d'opérations résiduées. Dans la suite, on travaillera essentiellement

sur le dioïde symétrisé de  $\mathbb{R}_{\max}$ , de sorte que ces caractérisations techniques peuvent être passées.

- Le chapitre III étudie les systèmes d'équilibres linéaires, essentiellement dans le dioïde symétrisé de  $\mathbb{R}_{\max}$ . On étudie les questions d'orthogonalité et l'on donne des résultats analogues, dans une certaine mesure, à la théorie de Cramer. On généralise un résultat de Gondran et Minoux relatif aux systèmes linéaires homogènes carrés.
- Le chapitre IV étudie la théorie spectrale des matrices réductibles. Il s'agit de voir comment les résultats de type Perron-Frobenius obtenus par Cohen, Dubois, Quadrat et Viot se généralisent au cas non irréductible. On montre à cette occasion deux lemmes relatifs aux sous et sur vecteurs propres, qui resserviront pour l'optimisation des ressources. On retrouve comme sous produit de ces lemmes deux inégalités dues à Friedland relatives au rayon spectral (usuel) des matrices à coefficients positifs ou nuls.
- Avec le chapitre V commence la partie propre à l'Automatique. On établit l'analogie dans les dioïdes de la théorie classique des systèmes dynamiques linéaires (différentiels ou récurrents). On met en évidence une notion de réponse impulsionnelle. On caractérise les systèmes stationnaires et causaux de manière naturelle. On montre enfin qu'une transformée de type Fenchel joue le rôle de la transformée de Laplace classique.
- Le chapitre VI applique la notion de rang mineur mise en évidence dans l'étude des systèmes linéaires au problème de réalisation minimale. On obtient de la sorte une borne inférieure de la dimension de réalisation minimale, et l'on donne un contre exemple où, comme l'on peut s'y attendre, cette borne est peu précise.
- Le chapitre VII initie la partie relative aux outils de calcul et aux applications. On se préoccupe de l'algèbre effective d'un dioïde de séries rationnelles utile pour l'étude des graphes d'événements temporisés. Cohen, Moller, Quadrat et Viot ont montré que ces séries rationnelles admettaient des représentations périodiques. On étudie l'algèbre de ces représentations, y compris d'un point de vue algorithmique. On montre en particulier comment les périodes sont transformées par les opérations rationnelles. On peut voir cette étude, et en particulier les questions de périodicité des matrices rationnelles, comme l'équivalent en termes de séries formelles des résultats de cyclicité de type Perron-Frobenius obtenus pour des matrices à coefficients dans  $\mathbb{R}_{\max}$  par Cohen, Dubois, Quadrat et Viot. On voit en particulier réapparaître le problème diophantien de Frobenius.
- Le chapitre VIII décrit le programme MAX, écrit en MAPLE, qui implémente l'algèbre de ces séries périodiques.
- Le chapitre IX est relatif au problème d'optimisation des ressources. On vise à calculer formellement le taux de production d'un système, le nombre de certaines ressources (machines, palettes, processeurs) étant inconnu. On montre comment ce problème peut être traité à l'aide d'algorithmes classiques d'énumération des circuits. On montre que certaines congruences permettent de simplifier les calculs intermédiaires. On donne une application à un atelier flexible traité antérieurement par Cohen, Dubois, Quadrat et Viot. On conclut en généralisant un algorithme donné par Proth et Xie dans un cas particulier. On montre fort simplement que le problème d'optimisation d'un critère linéaire sous une contrainte de taux de production se réduit dans tous les cas à un problème de programmation linéaire. La preuve est fondée sur la notion de sous-vecteur propre étudiée au chapitre V.

- Une première annexe applique ces outils à l'étude des lignes de production déterministes gérées en "Kanban".
- Une seconde annexe précise les questions algorithmiques techniques liées aux polynômes et aux séries périodiques traités dans les Chapitres VII et IX. Cette annexe donne une idée fidèle des algorithmes implémentés dans MAX.

## Notations

$\#I$	cardinal d'un ensemble $I$
$\mathfrak{S}(I)$	groupe des permutations de $I$
$\mathfrak{S}_n$	groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$
$\text{sgn}(\sigma)$	signature d'une permutation $\sigma$
$\text{cof}_{ij} A$	cofacteur d'indice $(i, j)$ de $A$
$A^{\text{adj}}$	transposée de la matrice des cofacteurs de $A$
$f \upharpoonright_I$	$f$ restreinte à l'ensemble de départ $I$
$\text{Id}$	application ou matrice identité
$\dot{+}$	somme directe de matrices ( $A \dot{+} B = [{}^A \varepsilon \ B]$ )
$\text{GL}(E)$	groupe linéaire d'un demi-module $E$
$\text{vect}\langle f_i \rangle$	demi-module engendré par une famille de vecteurs $\{f_i\}$
$w_M(p)$	poids du chemin $p$ dans le graphe valué par la matrice $M$
$\asymp$	équivalence logarithmique
$\rho(A)$	rayon spectral de la matrice $A$ (usuel ou dans les dioïdes suivant le contexte)
$\rho_{\max, \times}(A)$	rayon spectral de la matrice $A$ dans le dioïde $\mathbb{R}_{\max, \times}^+$
$\mathbb{R}_{\max}$	dioïde des réels, munis du max et du +.
$\mathbb{B}$	dioïde des booléiens, i.e. $\mathbb{B} = \{\varepsilon, e\}$
$\mathbb{R}_{\min}$	dioïde des réels, munis du min et du +.
$\mathbb{R}_{\max, \times}^+$	dioïde des réels positifs ou nuls, munis du max et du produit usuel.
$\mathbb{N}_{\text{ppcm}}$	dioïde des naturels, muni du ppcm et du produit
$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$	demi-anneau symétrisé de $\mathcal{D}$
$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{\oplus}$	ensemble des éléments positifs de $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$
$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{\oplus\ominus}$	ensemble des éléments signés de $\mathcal{S}$
$\mathcal{S}^\vee$	ensemble des éléments substituables d'un demi-anneau symétrisé $\mathcal{S}$ .
$\mathbb{S}_{\max}$	dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$
$\mathbb{S}_{\max, \times}$	dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max, \times}^+$
$\Phi$	$\Phi(a) = \{x \in \mathcal{S} \mid x \nabla a\}$
$\Psi$	$\Psi(a) = \{(p, q) \in \mathcal{S}^2 \mid p \nabla qx\}$
$\preceq$	ordre naturel d'un dioïde ( $a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$ )
$\boxminus$	moins résidué: $a \boxminus b = \min\{x \mid x \oplus b \succeq a\}$
$\setminus$	quotient à gauche: $a \setminus b = \max\{x \mid ax \preceq b\}$
$/$	quotient à droite
$f^\dagger$	résiduée de $f$ : $f^\dagger(y) = \max\{x \mid f(x) \preceq y\}$
$f^\downarrow$	résiduée duale de $f$
$\text{Res}^\dagger(E, F)$	ensemble des applications résiduables de $E$ dans $F$
$\text{Res}^\downarrow(E, F)$	ensemble des applications dualement résiduables de $E$ dans $F$
$a^*$	étoile de Kleene ( $a^* = \text{Id} \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots$ )
$a^+$	$a^+ = aa^* = a \oplus a^2 \oplus a^3 \oplus \dots$
$\delta$	opérateur de décalage sur les dates
$\gamma$	opérateur de décalage sur les numéros
$\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$	dioïde des séries formelles commutatives à coefficients booléiens d'indéterminées $\gamma$ et $\delta$
$\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$	dioïde quotient de $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ vérifiant $\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{\min(n, n')}$ , $\delta^t \oplus \delta^{t'} = \delta^{\max(t, t')}$
$\sigma$	pente minimale: $\sigma(\bigoplus_i \gamma^{n_i} \delta^{t_i}) = \inf_i \frac{n_i}{t_i}$
$\sigma_\infty$	pente ultime: $\sigma_\infty(p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*) = \frac{\nu}{\tau}$ ( $p, q$ polynômes)

$\sqcup$	$(n, t) \sqcup (n', t') = \begin{cases} (\text{ppcm}(n, n'), \text{ppcm}(t, t')) & \text{si } \sigma(n, t) = \sigma(n', t') \\ (n, t) & \text{si } \sigma(n, t) < \sigma(n', t') \end{cases}$
$\sqcap$	comme $\sqcup$ mais avec des pgcd.
$\text{conv}(A)$	convexifié d'une partie $A$
$\text{conv}\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$	dioïde des parties convexes de $\mathbb{R}^2$
$\text{conv}\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2)$	dioïde des parties convexes compactes de $\mathbb{R}^2$
$\mathcal{P}_{\text{finies}}(A)$	ensemble des parties finies d'un ensemble $A$
$\delta_A^*$	fonction support d'une partie $A$ ( $\delta_A^*(p) = \sup_{x \in A} \langle p, x \rangle$ )
$\text{int } A$	intérieur d'une partie $A$

## Matrices extraites

Soit  $A$  une matrice  $n \times p$ ,  $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$  un  $k$ -uplet d'éléments de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $J = (j_1, \dots, j_r)$  un  $r$ -uplet d'éléments de  $\{1, \dots, p\}$ . On note  $A[I|J]$  la matrice formée des lignes  $i_1, \dots, i_k$  et des colonnes  $j_1, \dots, j_r$  de  $A$ . Dans le cas où  $r = p$ , on notera sans ambiguïté  $A[I]$ . Lorsque  $I$  et  $J$  sont des ensembles,  $A[I|J]$  désigne la matrice formée par les lignes d'indice  $i \in I$  et les colonnes  $j \in J$  rangées par ordre croissant. On notera  $A[I|J]$  la matrice formée des colonnes n'appartenant pas à  $J$ . Par exemple, soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} .$$

On a

$$A[2|12] = \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad A[13|2] = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} .$$



# **Partie A**

## **Résultats algébriques**



# Chapitre 0

## Préliminaires

### Introduction

Ce chapitre passe en revue la théorie algébrique de base des dioïdes. Les résultats présentés sont classiques, à l'exception des questions d'inversibilité d'applications linéaires et de quelques raffinements sur les familles génératrices minimales. L'idée qui est à l'œuvre dans cette théorie est qu'à la différence des demi-anneaux généraux, les dioïdes peuvent être munis d'une structure ordonnée canonique. Il devient alors possible (i): d'étudier les inéquations de type

$$x \succeq ax \oplus b \quad (0.0.a)$$

à l'aide de techniques de point fixe, et (ii): d'étudier les inéquations de type

$$x \oplus a \succeq b, \quad (0.0.b)$$

$$ax \preceq b \quad (0.0.c)$$

à l'aide de la théorie de la résiduation. L'étude des inéquations de type (i) est l'un des plus anciens résultats connus sur ces structures [47]. L'opération “\*” (étoile de Kleene) est introduite à cette occasion, ainsi que la notion de rationalité. L'interprétation de l'étoile en termes d'algèbre de chemins est brièvement rappelée. Elle jouera un rôle central dans la dernière partie (optimisation des ressources). L'étude des inéquations de type (ii) est une application assez directe de la théorie de la résiduation, dite aussi théorie des correspondances de Galois dans les structures ordonnées. On applique cette théorie au cas des dioïdes, définissant les opérations résiduées des lois de structure, i.e. les différences et quotients résidués, dont on établit le formulaire. Ce formulaire est obtenu en spécialisant la théorie des demi-groupes résidués généraux, qui remonte à Dubreil [30]. Nous ferons dans la suite un usage constant de ces outils (étoile et opérations résiduées). Signalons enfin que ces techniques permettent de résoudre à peu près exclusivement les équations et inéquations de type (0.0.a), (0.0.b) ou (0.0.c) (ainsi que leur duals). L'étude des équations générales du type  $ax \oplus b = cx \oplus d$  requiert une théorie de la symétrisation qui sera développée dans les chapitres suivants.

### 1 Demi-anneaux et dioïdes

**1.0.1 Définition (demi-anneau)** *On appelle demi-anneau un ensemble  $\mathcal{D}$  muni d'une loi associative (notée additivement “ $\oplus$ ”), commutative, d'élément neutre  $\varepsilon$ , et d'une loi associative (notée multiplicativement “ $\otimes$ ”), d'élément neutre  $e$ , telles que:*

- (i)  $\forall a, b, c \in \mathcal{D}, (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$
- (ii)  $\forall a, b, c \in \mathcal{D}, c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b)$
- (iii)  $\forall a \in \mathcal{D}, a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon.$

Si en outre  $\oplus$  vérifie

$$a \oplus a = a \quad (1.0.a)$$

alors  $\mathcal{D}$  est dit *demi-anneau idempotent*, ou *dioïde*. Si  $(\mathcal{D} \setminus \{\varepsilon\}, \otimes)$  est un groupe, on qualifie  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  de *demi-corps*. Un demi-corps dont l'addition vérifie (1.0.a) sera dit *idempotent*. Un demi-anneau ou demi-corps sera dit *commutatif* lorsque le produit est commutatif. Un demi-anneau tel que

$$\begin{aligned} (a \neq \varepsilon \text{ et } ax = ay) &\implies x = y \\ (a \neq \varepsilon \text{ et } xa = ya) &\implies x = y \end{aligned} \quad (1.0.b)$$

(i.e. les homothéties à gauche et à droite sont injectives) sera dit *intègre*. On notera ordinairement le produit  $a \otimes b$  par  $a.b$  ou  $ab$ .

**1.0.2 Exemple (dioïde des booléiens)** L'ensemble  $\mathbb{B} := \{\varepsilon, e\}$ , muni des lois  $\oplus$  et  $\otimes$  définies ci-dessous est un dioïde commutatif, dit dioïde des booléiens.

$\oplus$	$\varepsilon$	$e$
$\varepsilon$	$\varepsilon$	$e$
$e$	$e$	$e$

$\otimes$	$\varepsilon$	$e$
$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$
$e$	$e$	$e$

On notera que tout dioïde admet  $\mathbb{B}$  comme sous-dioïde.

**1.0.3 Exemple (algèbre  $(\max, +)$ )** L'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , muni du  $\max$  (noté additivement) et de l'addition usuelle (noté multiplicativement) est un demi-corps idempotent (on convient que  $x + (-\infty) = x$  pour tout  $x$ ). On a dans cette structure  $1 \otimes 1 = 2$ ,  $1 \otimes 0 = 1$ ,  $2 \oplus 3 = 3$ . On notera  $\mathbb{R}_{\max}$  ce demi-corps idempotent, traditionnellement<sup>1</sup> appelé “algèbre  $(\max, +)$ ”.

**1.0.4 Exemple (algèbre  $(\min, +)$ )** L'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , muni du  $\min$  (noté additivement) et de l'addition usuelle (noté multiplicativement) est un demi-corps idempotent, isomorphe à  $\mathbb{R}_{\max}$ , que l'on notera  $\mathbb{R}_{\min}$ .

**1.0.5 Exemple (dioïde des parties de  $\mathbb{R}$ )** L'ensemble des parties de  $\mathbb{R}$ , muni de l'union et de la somme vectorielle est un dioïde.

**1.0.6 Exemple (dioïde libre et dioïde des langages)** Rappelons qu'étant donné un ensemble de  $k$  lettres  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  (alphabet), le *monoïde libre* formé sur  $A$  est l'ensemble des mots formés d'un nombre fini de lettres de  $A$ , y compris le mot vide noté “\_”, muni du produit de concaténation noté “.”. Etant données deux parties  $X, Y$  de  $A^*$  (deux *langages*), on définit le produit  $X.Y := \{x.y \mid (x, y) \in X \times Y\}$ . On a les deux dioïdes suivants:

1/  $(\mathcal{P}_{\text{finies}}(A^*), \cup, .)$ , dioïde des langages finis (parties finies de  $A^*$ ) formés sur l'alphabet  $A$ ,

---

<sup>1</sup>le terme “algèbre” est à prendre au sens général (un ensemble muni d'une famille d'opérations [9]), et n'a rien à voir avec les algèbres au sens usuel [12]

2/  $(\mathcal{P}(A^*), \cup, .)$ , dioïde des langages quelconques formés sur l'alphabet  $A$ .

Le dioïde  $\mathcal{P}(A^*)$  admet  $\emptyset$  pour zéro et  $\{\cdot\}$  pour unité. Il a  $\mathcal{P}_{\text{finies}}(A^*)$  pour sous-dioïde. On posera  $\alpha_i := \{a_i\}$ . L'intérêt de  $\mathcal{P}_{\text{finies}}(A^*)$  est d'être une réalisation du *dioïde libre* engendré par  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . Précisément, on a la propriété universelle suivante:

**1.0.7 Proposition** Pour tout dioïde  $\mathcal{D}$  et tout  $k$ -uplet  $(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{D}^k$ , il existe un unique morphisme de dioïde  $\phi : \mathcal{P}_{\text{finies}}(A^*) \rightarrow \mathcal{D}$ , tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\phi(\alpha_i) = x_i$ .

**Preuve** de 1.0.7.  $\phi$  est nécessairement donné par

$$\begin{aligned}\phi(\{\cdot\}) &= e \\ \phi(\{a_{i_1} \dots a_{i_k}\}) &= \phi(\{a_{i_1}\}) \dots \phi(\{a_{i_k}\}) = \phi(\alpha_{i_1}) \dots \phi(\alpha_{i_k}) = x_{i_1} \dots x_{i_k} \\ \phi(\{w_1, \dots, w_r\}) &= \phi(\{w_1\}) \oplus \dots \phi(\{w_r\})\end{aligned}\tag{1.0.c}$$

ce qui définit bien un morphisme de dioïde. ■

**1.0.8 Exemple (Dioïde des séries formelles, dioïde des polynômes)** Soient  $A$  un alphabet comme ci-dessus et  $\mathcal{D}$  un dioïde. On appelle dioïde des séries formelles à coefficients dans  $\mathcal{D}$  en les indéterminées non commutatives  $a_i$  l'ensemble des applications  $s$  du monoïde libre  $A^*$  dans  $\mathcal{D}$ , muni des deux lois suivantes:

$$(s \oplus s')(w) := s(w) \oplus s'(w), \quad (s \otimes s')(w) := \bigoplus_{w_1 w_2 = w} s(w_1) \otimes s(w_2).$$

On notera  $\mathcal{D}\langle\langle A \rangle\rangle$  ce dioïde. En identifiant  $a_i$  et l'application  $\delta_{a_i} : \delta_{a_i}(w) = e$  si  $w = a_i$  et  $\varepsilon$  sinon, on écrit formellement

$$s = \bigoplus_{w \in A^*} s(w)w.$$

On appelle polynôme une séries  $s$  telles que  $s(w) = \varepsilon$  sauf peut-être pour un nombre fini de mots. L'ensemble des polynômes forme un sous-dioïde de  $\mathcal{D}\langle\langle A \rangle\rangle$ , que l'on notera  $\mathcal{D}\langle A \rangle$ . On observe que le dioïde des polynômes à coefficients booléiens  $\mathbb{B}\langle A \rangle$  vérifie la propriété universelle 1.0.7 avec  $\alpha_i = a_i$ . Il est donc isomorphe à  $(\mathcal{P}_{\text{finies}}(A^*), \cup, .)$  défini en 1.0.6. L'isomorphisme n'est autre que l'application support:

$$(\mathbb{B}\langle A \rangle, \oplus, \otimes) \rightarrow (\mathcal{P}_{\text{finies}}(A^*), \cup, .), \quad s \mapsto \text{supps} := \{w \in A^* \mid s(w) \neq \varepsilon\}.$$

Si l'on remplace  $A^*$  par le monoïde commutatif libre engendré par  $A$ , on obtient les dioïdes des polynômes et séries à indéterminées commutatives, que l'on notera respectivement  $\mathcal{D}[A]$  et  $\mathcal{D}[[A]]$ .

**1.0.9 Exemple ( $\mathbb{N}_{\text{pgcd}}, \mathbb{N}_{\text{ppcm}}$ )** L'ensemble  $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ , muni du pgcd et du produit est un demi-anneau idempotent (on convient que  $\text{pgcd}(x, \infty) = x$  et  $x \cdot \infty = \infty$ ). On notera  $\mathbb{N}_{\text{pgcd}}$  cette structure. Si l'on considère les deux lois ppcm et  $\times$ , il faut adjoindre à  $\mathbb{N}^*$  un élément  $\varepsilon$  vérifiant  $\varepsilon \times x = \varepsilon$  et  $\varepsilon \oplus x = x$  (et qui n'est donc ni 0 ni  $\infty$ ), pour obtenir un dioïde. On notera  $\mathbb{N}_{\text{ppcm}}$  cette structure.

**1.0.10 Exemple (parties convexes de  $\mathbb{R}^2$ )** On considère l'ensemble des parties convexes de  $\mathbb{R}^2$ , muni des deux opérations suivantes:

$$\begin{aligned}A \oplus B &= \text{conv}(A \cup B) \\ A \otimes B &= A + B \quad (\text{somme vectorielle}),\end{aligned}$$

où  $\text{conv}(U)$  désigne l'enveloppe convexe d'une partie  $U$ . On prétend qu'il s'agit d'un dioïde. La seule propriété non triviale à vérifier est la distributivité, i.e.:

$$\text{conv}(A \cup B) + C = \text{conv}[(A + C) \cup (B + C)] . \quad (1.0.d)$$

Commençons par noter le fait suivant:

$$V \text{ convexe} \Rightarrow \text{pour toute partie } U, \text{conv}(U + V) = \text{conv}(U) + V . \quad (1.0.e)$$

En effet,  $\text{conv}(U) + V$  est un convexe contenant  $U + V$ , donc  $\text{conv}(U) + V \supset \text{conv}(U + V)$ . Inversement, tout élément  $w$  de  $\text{conv}(U) + V$  s'écrit  $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i + v$  avec  $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, u_i \in U, v \in V$ , d'où  $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i(u_i + v) \in \text{conv}(U + V)$ , ce qui montre (1.0.e). On a donc  $\text{conv}(A \cup B) + C = \text{conv}((A \cup B) + C) = \text{conv}((A + C) \cup (B + C))$ , d'où (1.0.d). On notera  $\text{convP}(\mathbb{R}^2)$  le dioïde des convexes de  $\mathbb{R}^2$ .

**1.0.11 Exemple (convexes compacts)** L'ensemble des convexes compacts de  $\mathbb{R}^2$  forme un sous-dioïde de  $\text{convP}(\mathbb{R}^2)$ , que l'on notera  $\text{convP}_c(\mathbb{R}^2)$ . Le dioïde  $\text{convP}_c(\mathbb{R}^2)$  est intègre. Soit en effet l'application *support* définie par

$$\delta_A^*(p) = \sup_{x \in A} \langle p, x \rangle \quad \text{pour } p \in \mathbb{R}^2$$

qui, par compacité de  $A$ , est finie. On a  $\delta_{A+B}^* = \delta_A^* + \delta_B^*$  (vérification immédiate), et l'on rappelle que les convexes fermés sont caractérisés par leur support. Si  $A + B = C$ ,  $B$  est l'unique convexe de fonction support  $\delta_B^* = \delta_C^* - \delta_A^*$ . Il s'ensuit donc que l'application  $B \mapsto A + B$  est injective, et donc que  $\text{convP}_c(\mathbb{R}^2)$  est intègre.

**1.0.12 Exemple (Dioïde des relations)** Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{R}(E)$  l'ensemble des relations sur  $E$ .  $\mathcal{R}(E)$ , muni des deux lois suivantes:

$$\begin{aligned} R \oplus R' : & \quad x (R \oplus R') y \text{ssi } x R y \text{ ou } x R' y, \\ R \otimes R' : & \quad x (R \otimes R') y \text{ssi } \exists z \in E \ x R z \text{ et } z R' y \end{aligned}$$

est un dioïde.

**1.0.13 Avertissement** La traduction anglaise de demi-anneau (resp. demi-corps) est “semiring” (resp. “semifield”).

**1.0.14 Note historique** Kuntzmann ainsi que Gondran & Minoux [47], à qui le terme “dioïde” doit sa fortune, appellent en réalité dioïdes les demi-anneaux généraux. A la suite de Cohen, Dubois, Quadrat et Viot [17], nous préférons réserver le terme de dioïde aux demi-anneaux vérifiant  $a \oplus a = a$ , tout d'abord pour ne pas faire double emploi avec le terme “demi-anneau” ou “semiring”, et ensuite parce que l'idempotence permet d'ordonner les dioïdes et produit une théorie spécifique plus riche que celle des demi-anneaux.

## 2 Dioïdes et structures ordonnées

### 2.1 L'ordre naturel d'un dioïde

Dans un dioïde  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ , on définit la relation d'ordre naturelle  $\preceq$  par:

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b . \quad (2.1.a)$$

Cette relation d'ordre est compatible avec les lois de structure de  $\mathcal{D}$ , i.e.:

$$\begin{aligned} a \preceq b &\Rightarrow a \oplus c \preceq b \oplus c \\ a \preceq b &\Rightarrow ac \preceq bc . \end{aligned}$$

$(\mathcal{D}, \preceq)$  est ainsi un demi-treillis dans lequel la borne-sup est donnée par  $\oplus$  ( $a \oplus b$  est le plus petit majorant de  $a, b$ ), où  $\varepsilon$  est le plus petit élément.

**2.1.1 Exemple** Dans  $\mathbb{R}_{\max}$  (cf. 1.0.3), la relation  $\preceq$  coïncide avec l'ordre coutumier. Dans  $\mathbb{R}_{\min}$  (cf. 1.0.4), on a  $x \preceq y$ ssi  $\min(x, y) = y$ , et donc  $\preceq$  est l'ordre dual de l'ordre usuel (par exemple,  $2 \succeq 3$ ).

**2.1.2 Remarque** Les deux propriétés 1.0.1,(i) et (ii) expriment que  $(\mathcal{D}, \otimes)$  est un demi-groupe demi-réticulé.

**2.1.3 Définition (Ensemble ordonné complet)** *On dit que l'ensemble ordonné  $(\mathcal{D}, \preceq)$  est complet si toute partie  $A$  de  $\mathcal{D}$  admet une borne-sup, que l'on notera indifféremment*

$$\bigvee A \quad \text{ou} \quad \bigvee_{a \in A} a .$$

*Lorsque  $(\mathcal{D}, \vee, \wedge)$  est un treillis, on dira que  $\mathcal{D}$  est un treillis complet lorsque toute partie admettra une borne-sup et une borne-inf.*

On notera  $\top = \bigvee \mathcal{D}$  le plus grand élément de  $\mathcal{D}$ .

Lorsque qu'il s'agit de l'ordre naturel d'un dioïde, on notera la borne-sup  $\oplus$  au lieu de  $\bigvee$ .

**2.1.4 Définition (ensembles descendants, idéaux, filtres)** *On dira que l'ensemble  $S \subset \mathcal{D}$  est descendant<sup>2</sup> si  $x \in S$  et  $y \preceq x$  entraînent  $y \in S$ . Si en outre, pour tous  $a, b \in S$ ,  $a \oplus b \in S$ , on dira que  $S$  est un idéal. Si  $S$  est un idéal pour l'ordre dual, on dira que  $S$  est un filtre.*

Etant donné une partie  $P$ , on notera

$$\downarrow(P) = \{x \in \mathcal{D} \mid \exists p \in P, x \preceq p\} = \bigcup_{p \in P} \downarrow(\{p\}) .$$

Il s'agit du plus petit ensemble descendant contenant  $P$ . Les ensembles descendants de  $\mathcal{D}$ , muni de l'union et de l'intersection forment clairement un treillis complet.

**2.1.5 Treillis des idéaux** L'ensemble des idéaux, muni des deux lois

$$I \wedge J = I \cap J, \quad I \vee J = \bigcap_{K \text{ idéal, } K \subset I, J} K , \tag{2.1.b}$$

est un treillis complet. On note que pour  $x \in \mathcal{D}$ ,  $\downarrow(\{x\})$  est un idéal. Les idéaux de cette forme seront appelés principaux. On les notera plus simplement  $\downarrow(x)$ .

---

<sup>2</sup>le terme anglais est “lower set”, cf. [43]

**2.1.6 Définition (Dioïde complet)** *Le dioïde  $\mathcal{D}$  est complet s'il est complet en tant qu'ensemble ordonné par (2.1.a) et s'il vérifie les deux propriétés suivantes, dites de “distributivité infinie”:*

$$\begin{aligned} \forall A \subset \mathcal{D}, \quad \forall b \in \mathcal{D}, \quad & (\bigoplus_{a \in A} a)b = \bigoplus_{a \in A} ab \\ & b(\bigoplus_{a \in A} a) = \bigoplus_{a \in A} ba . \end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement que

$$\left( \bigoplus_{a \in A} a \right) \left( \bigoplus_{b \in B} b \right) = \bigoplus_{(a,b) \in A \times B} ab . \quad (2.1.c)$$

**2.1.7 Exemple (dioïde complété de  $\mathbb{R}_{\max}$ )**  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , muni du max et du +, avec la convention  $(+\infty) + (-\infty) = -\infty$ , est un dioïde complet que l'on notera  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ .

**2.1.8 Exemple** L'ensemble des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , muni du max point par point et du produit de sup-convolution défini par:

$$(f \otimes g)(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [f(t-x) + g(x)]$$

(avec  $(+\infty) + (-\infty) = -\infty$ ) est un dioïde complet que l'on notera  $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}_{\max}$ . L'élément neutre pour le produit est la fonction  $e$  donnée par  $e(t) = -\infty$  si  $t \neq 0$  et  $e(0) = 0$ .

**2.1.9 Exemple (ordre des relations)** Pour le dioïde  $\mathcal{R}(E)$  des relations sur  $E$  défini en 1.0.12, on a  $R \preceq R'$ ssi  $xRy$  entraîne  $xR'y$ , i.e.ssi  $R$  est plus fine que  $R'$ .

**2.1.10 Remarque** Un demi-corps idempotent non trivial n'a pas de plus grand élément, et en particulier n'est pas complet. Soit en effet  $\infty$  plus grand élément d'un demi-corps idempotent  $\mathcal{D}$ . On a  $\infty \cdot \infty \succeq \infty \cdot e = \infty$ , et en simplifiant  $\infty = e$ . Ainsi, tout  $x$  non nul vérifie

$$x \preceq e \quad (2.1.d)$$

D'où en passant aux inverses  $x^{-1} \succeq e$ . L'autre inégalité s'obtient en appliquant (2.1.d) à  $x^{-1}$ , d'où  $x = e$  et  $\mathcal{D} = \{\varepsilon, e\}$ .

**2.1.11 Intégration idempotente de Maslov** On notera, à la suite de Maslov [67],

$$\oint_{i \in I} a_i := \bigoplus_{i \in I} a_i$$

par analogie avec l'intégrale usuelle. On a en particulier la règle de Fubini:

$$\oint_{\cup_{k \in I} \{k\} \times J(k)} a_{ij} = \oint_{i \in I} \oint_{j \in J(i)} a_{ij}$$

qui n'est autre que l'associativité de la borne sup. L'infinie distributivité du produit se réécrit

$$c \otimes \left( \oint_{i \in I} a_i \right) = \oint_{i \in I} c \otimes a_i .$$

## 2.2 Inf-dioïdes

**2.2.1 Définition** Le dioïde  $\mathcal{D}$  est un inf-dioïde si pour tous éléments  $a, b \in \mathcal{D}$ ,  $a$  et  $b$  admettent une borne-inf pour l'ordre naturel (notée  $a \wedge b$ ).

En d'autres termes, l'ensemble ordonné sous jacent à un inf-dioïde est un treillis. Les deux faits suivants sont bien classiques:

**2.2.2 Proposition** Un demi-corps idempotent est un inf-dioïde.

**Preuve** On vérifie en effet que la borne-inf est donnée par  $a \wedge b = b(a \oplus b)^{-1}a$ . ■

**2.2.3 Proposition** Un dioïde complet est un inf-dioïde.

**Preuve** La loi  $\wedge$ , donnée par

$$a \wedge b = \bigvee \{x \mid x \preceq a \text{ et } x \preceq b\},$$

fait alors de  $(\mathcal{D}, \vee, \wedge)$  un treillis complet. ■

**2.2.4 Exemple** Le dioïde  $\mathbb{B}[X]$  des polynômes à coefficients booléiens en une indéterminée  $X$  est un exemple d'inf-dioïde qui n'est ni complet (considérer  $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} X^k \notin \mathbb{B}[X]$ ), ni un demi-corps idempotent (par exemple,  $(e \oplus X)(e \oplus X^2) = (e \oplus X)(e \oplus X \oplus X^2)$ , ce qui montre que le produit n'est pas simplifiable).

**2.2.5 Remarque** Dans le cas d'un demi-corps idempotent, on a en outre (cf. [30, 8]) que la borne-inf distribue par rapport au produit:

$$(a \wedge b)c = ac \wedge bc, \quad c(a \wedge b) = ca \wedge cb. \quad (2.2.a)$$

Le groupe  $(\mathcal{D} \setminus \{\varepsilon\}, \otimes)$  est donc réticulé.

**2.2.6 Note** Nous avons choisi le terme “inf-dioïde” plutôt que “dioïde réticulé”, car on n'exige *pas* que la borne-inf distribue par rapport au produit, ce qui est le cas dans un “demi-groupe réticulé”.

**2.2.7 Note** Le lecteur pourrait se demander pourquoi ci-dessus et dans la suite, on considère des dioïdes non complets, ce qui oblige à introduire la classe des inf-dioïdes et complique légèrement le discours. Il est en fait essentiel pour les développements algébriques ultérieurs de prendre en compte des dioïdes non complets (typiquement des demi-corps). En particulier, les résultats de symétrisation exigent que la structure multiplicative soit “presque” un groupe, ce qui est incompatible avec la complétion.

## 2.3 Continuité

**2.3.1 Définition (Fonctions croissantes continues)** Soit  $f$  une application croissante  $(E, \leq) \rightarrow (F, \leq)$ .  $f$  est continue si pour toute partie  $X \subset E$  admettant une borne-sup, on a:

$$f\left(\bigvee_{x \in X} x\right) = \bigvee_{x \in X} f(x) \quad (2.3.a)$$

Pour une application croissante, il est trivial que  $f(\bigvee_{x \in X} x) \geq \bigvee_{x \in X} f(x)$ . Ainsi, (2.3.a) est équivalente à:

$$f\left(\bigvee_{x \in X} x\right) \leq \bigvee_{x \in X} f(x). \quad (2.3.b)$$

**2.3.2 Remarque** Pour une fonction croissante  $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , la continuité au sens de 2.3.1 n'est autre que la semi-continuité inférieure usuelle. En effet, pour  $f$  croissante, on a

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{x \leq x_0} f(x)$$

et donc (2.3.b) est équivalent à  $f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**2.3.3 Remarque** Dans [43], on examine sous quelles conditions la notion de continuité 2.3.1 relève d'une topologie, dite topologie de Scott.

**2.3.4 Remarque** Les lois de structure d'un dioïde complet sont continues. En effet, la condition d'infinie distributivité (2.1.c) n'est rien d'autre que la continuité du produit. La somme dans un dioïde complet est trivialement continue.

**2.3.5 Exemple (Dioïde complet libre à  $k$  générateurs)** Le dioïde des langages  $(\mathcal{P}(A^*), \cup, .)$  sur un alphabet  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  (cf. 1.0.6) est le dioïde complet libre à  $k$  générateurs  $\alpha_1 = \{a_1\}, \dots, \alpha_k = \{a_k\}$ , i.e. l'unique dioïde complet (à un isomorphisme *continu* près) tel que pour tout dioïde complet  $\mathcal{D}'$  et tout  $k$ -uplet  $(x_1, \dots, x_k)$ , on ait un unique morphisme continu  $\phi : \mathcal{P}(A^*) \rightarrow \mathcal{D}'$  avec  $\phi(\alpha_i) = x_i$ . La preuve est analogue à celle de 1.0.7 en remarquant que  $\phi$  est défini par continuité de manière unique pour les langages infinis.

**2.3.6 Remarque** Le dioïde des séries formelles à coefficients booléiens  $\mathbb{B}\langle\langle A \rangle\rangle$  défini en 1.0.8 vérifie la propriété universelle caractéristique du dioïde complet libre énoncée ci-dessus. Il est donc isomorphe à  $(\mathcal{P}(A^*), \cup, .)$ , l'isomorphisme étant l'application support (cf. 1.0.8).

## 3 Moduloïdes

### 3.1 Généralités

**3.1.1 Définition (Demi-module, moduloïde)** Soit  $\mathcal{D}$  un demi-anneau. On appelle *demi-module* (à gauche) sur  $\mathcal{D}$  un demi-groupe additif  $(V, \oplus)$  muni d'une loi de composition externe “.”  $\mathcal{D} \times V \rightarrow V$  vérifiant:

- (i)  $(\lambda\mu).u = \lambda.(\mu.u)$
- (ii)  $(\lambda \oplus \mu).u = \lambda.u \oplus \mu.u$
- (iii)  $\lambda.(u \oplus v) = \lambda.u \oplus \lambda.v$
- (iv)  $\varepsilon_{\mathcal{D}}.u = \varepsilon_V$
- (v)  $e.u = u$  .

Un demi-module sur un dioïde est appelé *moduloïde*.

On notera comme de coutume  $\lambda u$  pour  $\lambda \cdot u$ . On observe que (iv) entraîne  $\lambda \cdot \varepsilon_V = \lambda \varepsilon_{\mathcal{D}} \cdot u = \varepsilon_{\mathcal{D}} \cdot u = \varepsilon_V$ , pour tout  $\lambda \in \mathcal{D}$ .

### 3.1.2 Proposition L'addition d'un moduloïde est idempotente.

**Preuve**  $u \oplus u = eu \oplus eu = (e \oplus e)u = eu = u$  ■

On peut donc ordonner canoniquement un moduloïde par  $u \preceq v \Leftrightarrow u \oplus v = v$ . Un moduloïde est dit *complet* si l'ensemble ordonné sous-jacent est complet et si en outre les propriétés de distributivité (ii) et (iii) s'étendent aux sommes infinies.

**3.1.3 Remarque** La condition de distributivité infinie est équivalente à

$$\mathcal{D} \times V \rightarrow V, (\lambda, u) \mapsto \lambda u \text{ continue.}$$

**3.1.4 Définition (Application Linéaire)** Soient  $V, V'$  deux  $\mathcal{D}$ -demi-modules, et  $f : V \rightarrow V'$ . L'application  $f$  est dite linéaire à gauche si

- (i)  $f(u \oplus v) = f(u) \oplus f(v)$ ,
- (ii)  $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ .

On notera  $\mathbf{L}(V, V')$  l'ensemble de ces applications.

Une application linéaire vérifie donc

$$f(\varepsilon) = \varepsilon ,$$

comme il résulte de (ii) avec  $\lambda = \varepsilon$  et  $u$  quelconque. L'ensemble des applications linéaires d'un moduloïde  $V$  dans lui même, muni de la somme et du produit de composition est un dioïde. On le notera  $\mathbf{L}(V)$ . Si  $V$  est un moduloïde complet, l'ensemble des applications linéaires continues de  $V$  dans  $V$  est lui même un dioïde complet. On le notera  $\mathcal{L}(V)$ .

**3.1.5 Exemple (Fonctions réelles)** L'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , muni du max point par point et de la loi de composition externe  $\mathbb{R}_{\max} \times V \rightarrow V$  définie par  $\forall t \in \mathbb{R}, (\lambda u)(t) = \lambda + u(t)$  est un moduloïde sur  $\mathbb{R}_{\max}$ . On le notera  $\mathbb{R}_{\max}^{\mathbb{R}}$ .

**3.1.6 Exemple (Applications croissantes)** L'ensemble des applications croissantes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  est un sous-moduloïde de  $\mathbb{R}_{\max}^{\mathbb{R}}$ .

**3.1.7 Exemple (Fonctions concaves scs)** L'ensemble des fonctions concaves de  $\mathbb{R}$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  est un sous-moduloïde complet de  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}}$  (l'inf de fonctions concaves est concaves, idem pour les fonctions scs).

**3.1.8 Familles génératrices, familles libres, bases** Etant donnée une famille  $\{u_i\}_{i \in I}$  de vecteurs d'un  $\mathcal{D}$ -moduloïde  $V$ , on notera  $\text{vect}\langle u_i \rangle_{i \in I}$  le moduloïde des vecteurs combinaisons linéaires d'un nombre fini de  $u_i$ . Si  $\text{vect}\langle u_i \rangle_{i \in I} = V$ , la famille est dite génératrice. Un moduloïde est dit *de type fini* s'il admet une famille génératrice finie. Si un vecteur  $v \in \text{vect}\langle u_i \rangle$  s'écrit de manière unique comme  $\sum_i \lambda_i u_i$ , la famille est dite *libre*. Une famille libre et génératrice est une *base*.

**3.1.9 Contre exemple** (Moller, [72]). Voici un sous moduloïde de  $\mathbb{R}_{\max}^2$  qui n'est pas de type fini:

$$M = \{(x, y) \mid x \prec y\} \cup \{(\varepsilon, \varepsilon)\} .$$

**3.1.10 Contre exemple** Soit le sous moduloïde de  $\mathbb{B}^2$

$$V = \text{vect}\langle u_1, u_2 \rangle \quad \text{où} \quad u_1 = \begin{bmatrix} e \\ e \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} .$$

La famille  $\{u_1, u_2\}$  est génératrice minimale (i.e. toute sous famille stricte engendre un sous moduloïde strict). Cependant, on a  $eu_1 \oplus eu_2 = eu_1$ , ce qui montre que la famille  $\{u_1, u_2\}$  n'est pas libre.

Cet exemple suggère que l'existence de bases est un phénomène “rare” dans les moduloïdes. Cette rareté sera précisée ultérieurement par l'étude des matrices inversibles (cf. §6).

## 3.2 Familles génératrices minimales

**3.2.1 Définition (Redondance)** *Le vecteur  $u_j$  de la famille  $\{u_i\}_{i \in I}$  est dit redondant si*

$$u_j \in \text{vect}\langle u_i \rangle_{i \neq j} .$$

*Une famille dont un vecteur est redondant est dite redondante.*

**3.2.2 Définition (Base faible)** *On appelle base faible de  $V$  une famille génératrice minimale.*

Il est clair qu'une famille génératrice est minimalessi elle est non redondante. En outre, étant donné une famille génératrice *finie*, on obtient une famille génératrice minimale après suppression éventuelle de vecteurs redondants. En résumé:

**3.2.3 Observation** Tout moduloïde de type fini admet une famille génératrice minimale.

On peut calculer cette famille génératrice minimale pour peu que l'on sache déterminer les vecteurs redondants. Nous aurons besoin pour cela de certains résultats de résiduation, et nous reportons l'étude à la section §5.5 de ce chapitre.

## 4 Équations implicites linéaires dans les dioïdes complets

### 4.1 Généralités

Dans les dioïdes complets, les équations linéaires du type  $x = ax \oplus b$  se résolvent trivialement:

**4.1.1 Proposition** *L'inéquation  $x \succeq ax \oplus b$  dans un dioïde complet admet une plus petite solution, égale à  $a^*b$ , où  $a^*$  est définie par:*

$$a^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} a^n .$$

*En outre,  $x = a^*b$  réalise l'égalité dans  $x \succeq ax \oplus b$ .*

**Preuve** On a par une induction immédiate

$$x \succeq (e \oplus a \oplus \dots \oplus a^n)b \oplus a^{n+1}x, \quad (4.1.a)$$

d'où  $x \succeq (e \oplus a \oplus \dots \oplus a^n)b$  pour tout  $n$ , d'où  $x \succeq a^*b$ . L'égalité résulte de la propriété de distributivité infinie 2.1.6. ■

**4.1.2 Application** L'ensemble des endomorphismes continus d'un moduloïde complet  $V$ , muni de la somme et du produit forme un dioïde complet. Soit  $f \in \mathcal{L}(V)$ . La plus petite solution de

$$g \succeq f \circ g \oplus \text{Id}$$

est donnée par  $g = f^*$

**4.1.3 Généralisation** Soit  $f$  un endomorphisme continu d'un moduloïde complet  $V$ . Le plus petit vecteur  $x \in V$  solution de  $x \succeq f(x) \oplus b$  est donné par  $x = f^*(b)$  et satisfait l'égalité.

**4.1.4 Exemple** Soit  $f(x) := axb$ . Il résulte immédiatement de 4.1.2 que la plus petite solution de  $x \succeq axb \oplus c$  est donnée par  $x = a^*cb^* = f^*(c)$ .

**4.1.5 Notation** L'opération “plus” dérivée de l'étoile sera utile:

$$a^+ := a \oplus a^2 \oplus \dots \oplus a^n \oplus \dots = aa^* = a^*a. \quad (4.1.b)$$

On a

$$e \oplus a^+ = a^*. \quad (4.1.c)$$

Nous établissons ci-après les propriétés de base des opérations étoile et plus.

**4.1.6 Proposition** *Dans un dioïde complet  $\mathcal{D}$ , on a:*

- (i)  $(a^*)^* = a^*$ ,
- (ii)  $(a^+)^* = a^*$ ,
- (iii)  $(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^*$ ,
- (iv)  $(a \oplus b)^* = b^*(ab^*)^*$ ,
- (v)  $a^* = a^*a^*$ .
- (vi)  $(ab^*)^+ = a(a \oplus b)^*$
- (vii)  $(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^*$

*En outre, lorsque  $\mathcal{D}$  est commutatif:*

$$(viii) (a \oplus b)^* = a^*b^*$$

**Preuve** (i).  $x \succeq ax \oplus e$  entraîne  $x \succeq a(ax \oplus e) \oplus e \succeq a^2x \oplus e$  et plus généralement  $x \succeq a^n x \oplus e$ , soit en sommant  $x \succeq a^*x \oplus e$ . On en déduit que la plus petite solution de  $x \succeq ax \oplus e$ , i.e.  $a^*$ , est plus grande que la plus petite solution de  $x \succeq a^*x \oplus e$ , i.e.  $(a^*)^*$ . Par ailleurs, trivialement,  $a^* \preceq (a^*)^*$ , d'où l'égalité.

(ii):  $a^* \preceq (a^+)^* \preceq (a^*)^* = a^*$  (par (i)).

(iii),(iv): par 4.1.1, les propositions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{aligned} x &\succeq (a \oplus b)^* \\ x &\succeq ax \oplus bx \oplus e \\ x &\succeq a^*bx \oplus a^* \\ x &\succeq (a^*b)^*a^*. \end{aligned}$$

La formule (iii) en résulte. (iv) s'obtient dualement en remplaçant  $ax \oplus bx$  par  $xa \oplus xb$  dans la preuve ci-dessus.

(v): par (iii),  $a^* = (a \oplus a)^* = (aa^*)^*a^* = (a^+)^*a^* = a^*a^*$  (par (ii)).

(vi) Via (iv),  $a(a \oplus b)^* = ab^*(ab^*)^* = (ab^*)^+$ .

(vii): résulte de (vi) et de la formule (4.1.c) ci-dessus.

(viii): On a alors pour  $k \geq 1$ :  $(a^*b)^k = (a^*)^k b^k = a^*b^k$  (par (v)). D'où  $(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^* = (e \oplus \bigoplus_{k \geq 1} a^*b^k)a^* = a^* \oplus \bigoplus_{k \geq 1} a^*b^k = a^*b^*$ . ■

**4.1.7 Exemple** Dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ , on a  $a^* = +\infty$  si  $a > 0$  et  $a^* = 0$  sinon.

**4.1.8 Exemple** Dans le dioïde des relations défini en 1.0.12, on a  $R^* = e \oplus R \oplus R^2 \oplus \dots$ . Il s'agit de la fermeture réflexive transitive de  $R$  (i.e. la plus fine relation réflexive et transitive plus grossière que  $R$ ).

**4.1.9 Exemple** Soit  $A$  un alphabet, et  $l \in A$ . Dans  $\mathcal{P}(A^*)$ , on a  $\{l\}^* = \{\_, l, ll, lll, \dots\}$ . On observera que la notation  $A^*$  pour le monoïde libre formé sur  $A$  est consistante (on a  $A^* = \{\_\} \cup A \cup A.A \cup \dots$ ).  $A^*$  s'interprète comme l'ensemble des mots formés sur  $A$ , et  $A^+$  comme l'ensemble des mots de longueur au moins 1.

## 4.2 Equations implicites matricielles et interprétation combinatoire

La Proposition 4.1.1 s'étend au cas matriciel ( $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$  et  $b \in \mathcal{D}^{n \times p}$ ). Classiquement, le calcul des étoiles de matrices se réduit aux calcul d'étoiles de scalaires via une élimination de Gauss. On a par exemple l'algorithme suivant, fort simple (cf. Backhouse & Carre [4], Gondran & Minoux [47]):

**4.2.1 Algorithme (de Jordan)** Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  à coefficients dans un dioïde complet, et  $A^{(0)}, \dots, A^{(n)}$  les matrices définies par:

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= A \\ \text{pour } i, j = 1, \dots, n \quad A_{ij}^{(k)} &= A_{ij}^{(k-1)} \oplus A_{ik}^{(k-1)}(A_{kk}^{(k-1)})^*A_{kj}^{(k-1)}. \end{aligned} \tag{4.2.a}$$

On a  $A^{(n)} = A^+$ .

Le terme  $A_{kk}^{(k-1)}$  sera qualifié de  $k$ -ième pivot par analogie avec l'algorithme de Gauss usuel.

**Preuve** Soient  $a_{ij}$   $n^2$  lettres. Nous introduisons la matrice générique

$$\mathfrak{A}: \quad \mathfrak{A}_{ij} = a_{ij} .$$

Il suffit de montrer le résultat pour la matrice générique en raisonnant dans le dioïde complet libre  $\mathbb{B}\langle\langle a_{ij} \rangle\rangle$  engendré par les lettres  $a_{ij}$ . (cf. 2.3.5). La preuve repose sur l'interprétation des séries en termes d'ensembles de chemins du graphe associé à la matrice  $\mathfrak{A}$  (voir aussi [85]).

**4.2.2 Définition (Chemin)** On appelle chemin de longueur  $k$  de  $j$  à  $i$  un mot de la forme

$$p = a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{k-1} i_k}$$

avec<sup>3</sup>  $i_i = i$  et  $i_k = j$ .

On dira que le chemin passe éventuellement par  $I$  si  $i_2, \dots, i_{k-1} \in I$  (mais tous les  $i \in I$  ne sont pas forcément atteints). Le coefficient  $a_{ij}$  s'interprète comme le chemin de longueur 1 allant de  $j$  à  $i$ . nous renvoyons le lecteur à [4, 47] pour une preuve algébrique de l'algorithme de Jordan. Nous le déduisons d'une interprétation combinatoire de l'élimination de Gauss, qui nous sera utile dans la suite.

**4.2.3 Lemme**  $\mathfrak{A}_{ij}^{(k)}$  est égal à la somme des chemins de longueur au moins 1 de  $j$  à  $i$  passant éventuellement par les sommets  $1, \dots, k$ .

**Preuve** par récurrence. Dans (4.2.a), le second terme  $\mathfrak{A}_{ik}^{(k-1)}(\mathfrak{A}_{kk}^{(k-1)})^*\mathfrak{A}_{kj}^{(k-1)}$  s'interprète comme la somme des chemins de  $j$  à  $k$  puis de  $k$  à  $k$ , puis de  $k$  à  $i$ , ces chemins passant par ailleurs éventuellement par  $1, \dots, k-1$ , soit la somme des chemins de  $j$  à  $i$  passant au moins une fois par  $k$  et éventuellement par  $1, \dots, k-1$ . Les chemins ne passant pas par  $k$  ont été déjà énumérés dans le premier terme de (4.2.a). La récurrence en résulte. ■

Finalement,  $\mathfrak{A}_{ij}^{(n)}$  est égal à la somme des chemins de longueur au moins 1 de  $j$  à  $i$ , i.e.  $\mathfrak{A}_{ij}^{(n)} = \mathfrak{A}_{ij}^+$ . Cela achève la preuve de 4.2.1. ■

On a les deux conséquences immédiates suivantes:

**4.2.4 Corollaire** L'étoile du  $k$ -ième pivot  $\mathfrak{A}_{kk}^{(k-1)}$  est égale à la somme des circuits passant par  $k$  et éventuellement par les sommets  $1, \dots, k-1$ .

**4.2.5 Corollaire** La somme des étoiles des pivots est égale à la somme des circuits du graphe. La somme des pivots est supérieure aux circuits élémentaires de longueur au moins 1.

**4.2.6 Exemple (Enumération des chemins)** On illustre l'algorithme de Jordan 4.2.1 sur le graphe à 2 sommets représenté sur la Figure 0.1. Soit

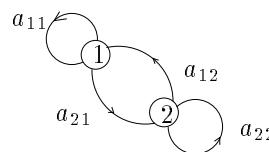


Figure 0.1: Enumération des chemins

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

<sup>3</sup>Noter que le chemin se lit de la droite vers la gauche.

la matrice  $A^+$  représente alors les chemins non triviaux du graphe. On a en appliquant 4.2.1:

$$X = A^+ = \begin{bmatrix} a_{11}^+ \oplus a_{11}^* a_{12} (a_{22} \oplus a_{21} a_{11}^* a_{12})^* a_{21} a_{11}^* & a_{11}^* a_{12} (a_{22} \oplus a_{21} a_{11}^* a_{12})^* \\ (a_{22} \oplus a_{21} a_{11}^* a_{12})^* a_{21} a_{11}^* & (a_{22} \oplus a_{21} a_{11}^* a_{12})^+ \end{bmatrix}, \quad (4.2.b)$$

et en développant  $A_{22}^+$

$$A_{22}^+ = a_{22} \oplus a_{21} a_{12} \oplus a_{21} a_{11} a_{12} \oplus a_{22} a_{21} a_{12} \oplus a_{21} a_{12} a_{22} \oplus \dots$$

ce qui est bien l'ensemble des chemins de 2 à 2.

La notion suivante nous sera utile dans la suite.

**4.2.7 Chemins commutatifs** Nous dirons que  $p \in \mathbb{B}[[a_{ij}]]$  est un chemin commutatif de  $j$  à  $i$  si c'est l'image commutative d'un chemin  $p' \in \mathbb{B}\langle\langle a_{ij} \rangle\rangle$ . Définition analogue pour les circuits. Par exemple,  $a_{12}a_{13}a_{21}$  est un chemin commutatif de 1 à 3 car  $a_{12}a_{21}a_{13}$  est un chemin de 1 à 3. L'intérêt d'un chemin commutatif tient au fait immédiat suivant:

**4.2.8 Lemme** *Un chemin  $p$  commutatif de  $j$  à  $i$  se factorise sous la forme*

$$p = p' c_1^{n_1} \dots c_l^{n_l},$$

où  $p$  est un chemin élémentaire de  $j$  à  $i$  et les  $c_i$  sont des circuits élémentaires.

**4.2.9 Exemple** Le chemin non commutatif de 7 à 6,  $p = a_{61}a_{12}a_{24}a_{41}a_{13}a_{32}a_{21}a_{17}$  peut s'écrire  $p = p'c_1c_2$ , avec  $p' = a_{61}a_{17}$  et  $c_1 = a_{12}a_{24}a_{41}$ ,  $c_2 = a_{13}a_{32}a_{21}$  ou bien  $p = p'c'_1c'_2$ , avec  $c'_1 = a_{12}a_{21}$  et  $c'_2 = a_{24}a_{41}a_{13}a_{32}$ .

## 5 Résiduation

Une référence de base est Blyth et Janowitz [11]. Les applications résiduables sont parfois appelées *correspondances de Galois* (cf. Remarque 5.1.9 ci-dessous).

### 5.1 Applications résiduables

**5.1.1 Proposition** *Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles ordonnés, et  $f : E \rightarrow F$  une application croissante. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *il existe  $g : F \rightarrow E$  croissante, telle que  $f \circ g \leq \text{Id}_E$  et  $g \circ f \geq \text{Id}_F$ ,*
- (ii) *pour tout  $y$  appartenant à  $F$ , l'ensemble  $\{t \in E \mid f(t) \leq y\}$  admet un plus grand élément.*

**Preuve** Supposons (i). Si  $f(t) \leq y$ ,  $t \leq g \circ f(t) \leq g(y)$ . De plus,  $f \circ g(y) \leq y$  ce qui montre que  $g(y)$  est le plus grand élément de  $\{t \in E \mid f(t) \leq y\}$ . Réciproquement, l'application  $g : y \mapsto \max\{t \in E \mid f(t) \leq y\}$  vérifie (i). ■

**5.1.2 Définition** *Une application croissante  $f$  est dite résiduable si et seulement si elle vérifie les conditions de la proposition 5.1.1. L'application  $f^\dagger$  ainsi définie:*

$$y \mapsto f^\dagger(y) = \max\{t \in E \mid f(t) \leq y\} \quad (5.1.a)$$

est appelée *application résiduée de  $f$* .

On note  $\text{Res}^\dagger(E, F)$  l'ensemble des applications résiduables de  $E$  dans  $F$ . On dira que  $f$ , croissante, est *dualement résiduable* si elle vérifie les deux conditions équivalentes:

- (iii) Il existe  $g : E \rightarrow F$  croissante, telle que  $f \circ g \geq \text{Id}_E$  et  $g \circ f \leq \text{Id}_F$
- (iv) Pour tout  $y$  appartenant à  $F$ , l'ensemble  $\{t \in E \mid f(t) \geq y\}$  admet un plus petit élément.

L'on notera alors

$$f^\dagger(y) = \min\{t \in E \mid f(t) \geq y\}, \quad (5.1.b)$$

appelée résiduée duale de  $f$ . L'ensemble des applications dualement résiduables de  $E$  dans  $F$  sera noté  $\text{Res}^\dagger(F, E)$ .

**5.1.3 Proposition** *L'application  $f \mapsto f^\dagger$  est une bijection décroissante de  $(\text{Res}^\dagger(E, F), \leq)$  dans  $(\text{Res}^\dagger(F, E), \leq)$ .*

**Preuve** En comparant (i) et (iii), il est clair que  $f$  est la résiduée duale de  $f^\dagger$ . ■

Voici quelques exemples bien connus d'applications résiduées:

**5.1.4 Exemple (image réciproque)** Etant donné une application  $f : A \rightarrow B$ , l'application associée  $\varphi_f : (\mathcal{P}(A), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{P}(B), \subseteq)$ ,  $\varphi_f(X) = f(X)$  est résiduable. On a  $\varphi_f^\dagger(Y) = f^{-1}(Y)$  (image réciproque de  $Y$  par  $f$ ).

**5.1.5 Exemple (conjuguée convexe)** La transformée de Fenchel

$$\mathcal{F} : ((\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^{\mathbb{R}}, \geq) \rightarrow ((\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^{\mathbb{R}}, \leq), \quad \mathcal{F}f(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}}[px - f(x)],$$

est résiduable (noter le renversement de l'ordre entre les ensembles de départ et d'arrivée), et l'on a  $\mathcal{F}^\dagger = \mathcal{F}$ .

**5.1.6 Exemple (partie entière)** L'injection canonique  $(\mathbb{Z}, \leq) \rightarrow (\mathbb{R}, \leq)$  est résiduable. Elle admet pour résiduée l'application "partie entière".

**5.1.7 Exemple (orthogonal)** Munissons  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire usuel. L'application

$$(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \supseteq), \quad X \mapsto X^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in X, x \cdot y = 0\}$$

est résiduable.

Un certain nombre de propriétés s'établissent immédiatement:

**5.1.8 Proposition** *Pour toutes  $f, f_i, g \in \text{Res}^\dagger(E, F)$ , on a:*

- (i)  $f \circ f^\dagger \circ f = f$
- (ii)  $f^\dagger \circ f \circ f^\dagger = f^\dagger$
- (iii)  $(f \circ g)^\dagger = g^\dagger \circ f^\dagger$
- (iv)  $(f \vee g)^\dagger = f^\dagger \wedge g^\dagger$ .
- (v) Si  $E$  et  $F$  sont des treillis complets, on a  $(\bigvee_i f_i)^\dagger = \bigwedge_i f_i^\dagger$ .

**Preuve** (i):  $f = f \circ \text{Id}_E \leq f \circ (f^\dagger \circ f) = (f \circ f^\dagger) \circ f \leq \text{Id}_F \circ f = f$ . Démonstration analogue pour (ii).  
 (iii):  $(f \circ g) \circ (g^\dagger \circ f^\dagger) = f \circ (g \circ g^\dagger) \circ f^\dagger \leq f \circ \text{Id} \circ f^\dagger \leq \text{Id}$ . L'autre égalité de 5.1.1,(i) se montre de manière analogue.  
 (iv): on décompose  $t \mapsto f(t) \vee g(t)$  comme le produit des applications suivantes:

$$\begin{array}{lll} E \xrightarrow{\varphi_1} E^2 & E^2 \xrightarrow{\varphi_2} F^2 & F^2 \xrightarrow{\varphi_3} F \\ t \mapsto (t, t) & (u, v) \mapsto (f(u), g(v)) & (x, y) \mapsto x \vee y \end{array}$$

et l'on applique (iii) en remarquant que les applications résiduées associées à cette décomposition sont données par:  $\varphi_1^\dagger((x', y')) = x' \wedge y'$ ,  $\varphi_2^\dagger(u', v') = (f^\dagger(u'), g^\dagger(v'))$ ,  $\varphi_3^\dagger(t') = (t', t')$ . On a ainsi:  $(f \vee g)^\dagger = (\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)^\dagger = \varphi_1^\dagger \circ \varphi_2^\dagger \circ \varphi_3^\dagger = f^\dagger \wedge g^\dagger$ . Preuve identique pour (v). ■

**5.1.9 Remarque** Il faut bien noter ici le renversement de l'ordre entre les ensembles de départ et d'arrivée dans 5.1.7. Certains auteurs [43] appellent correspondances de Galois les applications résiduables générales, d'autres plus classiques, comme Ore [78], réservent cette dénomination à la donnée de deux applications décroissantes  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow E$  telles que  $f \circ g \geq \text{Id}$  et  $g \circ f \geq \text{Id}$ , ce qui est une généralisation immédiate de la correspondance de Galois usuelle [90]. La notion de correspondance de Galois au sens de Ore et la notion d'application résiduable coïncident donc à un renversement de l'ordre près sur l'un des deux ensembles. L'intérêt de ce renversement est manifeste dans la formule (iii) ci-dessus: la composée de deux applications croissantes est croissante, et l'on peut donc composer les applications résiduables, ce qui n'est pas le cas pour des correspondances de Galois.

**5.1.10 Proposition** Soient  $(E, \leq)$  et  $(F, \leq)$  deux ensembles ordonnés complets de plus petits éléments respectifs  $\varepsilon_E$  et  $\varepsilon_F$ . Une application croissante  $f : (E, \leq) \rightarrow (F, \leq)$  est résiduable si et seulement si elle est continue et  $f(\varepsilon_E) = \varepsilon_F$ .

**Preuve** Si  $f$  est résiduable, l'ensemble  $\{x \mid f(x) \leq \varepsilon\}$  admet un plus grand élément  $x_0$  et par croissance de  $f$ ,  $f(\varepsilon) \leq f(x_0) \leq \varepsilon$ . L'autre inégalité est triviale. Montrons que  $f$  est alors continue. On a pour toute partie  $X$  de  $E$   $f(\bigvee_{x \in X} x) \geq \bigvee_{x \in X} f(x)$  (par croissance de  $f$ ). En outre:

$$f(\bigvee_{x \in X} x) \leq f(\bigvee_{x \in X} f^\dagger \circ f(x)) \leq f \circ f^\dagger(\bigvee_{x \in X} f(x)) \leq \bigvee_{x \in X} f(x),$$

ce qui montre que  $f$  est continue. Réciproquement, si  $f(\varepsilon) = \varepsilon$ , pour tout  $y \in F$ , l'ensemble  $X = \{x \mid f(x) \leq y\}$  est non vide. En outre, par continuité de  $f$ ,  $f(\bigvee_{x \in X} x) = \bigvee_{x \in X} f(x)$  et donc  $X$  admet un plus grand élément, ce qui satisfait la condition 5.1.1,(ii). ■

**5.1.11 Définition** On appelle fermeture une application croissante  $\phi : E \rightarrow E$ , telle que  $\phi \circ \phi = \phi$  et  $\phi \geq \text{Id}$ .

**5.1.12 Proposition** Une fermeture résiduable  $\phi$  vérifie (i):  $\phi = \phi^\dagger \circ \phi$  et (ii):  $\phi = \phi \circ \phi^\dagger$ .

**Preuve**  $\phi = \text{Id} \circ \phi \geq \phi \circ \phi^\dagger \circ \phi \geq \phi^\dagger \circ \phi \circ \phi = \phi^\dagger \circ \text{Id} \circ \phi \geq \text{Id} \circ \phi$ . Preuve duale pour (ii). ■

**5.1.13 Définition (Fermés)** Si  $f$  est résiduable,  $f^\dagger \circ f$  est une fermeture, et l'on appelle fermés les éléments de la forme  $f^\dagger \circ f(x)$ .

On définit de manière analogue une fermeture duale, et l'on constate que  $f$  est une bijection de l'ensemble des fermés sur l'ensemble des fermés duaux.

**5.1.14 Exemple** Pour les exemples déjà traités, les fermés sont respectivement 5.1.5: les fonctions convexes sci ne prenant jamais la valeur  $-\infty$  ou la prenant identiquement (cf. [2]), 5.1.6: les nombres entiers, 5.1.7: les sous espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ .

**5.1.15 Lemme (de projection)** Soit  $E$  un ensemble ordonné complet et  $F$  un sous ensemble complet de  $E$  contenant l'élément minimal de  $E$ ,  $\varepsilon$ . L'injection  $\iota : F \rightarrow E$  est résiduable. L'application résiduée  $\text{pr}_F = \iota^\dagger$  vérifie:

- (i)  $\text{pr}_{F \circ \text{pr}_F} = \text{pr}_F$ ,
- (ii)  $\text{pr}_F \leq \text{Id}_E$ ,
- (iii)  $x \in F \Leftrightarrow \text{pr}_F(x) = x$ .

**Preuve** La résiduabilité de  $\iota$  résulte de 5.1.10. (i):  $\iota^\dagger \circ \iota^\dagger = (\iota \circ \iota)^\dagger = \iota^\dagger$ . (ii):  $\text{pr}_F = \iota \circ \text{pr}_F = \iota \circ \iota^\dagger \leq \text{Id}$ . (iii): si  $x \in F$ , alors  $x = \iota(x)$ , donc  $\text{pr}_F(x) = \text{pr}_{F \circ \iota}(x) \geq x$ . L'autre inégalité est donnée par (ii). La réciproque est triviale. ■

Les propriétés (i) et (ii) affirment que  $\text{pr}_F$  est une fermeture duale, la propriété (iii) affirme que les fermés duals sont les éléments de  $F$ .

**5.1.16 Exemple** Soit  $E = \mathbb{R}^{\overline{\mathbb{R}}}$ ,  $F = \text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}})$  sous ensemble complet des fonctions croissantes. Par application de 5.1.15 au sous ensemble complet des fonctions croissantes, pour tout  $u \in \mathbb{R}^{\overline{\mathbb{R}}}$ , Il existe une plus grande fonction croissante  $\bar{u}$  plus petite que  $u$ . On montrera en V.3.3.1 que  $\bar{u}$  est donnée par

$$\bar{u}(t) = \inf_{\tau \geq t} u(\tau),$$

ce qui se voit aussi de manière élémentaire.

**5.1.17 Exemple** En appliquant le dual de 5.1.15 à l'exemple précédent, on a l'existence d'une plus petite fonction croissante  $\underline{u}$  plus grande que  $u$ , donnée par

$$\underline{u}(t) = \sup_{\tau \leq t} u(\tau).$$

## 5.2 Dioïdes additivement résidués

On étudie maintenant l'équation  $a \oplus x = b$  dans un dioïde. Si  $a \succ b$ , on a  $a \oplus x \succeq a \succ b$  et donc l'équation  $a \oplus x = b$  n'a pas de solution. Cependant, l'inéquation  $a \oplus x \succeq b$  admet toujours la solution triviale  $x = b$ . On est ainsi conduit à considérer les inéquations de type (0.0.b).

**5.2.1 Définition** Le dioïde  $\mathcal{D}$  est additivement résidué si pour tout  $a \in \mathcal{D}$ , l'application  $\tau_a : x \mapsto x \oplus a$  est dualement résiduable.

En d'autres termes,  $\mathcal{D}$  est additivement résidué si pour tous  $a$  et  $b \in \mathcal{D}$ , l'inéquation

$$a \oplus x \succeq b \tag{5.2.a)$$

admet une plus petite solution. On notera  $b \boxminus a (= \tau_a^\dagger(b))$  cette plus petite solution, et on lira “ $b$  moins-résidué  $a$ ”.

**5.2.2 Définition**  $\mathcal{D}$  est un dioïde inf-complet distributif si et seulement si:

- (i) toute partie  $X$  de  $\mathcal{D}$  admet une borne-inf pour l'ordre naturel,
- (ii)  $(\bigwedge_{x \in X} x) \oplus y = \bigwedge_{x \in X} (x \oplus y)$

**5.2.3 Proposition** *Un dioïde inf-complet distributif est additivement résidué.*

**Preuve** On note que  $b \in \{x \mid \tau_a(x) \succeq b\} \neq \emptyset$ . Cet ensemble admet un plus petit élément car  $\tau_a$  est dualement continue. ■

**5.2.4 Remarque** Le treillis sous-jacent à un dioïde inf-complet distributif n'est autre que le dual d'une “algèbre complète de Heyting” ([43], Chapitre 0).

Les propriétés principales de l'opération moins-résidué sont:

**5.2.5 Proposition** *Pour tout  $u, v, w \in \mathcal{D}$  ( $\mathcal{D}$  additivement résidué), on a*

- (i)  $x \mapsto x \boxminus u$  croissante
- (ii)  $x \mapsto u \boxminus x$  décroissante
- (iii)  $u \boxminus u = \varepsilon$
- (iv)  $(u \boxminus v) \boxminus w = u \boxminus (v \oplus w)$
- (v)  $(u \oplus v) \boxminus w = (u \boxminus w) \oplus (v \boxminus w)$
- (vi)  $u \oplus v = (u \boxminus v) \oplus v$
- (vii)  $(u \boxminus v)w \succeq uw \boxminus vw$  (égalité si  $w$  inversible)
- (viii)  $u \boxminus (u \boxminus v) \preceq v$ .

*En outre, lorsque  $\mathcal{D}$  est inf-complet distributif:*

- (ix)  $w \boxminus (u \wedge v) = (w \boxminus u) \oplus (w \boxminus v)$
- (x)  $u = (u \boxminus v) \oplus (u \wedge v)$ .

**Preuve :** (i),(ii),(iii): immédiates.

(iv) se réécrit  $\tau_w^\downarrow[\tau_v^\downarrow(u)] = (\tau_v \circ \tau_w)^\downarrow(u)$ , qui n'est autre que 5.1.8,(iii).

(v): exprime que  $\tau_w^\downarrow$  est un  $\oplus$ -morphisme, ce qui est vrai, car  $\tau_w^\downarrow$  est résiduable, donc continue (cf. 5.1.10).

(vi): provient de ce que  $\tau_a$  est une fermeture,  $\tau_a \circ \tau_a = \tau_a$  et  $\tau_a \geq \text{Id}$  (cf. 5.1.12).

(vii): résulte de ce que  $vw \oplus (u \boxminus v)w = (v \oplus (u \boxminus v))w \succeq uw$ . En obtient l'égalité en notant que  $(uw \boxminus vw)w^{-1} \succeq u \boxminus v$  lorsque  $w$  est inversible.

(viii): résulte de  $(u \boxminus v) \oplus v \succeq u$ .

(ix): si la borne-inf distribue par rapport au  $\oplus$ , on a  $\tau_{u \wedge v} = \tau_u \wedge \tau_v$ , et par le dual de 5.1.8,(iv), on a  $\tau_{u \wedge v}^\downarrow = \tau_u^\downarrow \oplus \tau_v^\downarrow$ , soit (ix).

(x): ce fait est spécifique à l'opération  $\boxminus$ . On a  $(u \boxminus v) \oplus (u \wedge v) = ((u \boxminus v) \oplus u) \wedge ((u \boxminus v) \oplus v) = u \wedge (u \oplus v) = u$ . ■

**5.2.6 Exemple** Le dioïde des parties de  $\mathbb{R}$  munies de l'union et de la somme vectorielle est additivement résidué, et  $A \boxminus B = A \setminus B$  (différence ensembliste). On a  $\mathbb{R}^+ \boxminus \{0\} = \mathbb{R}^{+*}$  mais  $(\mathbb{R}^+ + \mathbb{R}) \boxminus (\{0\} + \mathbb{R}) = \mathbb{R} \boxminus \mathbb{R} = \emptyset$ , ce qui montre que l'inégalité dans 5.2.5,(vii) peut être stricte.

**5.2.7 Exemple** Dans  $\mathbb{R}_{\max}$ , on a  $x \boxminus y = \varepsilon$  si  $x \leq y$  et  $x \boxminus y = x$  sinon.

**5.2.8 Contre exemple** Le dioïde des parties compactes convexes de  $\mathbb{R}^2$  (cf. 1.0.11) n'est ni inf-complet distributif, ni additivement résidué. On a

$$\text{conv}((A \cap B) \cup C) \subset \text{conv}(A \cup C) \cap \text{conv}(B \cup C), \text{ i.e. } (A \cap B) \oplus C \subset (A \oplus C) \cap (B \oplus C) ,$$

mais l'égalité est en général fausse (même en dimension 1, considérer dans  $\mathbb{R}$  les parties  $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{0\}$ ), de sorte que la propriété de distributivité 5.2.2 est déjà en défaut pour des inf finis. Sur la Figure 0.2, on a représenté deux éléments minimaux non comparables  $X_0$  et  $X_1$  de l'ensemble des solutions de  $X \oplus B \supset A$ .

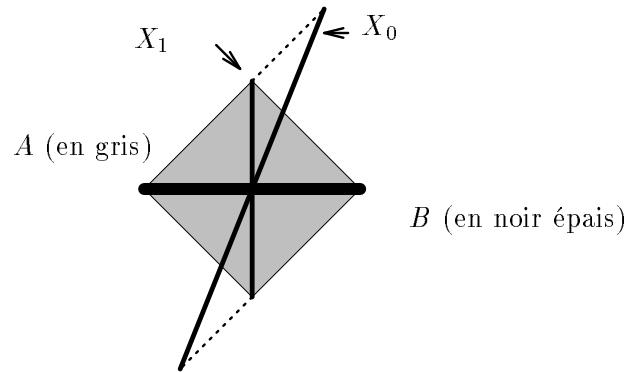


Figure 0.2: Un dioïde non additivement résidué

### 5.3 Dioïdes multiplicativement résidués

On considère maintenant l'équation  $ax = b$ . Dans la mesure où l'ensemble des sous solutions est non vide (il contient  $\varepsilon$ ), on introduit naturellement l'inéquation (0.0.c).

**5.3.1 Définition** *Le dioïde  $\mathcal{D}$  est multiplicativement résidué si pour tout  $a \in \mathcal{D}$ , les homothéties à gauche et à droite, respectivement  $\lambda_a : x \mapsto ax$  et  $\rho_a : x \mapsto xa$ , sont résiduables.*

On notera

$$\begin{aligned} a \backslash x &= \lambda_a^\dagger(x) = \max\{x \mid ax \preceq b\} \\ x/a &= \rho_a^\dagger(x) = \max\{x \mid xa \preceq b\} . \end{aligned}$$

**5.3.2 Proposition** *Un dioïde complet est multiplicativement résidué.*

**Preuve** résulte immédiatement de 5.1.10. ■

Les propriétés suivantes sont élémentaires:

**5.3.3 Proposition** *Pour tout  $(u, v, w) \in \mathcal{D}^3$ , ( $\mathcal{D}$  dioïde multiplicativement résidué), on a*

- (i)  $x \mapsto u \backslash x$  croissante
- (ii)  $x \mapsto x \backslash u$  décroissante

- (iii) si  $u$  inversible,  $u \setminus v = u^{-1}v$
- (iv)  $w \setminus (v \setminus u) = (vw) \setminus u$
- (v)  $(u \setminus v)/w = u \setminus (v/w)$ .
- (vi)  $(u \setminus v)w \preceq u \setminus (vw)$  (égalité si  $w$  inversible)
- (vii)  $w \setminus (u \oplus v) \succeq w \setminus u \oplus w \setminus v$  (égalité si  $w$  inversible)
- (viii)  $(v/w) \setminus u \succeq w(v/u)$  (égalité si  $w$  inversible).

En outre, lorsque  $\mathcal{D}$  est un inf-dioïde:

- (ix)  $w \setminus (u \wedge v) = w \setminus u \wedge w \setminus v$  et  $w \setminus (\bigwedge_i u_i) = \bigwedge_i w \setminus u_i$  pour une famille infinie  $\{u_i\}$  si  $\mathcal{D}$  est complet,
- (x)  $(u \oplus v) \setminus w = (u \setminus w) \wedge (v \setminus w)$  et  $(\bigoplus_i u_i) \setminus w = \bigwedge_i (u_i \setminus w)$  pour une famille infinie  $\{u_i\}$  si  $\mathcal{D}$  est complet,
- (xi)  $(u \wedge v) \setminus w \succeq u \setminus w \oplus v \setminus w$

Formulations duales pour les quotients à droite.

**Preuve** (i),(ii),(iii): immédiates.

(iv): résulte de 5.1.8,(iii).

(v): se réécrit  $\lambda_u^\dagger \circ \rho_w^\dagger(v) = \rho_w^\dagger \circ \lambda_u^\dagger(v)$ . Or  $\lambda_u \circ \rho_w = \rho_w \circ \lambda_u$ , d'où par 5.1.8,(iii),  $\rho_w^\dagger \circ \lambda_u^\dagger = \lambda_u^\dagger \circ \rho_w^\dagger$ .

(vi): on a  $u(u \setminus v)w \preceq vw$ , d'où  $(u \setminus v)w \preceq u \setminus (vw)$ . Si  $w$  est inversible,  $(u \setminus v)w \succeq (u \setminus (vww^{-1}))w \succeq (u \setminus vw)$ , d'où l'égalité.

(vii): argument analogue pour l'inégalité. L'égalité résulte de (iii).

(viii): on a  $(v/w)w(v \setminus u) \preceq v(v \setminus u) \preceq u$ , d'où l'inégalité. Si  $w$  est inversible, on a:

$$\begin{aligned} (v/w) \setminus u &= (vw^{-1}) \setminus u && \text{(dual de (iii))} \\ &= w^{-1} \setminus (v \setminus u) && \text{(via (iv))} \\ &= w(v \setminus u) && \text{(via (iii)).} \end{aligned}$$

(ix): l'application  $\lambda_w^\dagger$  est dualement résiduable, donc dualement continue (5.1.10).

(x): résulte de 5.1.8,(iv),(v).

(xi): clair. ■

**5.3.4 Exemple** Le dioïde  $\mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$ , muni du max et du  $+$ , est un inf-dioïde additivement et multiplicativement résidué, mais n'est pas complet.

**5.3.5 Exemple** Dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ , le quotient est donné par:

$$\begin{array}{ll} a \setminus b = b - a & \text{si } a \text{ et } b \text{ sont finis} \\ a \setminus (+\infty) = (+\infty) & \text{pour tout } a \\ a \setminus \varepsilon = \varepsilon & \text{pour tout } a \text{ fini} \\ \varepsilon \setminus a = (+\infty) & \text{pour tout } a \\ (+\infty) \setminus a = \varepsilon & \text{pour } a \neq (+\infty). \end{array}$$

Il faut bien voir que  $(+\infty) \otimes \varepsilon = "(+\infty) + (-\infty)" = \varepsilon = -\infty$  alors que  $\varepsilon/\varepsilon = "-\infty - (-\infty)" = +\infty$ , de sorte que la notation " $a - b$ " est ambiguë pour des valeurs infinies des paramètres.

## 5.4 Résiduation matricielle

Le résultat suivant est du à Blyth [10]:

**5.4.1 Proposition** Si  $\mathcal{D}$  est un inf-dioïde multiplicativement résidué et  $A \in \mathcal{D}^{n \times p}$  alors les applications  $\lambda_A : \mathcal{D}^{p \times k} \rightarrow \mathcal{D}^{n \times k}$ ,  $X \mapsto AX$  et  $\rho_A : \mathcal{D}^{q \times n} \rightarrow \mathcal{D}^{q \times p}$ ,  $X \mapsto XA$ , sont résiduables, et l'on a:

$$(\lambda_A^\uparrow(B))_{ij} = \bigwedge_{l=1}^k A_{li} \setminus B_{lj} \quad (5.4.a)$$

$$(\rho_A^\uparrow(B))_{ij} = \bigwedge_{l=1}^q B_{il} / A_{jl} . \quad (5.4.b)$$

**Preuve** Les propositions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{aligned} & AX \preceq B \\ & \forall i, j, \bigoplus_k A_{ik} X_{kj} \preceq B_{ij} \\ & \forall i, j, k, A_{ik} X_{kj} \preceq B_{ij} \\ & \forall i, j, k, X_{kj} \preceq A_{ik} \setminus B_{ij} \\ & \forall j, k, X_{kj} \preceq \bigwedge_i A_{ik} \setminus B_{ij} . \end{aligned}$$

D'où (5.4.a). ■

L'on notera  $A \setminus B$  pour  $\lambda_A^\uparrow(B)$  et  $B/A$  pour  $\rho_A^\uparrow(B)$ . L'on vérifie que le formulaire 5.3.3 s'étend aux cas matriciel pourvu que les dimensions des matrices soient compatibles.

**5.4.2 Remarque** On notera que  $A \setminus B$  a la même dimension que  $A^T B$  et que  $B/A$  a la même dimension que  $B A^T$ .

**5.4.3 Exemple** Dans  $\mathbb{N}_{\text{ppcm}}$  (cf 1.0.9), on considère le système d'inéquations:

$$\begin{cases} \text{ppcm}(2x_1, 3x_2) \leq 12 \\ \text{ppcm}(5x_1, 2^2 x_2) \leq 240, \end{cases} \quad (5.4.c)$$

i.e.:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} 2^2 \times 3 \\ 2^4 \times 3 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 240 \end{bmatrix}. \quad (5.4.d)$$

On a par application de (5.4.a):

$$\begin{aligned} x_1 &= (2^2 \times 3)/2 \wedge (2^4 \times 3 \times 5)/5 = 2 \times 3 = 6 \\ x_2 &= (2^2 \times 3)/3 \wedge (2^4 \times 3 \times 5)/2^2 = 2^2 = 4. \end{aligned}$$

On vérifie que  $[x_1, x_2]^T$  est solution de (5.4.d) (et satisfait même l'égalité).

**5.4.4 Cas des demi-corps idempotents** On a vu en 2.1.10 qu'un demi-corps idempotent non trivial  $\mathcal{D}$  n'admettait pas de plus grand élément. En conséquence, l'inéquation scalaire  $\varepsilon \cdot x \preceq \varepsilon$  n'admet pas de solution maximale, et  $\mathcal{D}$  n'est pas multiplicativement résidué. Cependant, les homothéties  $\lambda_a : x \mapsto ax$  non triviales (i.e.  $a \neq \varepsilon$ ) sont résiduées, et l'on a  $\lambda_a^\uparrow(b) = a^{-1}b$ . Dans le cas matriciel, les homothéties non dégénérées s'avèrent également résiduables, et l'on a l'extension suivante de 5.4.1:

**5.4.5 Proposition** Soit  $\mathcal{D}$  un demi-corps idempotent,  $A \in \mathcal{D}^{n \times p}$ . L'application  $\lambda_A : \mathcal{D}^{p \times k} \rightarrow \mathcal{D}^{n \times k}$ ,  $X \mapsto AX$  est résiduable si et seulement si  $A$  n'a pas de colonne nulle.  $A \setminus B$  est donné par la formule (5.4.a), où l'inf est restreint aux  $l$  tels que  $A_{li} \neq \varepsilon$ .

**5.4.6 Autre point de vue** On retrouve 5.4.5 en adjoignant au demi-corps idempotent  $\mathcal{D}$  un élément  $\infty$  vérifiant  $x \oplus \infty = \infty$  et  $x \otimes \infty = \infty \otimes x = \infty$  pour  $x \neq \varepsilon$ . On constate que le dioïde  $\mathcal{D} \cup \{\infty\}$  ainsi obtenu est un inf-dioïde multiplicativement résidué, dans lequel la théorie précédente s'applique.

Le résultat suivant est une généralisation immédiate de 5.4.1 en dimension infinie.

**5.4.7 Quotient résidé du produit de sup-convolution** Dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}^{\mathbb{R}}$  (cf. 2.1.8), l'opération résiduée du produit de sup-convolution est donné par

$$(f \setminus g)(x) = \bigwedge_{t \in \mathbb{R}} [f(t - x) \setminus g(t)] \quad (5.4.e)$$

où  $\setminus$  dans le membre de droite dénote le quotient de  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ . Pour des valeurs finies de  $f$  et  $g$ , on a avec des notations plus familières:

$$(f \setminus g)(x) = \inf_{t \in \mathbb{R}} [-f(t - x) + g(t)] . \quad (5.4.f)$$

## 5.5 Caractérisation des familles génératrices minimales

On examine ici comment, étant donné un moduloïde de type fini, on obtient une famille génératrice minimale.

**5.5.1 Hypothèse**  $\mathcal{D}$  est un dioïde additivement résidué tel que les homothéties de rapport non nul soient résiduables, et:

- (i)  $\forall u, \lambda \in \mathcal{D}, \lambda \prec e \Rightarrow u \boxminus \lambda u = u,$
- (ii)  $\forall u \neq \varepsilon, u/u = e.$

En particulier, un dioïde intègre (cf. §1,(1.0.b)) totalement ordonné vérifie l'hypothèse 5.5.1(i) et vérifie (ii) dès que  $u/u$  est bien défini. On verra plus loin que le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}[X]$  vérifie également ces hypothèses.

**5.5.2 Lemme** Sous l'hypothèse 5.5.1, on a:

- (i)  $u \neq \varepsilon$  et  $u = \alpha u \Rightarrow \alpha = e,$
- (ii)  $u_1 \oplus \dots \oplus u_n = e \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\}, u_i = e,$
- (iii)  $\alpha \prec e$  et  $u = \alpha u \oplus v$  entraîne  $u = v.$

**Preuve** (i): On a  $e = u/u = (\alpha u)/u \succeq \alpha(u/u) = \alpha$ . Si  $\alpha \prec e$ , on a d'après 5.5.1(i)  $u = \alpha u \Rightarrow u \boxminus (\alpha u) = u = (\alpha u) \boxminus (\alpha u) = \varepsilon$ : absurde.

(ii): On a si  $\forall i, u_i \prec e$ ,  $e = e \boxminus u_1 = (u_2 \boxminus u_1) \oplus \dots \oplus (u_n \boxminus u_n)$ , comme  $u_i \boxminus u_1 \preceq u_i \prec e$ , on obtient après une récurrence immédiate une absurdité.

(iii): Trivialement,  $u \succeq v$ . On a d'après l'hypothèse 5.5.1(i),  $u = u \boxminus (\alpha u) = (\alpha u \oplus v) \boxminus (\alpha u) = [(\alpha u) \boxminus (\alpha u)] \oplus [v \boxminus (\alpha u)] = \varepsilon \oplus [v \boxminus (\alpha u)] \preceq v$ . ■

Le résultat suivant est du à Moller [72] et Wagneau [97, 99], à un raffinement près des hypothèses.

**5.5.3 Théorème** Soit  $L$  un ensemble et  $V$  un sous moduloïde de type fini de  $\mathcal{D}^L$ . Sous l'hypothèse 5.5.1, deux familles génératrices minimales  $\{u_i\}_{i \in I}$  et  $\{v_j\}_{j \in J}$  de  $V$  sont reliées de la manière suivante:

$$\exists \lambda \in (\mathcal{D} \setminus \{\varepsilon\})^I, \quad \exists \sigma \text{ bijection } I \rightarrow J, \quad \forall i \in I, \quad v_i = \lambda_i v_{\sigma(i)} .$$

En outre, les scalaires  $\lambda_i$  sont inversibles dans  $\mathcal{D}$ .

**5.5.4 Définition (Dimension faible)** Sous l'hypothèse 5.5.1, on appellera dimension faible d'un sous-moduloïde  $V$  de type fini le cardinal d'une famille génératrice minimale de  $V$ . Lorsque  $V$  n'est pas de type fini, on le dira de dimension faible infinie.

Le Théorème 5.5.3 affirme "l'unicité" de la base faible (à l'ordre des vecteurs de bases et à une "dilatation" près de ceux-ci).

**Preuve** Les familles  $\{u_i\}$  et  $\{v_j\}$  étant génératrices, on a des relations de la forme:

$$u_i = \bigoplus_{j \in J} \lambda_{ij} v_j, \quad v_j = \bigoplus_{k \in I} \mu_{jk} u_k .$$

En remplaçant  $v_j$  dans le premier membre, on obtient

$$u_i = \bigoplus_{j \in J, k \in I} \lambda_{ij} \mu_{jk} u_k . \quad (5.5.a)$$

En projetant (5.5.a) sur une coordonnée non nulle de  $u_i$ , on obtient

$$u_i^l \succeq \bigoplus_{j \in J} \lambda_{ij} \mu_{ji} u_i^l .$$

Il résulte de l'hypothèse 5.5.1,(ii) que  $\bigoplus_{j \in J} \lambda_{ij} \mu_{ji} \preceq u_i^l / u_i^l = e$ . On obtient l'égalité par application du Lemme 5.5.2,(iii): on contredirait la non redondance de la famille. On a donc

$$\bigoplus_{j \in J} \lambda_{ij} \mu_{ji} = e .$$

D'après le Lemme 5.5.2,(ii), il existe  $j_i \in J$  tel que  $\lambda_{ij_i} \mu_{j_i i} = e$ , d'où

$$u_i \succeq \lambda_{ij_i} v_{j_i} \succeq \lambda_{ij_i} \mu_{j_i i} u_i = u_i ,$$

et l'égalité  $u_i = \lambda_{ij_i} v_{j_i}$ , ainsi que par 5.5.2,(i),  $\lambda_{ij_i} \mu_{j_i i} = e$ . L'application  $i \mapsto \sigma(i) := j_i$  est clairement une bijection de  $I$  dans  $J$ . ■

**5.5.5 Algorithme** Soit  $V = \text{vect}\langle u_i \rangle_{1 \leq i \leq p}$  un sous moduloïde de  $\mathcal{D}^n$ . Via 5.5.3, on obtient une famille génératrice minimale de  $V$  de la manière suivante: 1/ si aucun vecteur n'est redondant,  $\{u_i\}$  est une base faible de  $V$ . 2/ si l'on trouve un vecteur redondant, on le supprime de la famille  $\{u_i\}$ , et on recommence en 1/.

Ainsi, la détermination d'une famille génératrice minimale exige seulement de savoir vérifier la redondance d'un vecteur, ou plus généralement de déterminer si un vecteur  $v$  appartient à  $\text{vect}\langle u_j \rangle_{j \in J}$ . Soit  $U$  la matrice obtenue en concaténant les vecteurs  $u_j$ . On a

$$v \in \text{vect}\langle u_j \rangle \Leftrightarrow v = U(U \setminus v) .$$

Ainsi, le problème est ramené au calcul du quotient résidué d'un vecteur par une matrice. Quitte à supprimer les vecteurs nuls de la famille  $u_i$ , on pourra supposer que  $U$  n'a pas de colonne nulle et appliquer 5.4.5.

**5.5.6 Exemple** Soit  $V$  le sous moduloïde de  $\mathbb{R}_{\max}^3$  engendré par les trois vecteurs suivants:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

On a:

$$[u_1, u_2]([u_1, u_2] \setminus u_3) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \setminus \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = u_3,$$

d'où l'on déduit que  $u_3$  est redondant. Les vecteurs  $u_1$  et  $u_2$  n'étant pas proportionnels, la famille  $\{u_1, u_2\}$  n'est pas redondante et constitue donc une famille génératrice minimale de  $V$ .

**5.5.7 Remarque** On notera qu'étant donnée un moduloïde  $V$  engendré par une famille infinie  $\{v_i\}_{i \in I}$  il est équivalent de dire que  $V$  est de type fini et qu'il existe une sous famille finie extraite de  $\{v_i\}$  engendrant  $V$ . Soit en effet une famille finie  $\{w_1, \dots, w_k\}$  engendrant  $V$ . Chaque  $w_j$  s'exprime comme combinaison linéaire finie des  $v_i$  soit  $w_j = \bigoplus_{l \in I_j} \lambda_l v_l$ , donc la sous famille finie de  $\{v_i\}_{i \in I_1 \cup \dots \cup I_k}$  est génératrice.

### 5.5.8 Idéaux de type fini de $\mathbb{R}_{\max}[X]$

$\mathbb{R}_{\max}[X]$  est naturellement muni d'une structure de  $\mathbb{R}_{\max}[X]$  moduloïde. On appellera ici *idéaux* (resp. idéaux de type fini) (par analogie avec l'algèbre usuelle et non avec la théorie des treillis) les sous-moduloïdes de  $\mathbb{R}_{\max}[X]$  (resp. de type fini). Notons que  $\mathbb{R}_{\max}[X]$  vérifie l'hypothèse 5.5.1, le point (ii) étant non trivial.

**5.5.9 Lemme** Pour tout polynôme  $u \in \mathbb{R}_{\max}[X]$ , on a  $u \setminus u = e$ .

**Preuve** Soit  $u = \bigoplus_{i=0}^p u_i X^i$ . D'abord, si  $bX^r \neq \varepsilon$ , on a

$$(bX^r) \setminus u = \bigoplus_{r \leq i \leq p} b^{-1} u_i X^{i-r},$$

comme il résulte d'une vérification immédiate. On a ensuite par  $\wedge$ -distributivité:

$$\begin{aligned} u \setminus u &= \bigwedge_{k=0}^p (u_k X^k) \setminus \left( \bigoplus_{i=0}^p u_i X^i \right) \\ &= \bigwedge_{0 \leq k \leq p, u_k \neq \varepsilon} \bigoplus_{k \leq i \leq p} u_k^{-1} u_i X^{i-p} \end{aligned} \tag{5.5.b}$$

En considérant le terme  $k = p$  ( $u_p \neq \varepsilon$ ), on trouve que  $u \setminus u$  est majoré par  $u_p^{-1} u_p = e$ . L'autre inégalité est immédiate. ■

Ainsi, le Théorème 5.5.3 s'applique, et un idéal de type fini de  $\mathbb{R}_{\max}[X]$  admet une unique famille génératrice minimale (à une permutation et une dilatation près des vecteurs de base). Soit par exemple  $I$  l'idéal engendré par les trois polynômes suivants:

$$P = e \oplus X^2, \quad Q = e \oplus X, \quad R = e \oplus X^2 \oplus X^4 \oplus X^8 \oplus X^9.$$

On a:

$$\begin{aligned} R/P &= (e \oplus X^2 \oplus X^4 \oplus X^8 \oplus X^9) \wedge (e \oplus X^2 \oplus X^4 \oplus X^8 \oplus X^9)/X^2 = e \oplus X^2 \\ R/Q &= \dots = X^8. \end{aligned}$$

On constate que  $R = (R/P)P \oplus (R/Q)Q$ , ce qui montre que  $R$  est redondant. Finalement,  $\{P, Q\}$  est une famille génératrice minimale de l'idéal  $I$ .

## 6 Matrices inversibles dans les demi-anneaux positifs

On étudie ici les matrices inversibles. On introduit une classe de demi-anneaux dits positifs qui couvrent typiquement le cas du cône positif d'un anneau ordonné sans diviseurs de zéro ou le cas d'un dioïde sans diviseur de zéro. On montre que les matrices rectangulaires inversibles à gauche contiennent une sous matrice monomiale de taille maximale (produit d'une matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls par une matrice de permutation). Dans un demi-corps, cette condition est suffisante, ce qui généralise un Théorème bien connu sur les matrices de Boole. On étendra dans la section suivante ces résultats aux applications linéaires inversibles.

### 6.1 Préliminaires

**6.1.1 Définition** *Le demi-anneau  $\mathcal{P}$  est positif s'il est sans diviseurs de zéro et si de plus*

$$a \oplus b = \varepsilon \Rightarrow a = \varepsilon \text{ et } b = \varepsilon . \quad (6.1.a)$$

Si  $\mathcal{P}$  est ordonné, la condition suivante entraîne (6.1.a).

$$\forall a, b \in \mathcal{P}, \quad a \oplus b \succeq a . \quad (6.1.b)$$

Il résulte qu'un dioïde sans diviseurs de zéro est positif, ainsi que le cône positif d'un anneau intègre ordonné. La caractéristique majeure des demi-anneaux positifs est d'être homomorphes au demi-anneau de boole  $\mathbb{B}$ .

**6.1.2 Observation** Le demi-anneau  $\mathcal{P}$  est positif si et seulement si l'application  $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{B}$ ,

$$\pi(a) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } a = \varepsilon \\ e & \text{sinon} \end{cases}$$

est un homomorphisme de demi-anneaux.

On étend  $\pi$  aux matrices en posant  $(\pi(A))_{ij} = \pi(A_{ij})$  et l'on a alors pour des matrices de tailles compatibles:  $\pi(A \oplus B) = \pi(A) \oplus \pi(B)$ ,  $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$ .

**6.1.3 Définition (Matrices monomiales)** *Les matrices de la forme  $DP$  où  $D$  est une matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls et  $P$  une matrice de permutation sont dites monomiales.*

**6.1.4 Lemme**  *$A$  est monomiale si et seulement si  $\pi(A)$  est une matrice de permutation.*

**Preuve** Si  $A = DP$ , alors  $\pi(A) = \pi(D)\pi(P) = \text{Id}_P = P$ . Réciproquement, si  $P = \pi(A)$  est une matrice de permutation, alors  $D = AP^{-1}$  est diagonale (car  $\pi(D) = \pi(A)\pi(A)^{-1} = \text{Id}$ ), et donc  $A = DP$ . ■

Il résulte de la preuve du lemme que l'écriture  $A = DP$  est unique. En notant que  $DP = P(P^{-1}DP)$ , on voit qu'il est équivalent de définir les matrices monomiales comme des matrices de la forme  $PD'$ .

## 6.2 Matrices inversibles

On dira qu'une matrice  $A$  est inversible à gauche s'il existe une matrice  $B$  telle que  $BA = \text{Id}$ . Le résultat suivant généralise un fait bien connu pour les matrices de Boole carrées (Théorème de Wedderburn, Rutherford [100, 88]). L'argument est adapté de Berman et Plemmons [6] qui donnent le résultat pour des matrices à coefficients dans  $\mathbb{R}^+$ .

**6.2.1 Théorème** *Une matrice de Boole  $A$  de taille  $n \times p$  est inversible à gauche si et seulement si l'on peut extraire de  $A$  une matrice de permutation de taille  $p \times p$ .*

**Preuve** Notons  $\delta_{ij}$  le booléien valant  $e$  si  $i = j$  et  $\varepsilon$  sinon. De

$$\bigoplus_{k=1}^p B_{ik} A_{kj} = \delta_{ij}$$

on tire une application  $\{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ ,  $j \mapsto \varphi(j)$  telle que  $B_{i\varphi(j)} = e$ ,  $A_{\varphi(j)j} = e$  et  $A_{\varphi(j)l} = \varepsilon$  pour  $l \neq j$ . Autrement dit, la ligne  $\varphi(j)$  de la matrice  $A$  a un seul élément non nul sur la colonne  $j$ , donc  $\varphi$  injecte  $\{1, \dots, p\}$  dans  $\{1, \dots, n\}$  et la matrice formée des lignes d'indices  $\varphi(1), \dots, \varphi(p)$  est une matrice de permutation de taille  $p$ . ■

Plus généralement:

**6.2.2 Théorème** *Une matrice carrée  $A$  à coefficients dans un demi-anneau positif  $\mathcal{P}$  est inversible à gauche si et seulement si elle est monomiale ( $A = DP$ ), les coefficients diagonaux de  $D$  étant inversibles à gauche.*

**Preuve** Si  $A$  est inversible à gauche, alors  $\pi(A)$  est inversible à gauche dans  $\mathbb{B}^{n \times n}$ , donc par 6.2.1,  $\pi(A) = P$  (matrice de permutation), d'où l'on déduit via le lemme 6.1.4 que  $A = DP$  est monomiale.  $A$  est inversible à gauche si et seulement si  $D$  est inversible à gauche, i.e. si tous les coefficients diagonaux de  $D$  sont inversibles à gauche. ■

**6.2.3 Remarque** La décomposition  $A = DP$  est l'analogue dans un demi-anneau positif de la décomposition polaire (décomposition de Cartan) des matrices complexes non dégénérées, qui affirme qu'une telle matrice s'écrit de manière unique comme produit d'une matrice symétrique (en l'occurrence  $D$ ) et d'une matrice orthogonale (en l'occurrence  $P$  telle que  $P^{-1} = P^T$ ). On constate ainsi que le groupe linéaire d'un demi-anneau positif est réduit à ses éléments triviaux.

**6.2.4 Théorème** *Une matrice  $A$  de taille  $n \times p$  à coefficients dans un demi-corps positif est inversible à gauche si et seulement si il existe une sous matrice de  $A$  de taille  $p \times p$  monomiale.*

**Preuve**  $\pi(A)$  est alors inversible à gauche dans  $\mathbb{B}^{n \times n}$  et via 6.2.1, on a une sous matrice de permutation:

$$\pi(A)_{[K]} = P,$$

et donc par 6.1.4,  $A_{[K]} = DP$ . ■

**6.2.5 Remarque** Dans le cas d'un demi-anneau positif commutatif, on trouve en dualisant le théorème 6.2.2 que  $A$  est inversible à droite si et seulement si  $A = PD$  pour une matrice diagonale  $D$  inversible à droite, donc inversible, et l'on conclut que les matrices carrées sur un demi-anneau positif commutatif sont inversibles à gauche si et seulement si elles sont inversibles à droite, ce qui est un cas particulier d'un résultat prouvé généralement pour les demi-anneaux commutatifs par Reutenauer et Straubing [86].

## 7 Inversibilité d'applications linéaires

Etant donnés  $E$  et  $F$  deux moduloïdes,  $f \in L(E, F)$ , on a l'équivalence des deux propriétés suivantes:

- (i)  $f$  est injective
- (ii) il existe  $g \in L(\text{Im } f, E)$ , telle que  $g \circ f = \text{Id}$

Cela n'implique pas l'inversibilité à gauche de  $f$  (ce qui serait  $g \circ f = \text{Id}$  avec  $g \in L(F, E)$ ). Dans le cas particulier où  $E = \mathcal{D}^n$  et  $F = \mathcal{D}^p$ , on souhaiterait se ramener au Théorème 6.2.4 relatif aux matrices inversibles à gauche. Il faut pour cela montrer que l'application linéaire  $g \in L(\text{Im } f, \mathcal{D}^n)$  se prolonge en une application linéaire  $\tilde{g} \in L(\mathcal{D}^p, \mathcal{D}^n)$ .

### 7.1 Prolongement d'applications linéaires

Le résultat suivant généralise un résultat donné par Kim [55] pour  $\mathbb{B}^n$ :

**7.1.1 Théorème** Soit  $\mathcal{K}$  un demi-corps idempotent,  $V$  un sous-moduloïde de type fini de  $\mathcal{K}^n$ ,  $f \in L(V, \mathcal{K}^p)$ .  $f$  admet un prolongement linéaire à  $\mathcal{K}^n$ .

**Preuve** On est dans la situation suivante:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}^n & \xrightarrow{\quad \cup \quad} & \mathcal{K}^p \\ & \searrow \tilde{f} & \swarrow f \\ V & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathcal{K}^p \end{array}$$

Soit  $i$  l'injection canonique de  $V$  dans  $\mathcal{K}^n$ . On peut voir l'équation  $f = \tilde{f} \circ i$  comme un problème de résiduation.

**7.1.2 Lemme (résiduabilité de la composition)** Soit  $h \in L(V, \mathcal{K}^n)$ , et  $\mathcal{V}$  une partie finie génératrice de  $V$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) Pour tout  $j$ , l'ensemble  $P(j) = \{v \in \mathcal{V} \mid h(v)_j \neq \varepsilon\}$  est non vide.
- (ii) L'application  $\varphi : L(\mathcal{K}^n, \mathcal{K}^p) \rightarrow L(V, \mathcal{K}^p)$ ,  $g \mapsto g \circ h$  est résiduable.

**Preuve** du Lemme. Supposons (i) et montrons que l'application résiduée est donnée par:

$$(\varphi^\dagger(f))(e_j) = \bigwedge_{v \in P(j)} (h(v)_j)^{-1} f(v) ,$$

où  $e_j$  désigne le  $j$ -ième vecteur de la base canonique. Les propositions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{aligned} f &\succeq g \circ h \\ \forall v \in \mathcal{V}, \quad f(v) &\succeq g \circ h(v) \\ \forall v \in \mathcal{V}, \quad f(v) &\succeq g \left( \bigoplus_{j=1}^n h(v)_j e_j \right) \\ \forall v \in \mathcal{V}, \quad f(v) &\succeq \bigoplus_{j=1}^n h(v)_j g(e_j) \\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \bigwedge_{v \in P(j)} (h(v)_j)^{-1} f(v) &\succeq g(e_j) \end{aligned}$$

ce qui montre que (i) $\Rightarrow$ (ii). La réciproque est claire. ■

On considère maintenant le cas où  $h$  est l'injection canonique de  $V$  dans  $\mathcal{K}^n$ . En supprimant éventuellement des composantes, on peut supposer la propriété 7.1.2,(i) réalisée. Il faut voir que  $\varphi \circ \varphi^\dagger(f) = f$ . On a  $(\varphi \circ \varphi^\dagger)(f) = \varphi^\dagger(f) \circ i$ . Montrons que  $(\varphi^\dagger(f))(v) = f(v)$  pour tout  $v \in \mathcal{V}$ . On a

$$\begin{aligned} (\varphi^\dagger(f))(v) &= \bigoplus_{j=1}^n v_j (\varphi^\dagger(f))(e_j) \\ &= \bigoplus_{j=1}^n v_j \left( \bigwedge_{w \in P(j)} w_j^{-1} f(w) \right) \\ &= \bigwedge_{\delta \in \{1, \dots, n\}^{P(j)}} \bigoplus_{j=1}^n v_j (\delta(j)_j)^{-1} f(\delta(j)) \\ &= \bigwedge_{\delta \in \{1, \dots, n\}^{P(j)}} f \left( \bigoplus_{j=1}^n v_j (\delta(j)_j)^{-1} \delta(j) \right) . \end{aligned}$$

Or, pour toute application  $\delta \in \{1, \dots, n\}^{P(j)}$ ,

$$\bigoplus_{j=1}^n v_j (\delta(j)_j)^{-1} \delta(j) \succeq v$$

(projeter sur la  $q$ -ième coordonnée et prendre  $j = q$ ), et donc  $\varphi \circ \varphi^\dagger(f) \succeq f$ . L'autre sens résultant de la définition de l'application résiduée  $\varphi^\dagger$ , le Théorème est prouvé. ■

**7.1.3 Corollaire** *Toute application linéaire d'un sous moduloïde de type fini de  $\mathcal{K}^p$  dans  $\mathcal{K}^n$  est représentable par une matrice.*

**Preuve** Une telle application se prolonge en une application  $f : \mathcal{K}^p \rightarrow \mathcal{K}^n$ , qui s'écrit:

$$f(x) = \bigoplus_{i=1}^n x_i \cdot f(e_i)$$

laquelle formule n'est autre que le produit du vecteur ligne  $[x_1, \dots, x_p]$  par la matrice formée des colonnes  $f(e_i)$  (on remarquera qu'une application linéaire à gauche se représente par un produit de matrice à droite). ■

## 7.2 Applications linéaires injectives

**7.2.1 Définition** *Le demi-anneau positif  $\mathcal{P}$  est dit faiblement archimédien s'il vérifie la propriété suivante:*

$$\forall x, y \in (\mathcal{P} \setminus \{\varepsilon\})^2, \quad \exists \lambda, \mu, \lambda', \mu' \in (\mathcal{P} \setminus \{\varepsilon\})^2, \quad \lambda x \preceq \mu y, \quad \lambda' y \preceq \mu' x . \quad (7.2.a)$$

**7.2.2 Remarque** D'ordinaire, on appelle archimédien un monoïde ordonné où pour tout  $y$ , on a pour  $x \succ e$  un naturel  $n$  tel que  $x^n \succeq y$ . Cohen, Moller, Quadrat et Viot [23] appellent archimédien un dioïde  $\mathcal{D}$  où

$$x \neq \varepsilon \Rightarrow \exists \lambda \in \mathcal{D}, \quad \lambda x \succeq y \quad (7.2.b)$$

La notion 7.2.1 est plus faible. Par exemple,  $\mathbb{B}[X]$  est faiblement archimédien mais n'est pas archimédien au sens de [23] ni au sens classique. Soient en effet  $P = X$  et  $Q = e$ . Il n'existe pas de polynôme  $R$  tel que  $PR \succeq Q$  (considérer la valuation de  $PR$ ) ce qui contredit (7.2.b). En considérant  $P = e \oplus X^2 \succ e$  et  $Q = X$ , on constate que l'on n'a pas  $P^n \succeq Q$ , ce qui montre que  $\mathbb{B}[X]$  n'est pas archimédien au sens usuel.

### 7.2.3 Hypothèse $\mathcal{P}$ est un demi-anneau positif faiblement archimédien vérifiant (6.1.b).

L'intérêt de cette hypothèse tient au fait suivant.

**7.2.4 Proposition** *Soit  $\mathcal{P}$  vérifiant l'hypothèse 7.2.3,  $\mathcal{V}$  un sous-moduloïde de  $\mathcal{P}^p$ . Pour toute application linéaire  $f$  de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{P}^n$ , il existe une application linéaire  $F : \pi(\mathcal{V}) \rightarrow \mathbb{B}^n$  telle que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^p \supset \mathcal{V} & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{B}^p \supset \pi(\mathcal{V}) & \xrightarrow{F} & \mathbb{B}^n \end{array}$$

**7.2.5 Lemme** *Sous l'hypothèse 7.2.3, on a pour tous  $u, v \in \mathcal{P}^n$ :*

$$\pi(u) \preceq \pi(v) \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \neq \varepsilon, \quad \lambda u \preceq \mu v$$

**Preuve**  $\Leftarrow$ : Cela résulte de  $\pi(\lambda v) = \pi(v)$  pour  $\lambda \neq \varepsilon$ .

$\Rightarrow$ : Si  $n = 1$ , c'est la définition même d'un demi-anneau faiblement archimédien. Pour  $n = 2$ , on peut supposer toutes les composantes de  $u$  et  $v$  non nulles. On a

$$\lambda_1 u_1 \preceq \mu_1 v_1, \quad \lambda_2 u_2 \preceq \mu_2 v_2 .$$

Si  $\mathcal{P}$  est commutatif, on écrit  $\lambda_1 \lambda_2 u \preceq (\lambda_2 \mu_1 \oplus \lambda_1 \mu_2)v$  et le résultat est acquis. Si  $\mathcal{P}$  n'est pas commutatif, c'est à peine plus compliqué. En utilisant (7.2.a), on a  $\lambda_3, \mu_3 \neq 0$  tels que  $\lambda_3 \lambda_1 \preceq \mu_3 \lambda_2$ , et donc

$$\begin{aligned} \lambda_3 \lambda_1 u_2 &\preceq \mu_3 \lambda_2 u_2 \preceq \mu_3 \mu_2 v_2 \\ \lambda_3 \lambda_1 u_1 &\preceq \lambda_3 \mu_1 v_1 , \end{aligned}$$

d'où une inégalité du type  $\lambda u \preceq \mu v$ , avec  $\lambda = \lambda_3 \lambda_1$  et  $\mu = \mu_3 \mu_2 \oplus \lambda_3 \mu_1$ . Le cas général résulte d'une récurrence immédiate. Le lemme 7.2.5 est prouvé. ■

**Preuve** de la Proposition 7.2.4. Prenons  $X = \pi(u)$  avec  $u \in \mathcal{V}$ . Il faut vérifier que  $F(X) = \pi(f(u))$  ne dépend pas du choix de  $u$ . Si  $\pi(u) = \pi(v)$ , alors par 7.2.5,  $\lambda u \preceq \mu v$ , et donc  $\pi(f(u)) = \pi(f(\lambda u)) \preceq \pi(f(\lambda v)) = \pi(f(v))$ , et égalité par symétrie, ce qui montre que  $F$  est bien défini. On a

$$F(\pi(u) \oplus \pi(v)) = F \circ \pi(u \oplus v) = \pi \circ f(u \oplus v) = \pi \circ f(u) \oplus \pi \circ f(v) = f \circ \pi(u) \oplus f \circ \pi(v) = F(u) \oplus F(v)$$

ce qui montre que  $F$  est additive. Trivialement,  $F(\alpha X) = \alpha F(X)$  (à ne vérifier que pour  $\alpha = e$  et  $\varepsilon$ ). ■

**7.2.6 Lemme** *Sous l'hypothèse 7.2.3, pour qu'une application linéaire  $f : \mathcal{P}^p \rightarrow \mathcal{P}^n$  soit injective, il est nécessaire que la matrice de  $f$  contienne une sous matrice monomiale de taille  $p$ .*

**Preuve** Soit  $h \in L(\text{Im } f, \mathcal{P}^p)$  telle que  $h \circ f = \text{Id}$ . On a en passant aux Booléiens via la Proposition 7.2.4 des applications  $F$  et  $H$  telles que  $\pi \circ f = F \circ \pi$  et  $\pi \circ h = H \circ \pi$ . On peut écrire

$$\begin{aligned} h \circ f &= \text{Id} \\ \pi \circ h \circ f &= \pi \\ H \circ \pi \circ f &= \pi \\ H \circ F \circ \pi &= \pi \end{aligned}$$

et il résulte de la surjectivité de  $\pi$  que  $H \circ F = \text{Id}_{\mathbb{B}^p}$ . D'après le Théorème de prolongement, l'application linéaire  $H$  se représente par une matrice. On peut donc appliquer le Théorème 6.2.1 qui montre que la matrice  $F_0$  associée à  $F$  contient une matrice monomiale de taille  $p$ . Notons  $f_0$  la matrice associée à  $f$ . On a  $F_0 = \pi(f_0)$  ce qui montre le Lemme. ■

**7.2.7 Théorème** *Sous l'hypothèse 7.2.3, une application linéaire à gauche  $f : \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{P}^n$  est injective si et seulement si elle se représente sous la forme  $X \mapsto XDP$ ,  $P$  étant une matrice de permutation et la matrice diagonale  $D$  étant telle que les applications  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $x \mapsto xD_{ii}$  soient injectives.*

**Preuve** Le Lemme ci-dessus montre que  $f$  se représente par une matrice monomiale. Les conditions d'injectivité de l'application  $X \mapsto DPX$  sont claires. ■

La proposition suivante résulte immédiatement du Lemme 7.2.6.

**7.2.8 Proposition** *Soit  $\mathcal{K}$  un demi-corps idempotent. Une application linéaire de  $\mathcal{D}^n$  dans  $\mathcal{D}^p$  est injectivessi sa matrice dans la base canonique contient une sous matrice monomiale de taille  $p$ .*

**7.2.9 Corollaire** *Les seuls éléments intègres de  $\mathbb{R}_{\max}[X]$  sont les monômes.*

**Preuve** Cherchons à quelle condition l'endomorphisme  $\lambda_P : Q \mapsto PQ$ , de  $\mathbb{R}_{\max}[X]$  est injectif. En considérant la restriction de  $\lambda_P : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_p[X]$ , où  $p = n + \deg P$  et  $\mathbb{R}_q[X]$  dénote le moduloïde des polynômes de degré au plus  $q$ , on constate que la matrice de  $P$  dans la base canonique contient une matrice monomiale de taille  $n$ , ce qui n'est possible que si  $P$  est de la forme  $aX^k$ . ■

# Chapitre I

## Symétrisation

### Introduction

On introduit ici une notion de symétrisation, valide dans un demi-anneau quelconque. Son intérêt essentiel est d'établir de manière algébrique des identités utiles pour l'étude des équations linéaires. On obtiendra en particulier une condition nécessaire de type Cramer pour le système  $Ax = b$  (Théorème 2.2.1). L'étude des conditions suffisantes ainsi que des systèmes plus généraux de type  $Ax \oplus b = Cx \oplus d$  qui requiert des hypothèses supplémentaires sur le demi-anneau, est traitée dans le chapitre sur les systèmes d'équilibres linéaires. On considère essentiellement dans ce chapitre les propriétés générales et combinatoires. On verra au chapitre suivant qu'il existe dans certains cas une symétrisation canonique, jouissant de propriétés supplémentaires, et coïncidant avec la notion classique d'anneau symétrisé lorsque l'on part d'un demi-anneau  $\mathcal{D}$  où l'addition est simplifiable.

### 1 Structure de demi-anneau symétrisé

**1.0.1 Définition** *On appelle demi-anneau symétrisé un demi-anneau  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$  muni d'une application  $\ominus : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  vérifiant:*

$$\begin{aligned}\ominus(a \oplus b) &= (\ominus(a)) \oplus (\ominus(b)) && \text{(additivité)} \\ \ominus(\ominus(a)) &= a && \text{(involutivité)} \\ \ominus(a \otimes b) &= (\ominus(a)) \otimes b = a \otimes (\ominus(b)) && \text{(règle des signes).}\end{aligned}\tag{1.0.a}$$

On notera comme d'habitude  $\ominus a$  pour  $\ominus(a)$  et  $a \ominus b$  pour  $a \oplus (\ominus b)$ .

**1.0.2 Définition** *Soit  $\mathcal{D}$  un demi-anneau, on appelle symétrisation de  $\mathcal{D}$  la donnée d'un demi-anneau symétrisé  $\mathcal{S}$  et d'un morphisme injectif de demi-anneau  $i : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}$ , tel que  $i(\mathcal{D})$  engende  $\mathcal{S}$ .*

On notera  $(\mathcal{S}, i)$  une telle symétrisation. Par "engendre", on entend que  $\mathcal{S} = i(\mathcal{D}) \ominus i(\mathcal{D})$ , ou de manière équivalente, que  $\mathcal{S}$  est le plus petit demi-anneau symétrisé contenant  $i(\mathcal{D})$ . Les éléments de la forme  $i(a)$  seront appelés positifs, et l'on notera  $\mathcal{S}^{\oplus} = i(\mathcal{D})$ .

**1.0.3 Exemple**  $(\mathbb{Z}, +, \times, -)$  est un demi-anneau symétrisé. C'est une symétrisation de  $(\mathbb{N}, +, \times)$  pour l'injection canonique, et l'on a  $\mathbb{Z}^{\oplus} = \mathbb{N}$ .

**1.0.4 Exemple** L'ensemble des parties de  $\mathbb{R}^2$ , muni de l'union, du produit défini par:

$$A \otimes B = \{ab \mid (a, b) \in A \times B\}$$

et de la symétrie de centre  $(0, 0)$  est un demi-anneau symétrisé.

**1.0.5 Exemple** Soit  $\mathcal{D}$  un demi-anneau. En prenant l'identité pour signe moins ( $\ominus x = x$ ), on obtient un demi-anneau symétrisé  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes, \text{Id})$ .

**1.0.6 Remarque** Etant donné un demi-anneau symétrisé  $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes, \ominus)$ , on a la symétrisation triviale  $(\mathcal{S}, \text{Id})$ .

## 1.1 Demi-anneau symétrisé libre

**1.1.1 Définition** Soit  $(\mathcal{D}, +, .)$  un demi-anneau. On appelle demi-anneau symétrisé libre de  $\mathcal{D}$  l'ensemble  $\mathcal{D}^2$  muni des lois suivantes:

$$\begin{aligned} (a, a') \oplus (b, b') &= (a + a', b + b') \\ (a, a') \otimes (b, b') &= (ab + a'b', ab' + a'b) \\ \ominus(a, a') &= (a', a) . \end{aligned}$$

Soit  $i$  l'injection  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^2$ ,  $i(a) = (a, \varepsilon)$ .  $(\mathcal{D}^2, i)$  est clairement une symétrisation de  $\mathcal{D}$ , et l'on pourra identifier  $a \in \mathcal{D}$  à  $(a, \varepsilon) \in \mathcal{D}^2$ .

Appelons morphisme de demi-anneau symétrisé un morphisme  $\varphi$  de demi-anneau vérifiant

$$\forall a, \quad \varphi(\ominus a) = \ominus \varphi(a) .$$

On a alors:

**1.1.2 Proposition** Le couple  $(\mathcal{D}^2, i)$  est solution (unique à un isomorphisme de demi-anneau symétrisé près) du problème universel suivant: "pour toute symétrisation  $(\mathcal{S}', i')$  de  $\mathcal{D}$ , il existe un unique morphisme surjectif de demi-anneau symétrisé  $\varphi : \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{S}'$  tel que  $i' = \varphi \circ i$ ."

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^2 & \xrightarrow{\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \varphi} & \\ \uparrow i & \nearrow & \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{i'} & \mathcal{S}' \end{array}$$

**Preuve** On a nécessairement pour un tel  $\varphi$ :

$$\varphi((e, \varepsilon)) = \varphi \circ i(e) = i'(e) \quad \text{et} \quad \varphi((\varepsilon, e)) = \varphi(\ominus i(e)) = \ominus \varphi(i(e)) = \ominus i'(e) . \quad (1.1.a)$$

Réciproquement, il est clair que  $\varphi$  défini par (1.1.a) convient ( $\varphi$  est surjectif car  $\mathcal{S}'$  est engendré par  $i'(\mathcal{D})$ ). L'unicité de  $(\mathcal{D}^2, i)$  vient du fait que si  $(\mathcal{S}'', i'')$  est une autre solution du problème 1.1.2, alors on a  $\varphi$  et  $\varphi''$  telles que  $\mathcal{D}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S}'' \xrightarrow{\varphi''} \mathcal{D}^2$ , avec  $\varphi'' \circ \varphi \circ i = \text{Id} \circ i$ , et  $\varphi'' \circ \varphi = \text{Id}$  découle de l'unicité d'une telle application. On a de même  $\varphi \circ \varphi'' = \text{Id}$ . Ainsi,  $\mathcal{D}^2$  et  $\mathcal{S}''$  sont isomorphes. ■

Le fait suivant en résulte immédiatement.

**1.1.3 Corollaire** Pour toute symétrisation  $(\mathcal{S}', i')$ , on a avec les notations précédentes:

$$\mathcal{S}' \simeq \mathcal{D}^2 / \varphi .$$

## 1.2 La relation d'équilibre

**1.2.1 Définition** On note  $\nabla$  la relation dite d'équilibre définie par:

$$a \nabla b \Leftrightarrow a \ominus b = b \ominus a .$$

$\nabla$  est clairement réflexive et symétrique, mais n'est en général pas transitive, comme le montre l'exemple suivant:

**1.2.2 Exemple** Dans le demi-anneau symétrisé libre de  $(\mathbb{R}^+, \max, \times)$ , on a

$$(1, 0) \nabla (1, 1), \quad (1, 1) \nabla (0, 1),$$

mais  $(1, 0) \not\nabla (0, 1)$ .

De manière plus précise:

**1.2.3 Proposition** Si  $\oplus$  est simplifiable dans  $\mathcal{D}$ , alors  $\nabla$  est transitive dans  $\mathcal{D}^2$ . La réciproque est vraie si l'application  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $x \mapsto x \oplus x$  est injective.

**Preuve** Si  $\oplus$  est simplifiable, alors  $a \ominus b = b \ominus a$  et  $b \ominus c = c \ominus b$  entraînent  $a \ominus c \oplus (b \ominus b) = (b \ominus b) \oplus (c \ominus a)$ , d'où en simplifiant  $a \oplus c = c \ominus a$ , ce qui montre que  $\nabla$  est transitive. Réciproquement, si  $\oplus$  n'est pas simplifiable, alors il existe  $\alpha \neq \beta$  et  $\gamma$  tels que  $\alpha \oplus \gamma = \beta \oplus \gamma$ . Alors,  $(\alpha, \beta) \nabla (\gamma, \gamma) \nabla (\beta, \alpha)$ , mais  $(\alpha, \beta) \not\nabla (\beta, \alpha)$  (ce qui serait  $\alpha \oplus \alpha = \beta \oplus \beta$ ), et donc  $\nabla$  n'est pas transitive. ■

Les propriétés suivantes sont conséquence immédiate de (1.0.a).

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad a \nabla b &\Leftrightarrow a \ominus b \nabla \varepsilon \\ \text{(ii)} \quad a \nabla b, c \nabla d &\Rightarrow a \oplus c \nabla b \oplus d \\ \text{(iii)} \quad a \nabla b &\Rightarrow ac \nabla bc \end{aligned} \tag{1.2.a}$$

On notera

$$a^\bullet = a \ominus a, \quad \mathcal{S}^\bullet = \{a^\bullet \mid a \in \mathcal{S}\}$$

et l'on appellera *équilibrés* les éléments de cette forme. On a

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad a^\bullet \oplus b^\bullet &= (a \oplus b)^\bullet \\ \text{(ii)} \quad a^\bullet b^\bullet &= (ab \oplus ab)^\bullet \\ \text{(iii)} \quad ab^\bullet &= (ab)^\bullet = a^\bullet b \end{aligned} \tag{1.2.b}$$

(i) et (iii) montrent que  $\mathcal{S}^\bullet$  est un idéal (bilatère) de  $\mathcal{S}$ . Lorsque  $\mathcal{S}$  est idempotent, on a par (i) et (ii) que  $\mathcal{S}^\bullet$  est un demi-anneau idempotent ayant  $e^\bullet$  pour unité.

On notera que  $a \in \mathcal{S}^\bullet$  entraîne  $a \nabla \varepsilon$ , la réciproque étant vraie si l'addition est idempotente ou si  $\mathcal{S}$  est un demi-anneau symétrisé libre.

**1.2.4 Contre exemple** Considérons le corps  $\mathcal{D} = \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$  muni du signe moins défini par  $\ominus x = x$ . Pour tout  $x \in \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ , on a trivialement  $x \nabla \varepsilon$ . Cependant, 1 ne s'écrit pas sous la forme  $t \ominus t = t \oplus \text{Id}(t) = 2t = 0$ , i.e.  $1 \notin \mathcal{D}^\bullet$ .

### 1.3 Relation d'équilibre dans un demi-anneau symétrisé libre

On notera  $\mathcal{S}^\ominus = \{\ominus a \mid a \in \mathcal{S}^\oplus\}$ , ensemble des éléments dits *négatifs* et  $\mathcal{S}^{\oplus\ominus} = \mathcal{S}^\oplus \cup \mathcal{S}^\ominus$ , ensemble des éléments dits *signés*. L'intérêt principal des éléments signés est d'être "presque transitifs" pour la relation d'équilibre:

**1.3.1 Proposition** *Dans un demi-anneau  $\mathcal{S} = \mathcal{D}^2$  symétrisé libre, on a:*

- (i) *trivialisation des équilibres:*  $(a, b) \in (\mathcal{S}^\oplus)^2$  et  $a \nabla b \Rightarrow a = b$
- (ii) *Si  $\mathcal{D}$  est un dioïde, alors*  $(a, b) \in (\mathcal{S}^{\oplus\ominus})^2$  et  $a \nabla b \Rightarrow a = b$
- (iii) *substitution:*

$$x \in \mathcal{S}^{\oplus\ominus} \text{ et } \begin{cases} x \nabla b \\ cx \nabla d \end{cases} \implies cb \nabla d$$

- (iv) *transitivité faible:*  $\forall (a, c) \in \mathcal{S}^2, \forall b \in \mathcal{S}^{\oplus\ominus} \quad a \nabla b \text{ et } b \nabla c \implies a \nabla c.$

**Preuve** (i) et (ii) sont claires. Pour (iii), supposons par exemple  $x = (x^+, \varepsilon)$ . Les équilibres  $x \nabla b$  et  $cx \nabla d$  s'écrivent avec des notations évidentes  $x^+ \oplus b^- = b^+$  et  $c^+x^+ \oplus d^- = c^-x^+ \oplus d^+$ . En rajoutant  $c^+b^- \oplus c^-b^-$  à la dernière égalité:  $c^+x^+ \oplus c^+b^- \oplus c^-b^- \oplus d^- = c^-x^+ \oplus c^+b^- \oplus c^-b^- \oplus d^+$ , d'où  $c^+b^+ \oplus c^-b^- \oplus d^- = c^-b^+ \oplus c^+b^- \oplus d^+$ , et  $cb \nabla d$ . (iv) s'obtient en prenant  $c = e$  dans (iii). ■

### 1.4 Valeur absolue dans les demi-anneaux symétrisés libres

**1.4.1 Définition** *On appelle valeur absolue de  $x = (x^+, x^-) \in \mathcal{D}^2$  le scalaire  $|x| = x^+ \oplus x^-$ .*

L'application  $\mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{D}, x \mapsto |x|$  est un morphisme de demi-anneau. En particulier, on a l'inhabituelle formule  $|a \oplus b| = |a| \oplus |b|$ .

**1.4.2 Lemme** *Dans un dioïde symétrisé libre, on a:*

- (i)  $a^\bullet = |a|^\bullet$
- (ii)  $|a^\bullet| = |a|$ .

**Preuve** On a  $(a^+, a^-)^\bullet = (a^+ \oplus a^-, a^+ \oplus a^-) = |a|^\bullet$ . Le fait que  $|a^\bullet| = |a|$  résulte de l'idempotence de l'addition. ■

On a donc pour  $a \in \mathcal{D}^\oplus$ ,  $|a^\bullet| = |a| = a$ , et  $|a^\bullet|^\bullet = a^\bullet$ . Ainsi, l'application  $x \mapsto |x|$  est un isomorphisme de dioïde  $\mathcal{D}^\bullet \rightarrow \mathcal{D}^\oplus$ , l'inverse étant donné par  $x \mapsto x^\bullet$ .

## 2 Quelques identités algébriques et combinatoires

**2.0.1 Définition** *On dit que  $a$  équilibre fortement  $b$  s'il existe  $t$  tel que  $a = b \oplus t^\bullet$ , ce que l'on note  $a \nabla\bullet b$ .*

La relation  $\nabla\bullet$  est clairement réflexive et transitive. On notera  $a \bullet\nabla b$  pour  $b \nabla\bullet a$ . On a  $x \nabla\bullet y \Rightarrow x \nabla y$ . La réciproque n'est pas toujours vraie:

**2.0.2 Exemple** Dans le demi-anneau symétrisé libre de  $\mathbb{B}[X]$  (demi-anneau des polynômes à coefficients booléiens), on a  $X^\bullet \nabla (X^2)^\bullet$ , mais  $X^\bullet \nabla^\bullet (X^2)^\bullet$  et  $X^\bullet \bullet \nabla (X^2)^\bullet$ .

**2.0.3 Exemple** Dans le demi-anneau symétrisé libre de  $\mathbb{R}_{\max}$ , on a  $x \nabla y$  si et seulement si  $x \nabla^\bullet y$  ou  $x \bullet \nabla y$ , comme il résulte d'une vérification élémentaire.

## 2.1 Déterminants

Dans un demi-anneau symétrisé *commutatif*  $\mathcal{S}$ , on définit le déterminant comme d'habitude:

$$\det A = \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathsf{sgn}(\sigma) \bigotimes_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

où  $\mathsf{sgn}(\sigma) = e$  si la permutation  $\sigma$  est paire et  $\ominus e$  sinon.

On note  $\text{cof}_{ij}(A)$  le cofacteur  $(i, j)$  de  $A$  et  $A^{\text{adj}}$  la transposée de la matrice des cofacteurs. Certaines propriétés du déterminant qui sont des identités combinatoires s'écrivent sans difficulté dans un demi-anneau symétrisé (cf. aussi Gondran et Minoux [47], Reutenauer et Straubing [86]).

### 2.1.1 Propriétés

forme $n$ -linéaire	$\det(u_1, \dots, \lambda u_i, \oplus \mu v_i, \dots, u_n) = \lambda \det(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) \oplus \mu \det(u_1, \dots, v_i, \dots, u_n)$
anti-symétrique	$\det(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}) = \mathsf{sgn}(\sigma) \det(u_1, \dots, u_n)$
alternée	$\det(u_1, \dots, v, \dots, v, \dots, u_n) \nabla \varepsilon$
développement par ligne	$\det A = \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \text{cof}_{ik}(A)$ $\det A = \det A^t$ .

**2.1.2 Proposition (Reutenauer et Straubing)** *On a*

$$(A^{\text{adj}} A)_{ii} = \det A \quad (A^{\text{adj}} A)_{ij} \nabla \varepsilon \quad (i \neq j) \quad . \quad (2.1.a)$$

Les formules (2.1.a) se réécrivent

$$A^{\text{adj}} A = \det A \cdot \text{Id} \oplus R^\bullet \quad (2.1.b)$$

où  $R$  est une matrice de diagonale nulle.

On peut donner pour les propriétés du type 2.1.1 et 2.1.2 des démonstrations combinatoires ou bien l'on peut dans certains cas recopier les démonstrations usuelles (un échantillon de ces techniques est donné dans les remarques 2.1.10 et 2.1.11). Nous préférons ici, dans l'esprit des arguments de Reutenauer et Straubing [86], formuler un "principe de transfert" qui permet de traduire directement une identité classique dans les anneaux en une identité dans les demi-anneaux symétrisés

**2.1.3 Préliminaire** Soient  $X_1, \dots, X_k$   $k$  indéterminées et considérons le demi-anneau symétrisé libre  $(\mathbb{N}[X_i])^2$ . On définit la *valeur* du monôme  $P = \alpha X_1^{i_1} \dots X_k^{i_k}$  en  $(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{S}^k$  par  $P(x_1, \dots, x_k) = (x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}) \oplus \dots \oplus (x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k})$  ( $\alpha$  fois) et l'on définit la valeur d'une somme de monômes par linéarité. L'application  $\varphi : (\mathbb{N}[X_i])^2 \rightarrow \mathcal{S}$  qui à un couple de polynômes  $P = (P^+, P^-)$  associe  $P^+(x_1, \dots, x_k) \ominus P^-(x_1, \dots, x_k)$  est clairement un morphisme de demi-anneau symétrisé. Ainsi, pour montrer une identité du type 2.1.2 ou 2.1.1 dans un demi-anneau symétrisé quelconque, il suffit de l'établir dans le demi-anneau symétrisé libre  $(\mathbb{N}[a_{ij}])^2$ .

**2.1.4 Proposition (Principe de transfert)** Soit  $P = P^+ - P^-$  la différence de deux polynômes à coefficients dans  $\mathbb{N}$ . L'identité  $P(X_i) = 0$  a lieu dans l'anneau  $\mathbb{Z}[X_i]$  si et seulement si l'identité

$$P^+(X_i) \ominus P^-(X_i) \nabla \varepsilon$$

a lieu dans le demi-anneau symétrisé libre  $(\mathbb{N}[X_i])^2$ .

**Preuve** On a  $P^+ \ominus P^- \nabla \varepsilon$  ssi  $P^+ \nabla P^-$  (1.2.a,(i)), lequel équilibre est équivalent à  $P^+ = P^-$  (1.3.1.(i)). ■

On peut même formuler un peu mieux:

**2.1.5 Proposition (Principe de transfert fort)** Soient  $P = P^+ - P^-$ ,  $Q = Q^+ - Q^-$ , avec  $P^+, P^-, Q^+, Q^- \in \mathbb{N}[X_i]$  tels que  $P = Q$  dans  $\mathbb{Z}[X_i]$ . (i) Si  $Q^+$  et  $Q^-$  n'ont aucun monôme en commun, alors on a  $P \nabla \bullet Q$  dans  $(\mathbb{N}[X_i])^2$ . (ii) Si de plus  $P^+$  et  $P^-$  n'ont aucun monôme en commun, alors  $P = Q$ .

**Preuve** (i): Si  $Q^+$  et  $Q^-$  n'ont aucun monôme en commun, on a en identifiant les parties positives et négatives de part et d'autre de  $P^+ - P^- = Q^+ - Q^-$ :

$$P^+ = Q^+ + T, \quad P^- = Q^- + T,$$

pour un certain polynôme  $T \in \mathbb{N}[X_i]$ , d'où  $P = Q \oplus T^\bullet$ , i.e.  $P \nabla \bullet Q$ . (ii) se montre de manière analogue. ■

**2.1.6 Proposition** Pour toute matrice  $A \in \mathcal{S}^{n \times n}$  partitionnée sous la forme  $((n-1)+1) \times ((n-1)+1)$ , on a la formule du déterminant par blocs:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} A_{(n|n)} & A_{(n|n)} \\ A_{[n|n]} & a_{nn} \end{bmatrix} = \det A_{(n|n)} a_{nn} \ominus A_{[n|n]} A_{(n|n)}^{\text{adj}} A_{(n|n)}$$

**Preuve** On vérifie en effet que les termes à gauche et à droite de l'égalité sont somme de  $n!$  monômes tous différents, et l'on applique 2.1.5,(ii). ■

Les propriétés qui suivent résultent semblablement des principes de transfert 2.1.5 et 2.1.4:

### 2.1.7 Proposition

$$\det(AB) \nabla \bullet \det(A) \det(B) \tag{2.1.c}$$

Plus généralement:

**2.1.8 Proposition (Formule de Binet-Cauchy)** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de taille respectives  $n \times r$  et  $r \times p$ ,  $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $J \subset \llbracket 1, p \rrbracket$  avec  $\#I = \#J = k$ . On a:

$$\det(AB)_{[I|J]} \nabla \bullet \bigoplus_K \det A_{[I|K]} \cdot \det B_{[K|J]}, \tag{2.1.d}$$

où la somme est prise sur l'ensemble des parties  $K \subset \{1, \dots, r\}$  de cardinal égal à  $k$  (cette somme étant nulle dès que  $k > r$ ).

**2.1.9 Proposition (Cayley-Hamilton)** Soit  $P_A(\lambda) = \det(A \ominus \lambda \text{Id})$ . On a

$$P_A(A) \nabla \varepsilon .$$

**2.1.10 Remarque (Preuve combinatoire de 2.1.6)** On peut donner une preuve combinatoire élémentaire de la proposition 2.1.6: il suffit de remarquer que  $\det A_{(n|n)} a_{nn}$ , est formé des termes correspondant aux  $(n-1)!$  permutations de  $\{1 \dots n\}$  qui fixent  $n$ . D'autre part, un terme quelconque de  $A_{[n|n]} A_{(n|n)}^{\text{adj}} A_{(n|n)}$  peut s'écrire:  $a_{ni} \text{cof}_{ji} A_{(n|n)} a_{jn}$ , terme regroupant les  $(n-2)!$  permutations  $\sigma$  telles que  $\sigma(n) = i$  et  $\sigma(j) = n$ , chacune affectée de la parité opposée ( $\sigma$  présente une inversion de plus que le terme de  $\text{cof}_{ji}(A)$  dont elle est issue). En tout, on a compté  $(n-1)! + (n-1)^2(n-2)! = n!$  permutations, toutes avec le bon signe. ■

**2.1.11 Remarque (Preuve coutumière de 2.1.6)** On peut également donner une preuve algébrique ordinaire de la même proposition: développons  $\det A$  par rapport à la  $n$ -ième ligne:

$$\det A = \bigoplus_{k=1}^n a_{nk} \text{cof}_{nk} A = \bigoplus_{k=1}^{n-1} a_{nk} (\ominus e)^{n+k} \det A(n|k) \oplus \det A_{(n|n)} a_{nn}$$

puis développons les  $n-1$  premiers termes par rapport à la  $n$ -ième colonne:

$$\begin{aligned} \det A &= \bigoplus_{k=1}^{n-1} a_{nk} (\ominus e)^{n+k} \bigoplus_{l=1}^{n-1} (\ominus e)^{l+n-1} a_{ln} \det A(nl|kn) \oplus \det A_{(n|n)} a_{nn} \\ &= \ominus \bigoplus_{k,l=1}^{n-1} a_{nk} \text{cof}_{lk} A_{(n|n)} a_{ln} \oplus \det A_{(n|n)} a_{nn} . \end{aligned}$$

■

**2.1.12 Remarque** A chaque équilibre dans le demi-anneau symétrisé libre de  $\mathcal{D}$ , on peut associer une identité dans  $\mathcal{D}$ . Par exemple, pour l'identité 2.1.2, on écrit  $A$  sous forme de différence de matrices positives  $A = A^+ \ominus A^-$ , idem pour  $A^{\text{adj}} = A^{\text{adj}+} \ominus A^{\text{adj}-}$ ,  $\det A = \det^+ A \ominus \det^- A$  et l'on a

$$A^{\text{adj}} A \nabla \det A. \text{Id} \Leftrightarrow \det^- A. \text{Id} \oplus A^{\text{adj}+} A^+ \oplus A^{\text{adj}-} A^- \nabla \det^+ A. \text{Id} \oplus A^{\text{adj}-} A^+ \oplus A^{\text{adj}+} A^-$$

-via (1.2.a,(i))- , lequel équilibre se trivialise en égalité puisque les termes de part et d'autre de l'équilibre sont positifs (cf. 1.3.1,(i)).

**2.1.13 Remarque (Preuve combinatoire de la formule de Binet-Cauchy)** On peut aussi donner une preuve combinatoire assez simple de la Proposition 2.1.8. Quitte à considérer des sous-matrices, on pourra supposer  $A$  de taille  $k \times r$  et  $B$  de taille  $r \times k$ . Le développement du déterminant s'écrit alors

$$\det AB = \bigoplus_{\sigma} \text{sgn} \sigma \bigotimes_{i=1}^k \bigoplus_{l=1}^r a_{il} b_{l\sigma(i)}$$

et par distributivité:

$$\det AB = \bigoplus_{\sigma} \text{sgn} \sigma \bigoplus_{\varphi} \bigotimes_{i=1}^k a_{i\varphi(i)} b_{\varphi(i)\sigma(i)} , \quad (2.1.e)$$

la seconde somme étant prise sur l'ensemble des applications  $\varphi : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ . Supposons  $\varphi$  non injective, soit  $\varphi(i_1) = \varphi(i_2)$  avec  $i_2 \neq i_1$ . On introduit alors la transposition  $\tau$  d'indices  $i_1, i_2$

et l'on constate que,  $\varphi$  étant fixée, les termes associés aux permutations  $\sigma$  et  $\sigma \circ \tau$  sont de même valeur absolue et de signes opposés. Soit  $R$  la somme des termes de (2.1.e) associés à des applications  $\varphi$  non injectives et à des permutations  $\sigma$  paires. On peut écrire d'après ce qui précède

$$\det AB = \bigoplus_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \bigoplus_{\varphi \text{ injective}} \bigotimes_{i=1}^k a_{i\varphi(i)} b_{\varphi(i)\sigma(i)} \oplus R^\bullet . \quad (2.1.f)$$

Soit  $K \subset \{1, \dots, r\}$  une partie de cardinal  $k$ . On considère uniquement la somme  $S_K$  des termes de (2.1.f) tels que  $\varphi(\{1, \dots, k\}) = K$  (ce qui entraîne l'injectivité de  $\varphi$ ). On peut pour fixer les idées supposer  $K = \{1, \dots, k\}$ , de sorte que l'on somme maintenant sur les permutations  $\varphi$  de  $\{1, \dots, k\}$ , soit:

$$S_K = \bigoplus_{\sigma, \varphi} \operatorname{sgn}\sigma \bigotimes_{i=1}^k a_{i\varphi(i)} b_{\varphi(i)\sigma(i)} .$$

En substituant  $\sigma = \sigma' \circ \varphi$ , et compte tenu de  $\operatorname{sgn}\sigma = (\operatorname{sgn}\sigma') \otimes (\operatorname{sgn}\varphi)$ , on retrouve le produit de deux déterminants, soit  $S_K = \det A|_K \det B|_K$ . L'équation (2.1.f) se réécrit:

$$\det AB = \bigoplus_K S_K \oplus R^\bullet = \bigoplus_K \det A|_K \det B|_K \oplus R^\bullet ,$$

ce qui n'est autre que la formule de Binet-Cauchy.

## 2.2 Applications

La condition suivante résulte immédiatement de 2.1.2:

**2.2.1 Théorème (Formules de Cramer)** *Toute solution  $x$  de  $Ax = b$  dans un demi-anneau commutatif  $\mathcal{D}$  vérifie les “formules de Cramer” dans un demi-anneau symétrisé quelconque de  $\mathcal{D}$ :*

$$\det A \cdot x \bullet \nabla A^{\text{adj}} \cdot b .$$

**2.2.2 Exemple** Soit dans  $(\mathbb{N}^* \cup \{\varepsilon\}, \text{ppcm}, \times)$ , l'équation:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 \times 3 \\ 2^4 \times 3 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 240 \end{bmatrix} \quad (2.2.a)$$

(cf. 0.1.0.9). On a dans le demi-anneau symétrisé libre de  $(\mathbb{N}^* \cup \{\varepsilon\}, \text{ppcm}, \times)$   $\det A = 2^3 \ominus 3 \times 5$ , et

$$A^{\text{adj}} = \begin{bmatrix} 2^2 & \ominus 3 \\ \ominus 5 & 2 \end{bmatrix} .$$

La condition de Cramer s'écrit:

$$(2^3 \ominus 3 \times 5) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \bullet \nabla \begin{bmatrix} 2^2 & \ominus 3 \\ \ominus 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^2 \times 3 \\ 2^4 \times 3 \times 5 \end{bmatrix}$$

ce qui implique en revenant à  $(\mathbb{N}^* \cup \{\varepsilon\}, \text{ppcm}, \times)$ :

$$\begin{cases} \text{ppcm}(2^3 \times x_1, 3 \times 2^4 \times 3 \times 5) = \text{ppcm}(3 \times 5 \times x_1, 4 \times 2^2 \times 3) \\ \text{ppcm}(2^3 \times x_2, 5 \times 2^2 \times 3) = \text{ppcm}(3 \times 5 \times x_2, 2 \times 2^4 \times 3 \times 5) \end{cases} . \quad (2.2.b)$$

On vérifie que  $x_1 = 6, x_2 = 4$  solution de (2.2.a) vérifie bien (2.2.b).

Le caractère suffisant des conditions de Cramer sera examiné dans les chapitres suivants moyennant des hypothèses plus fortes sur le demi-anneau. Voici une seconde application.

**2.2.3 Proposition** *Pour qu'une matrice  $A \in \mathcal{D}^{n \times p}$  à éléments dans un demi-anneau commutatif soit inversible à gauche, il est nécessaire que  $n \geq p$ .*

**Preuve** On raisonne dans le demi-anneau symétrisé libre de  $\mathcal{D}$  et l'on applique la formule de Binet-Cauchy à la matrice  $\text{Id} = BA$ . Si  $n < p$ , on a  $e = \det \text{Id} \nabla \varepsilon$ , ce qui est absurde. ■

On donne enfin une généralisation à certains demi-anneaux de la caractérisation 0.6.2.4 des matrices inversibles à gauche dans les demi-corps positifs.

**2.2.4 Hypothèse**  $\mathcal{P}$  est un demi-anneau positif (cf. 0.6.1.1) commutatif vérifiant:

$$e = a \oplus b \Rightarrow e = a \text{ ou } b , \quad (2.2.c)$$

**2.2.5 Proposition** *Sous l'hypothèse 2.2.4, une matrice  $A \in \mathcal{P}^{n \times p}$  est inversible à gauchessi elle contient une sous matrice monomiale inversible de taille  $p$ .*

**Preuve** Soit  $I = BA$ . Via Binet-Cauchy, on a dans  $\mathcal{P}^2$ :

$$e = \bigoplus_K \det B_{[K]} \det A_{[K]} \oplus u^\bullet . \quad (2.2.d)$$

En identifiant les composantes positives et négatives des deux cotés de (2.2.d), on obtient  $u = \varepsilon$ . Quitte à multiplier par une matrice de permutation, on peut supposer les coefficients diagonaux de  $A$  non nuls. La partie négative de  $\det B_{[K]} \det A_{[K]}$  est nulle, ce qui implique dès que  $\det B_{[K]} \neq \varepsilon$  que les coefficients hors diagonaux de  $A$  sont nuls (sinon, on aurait un terme négatif dans le déterminant), et donc que  $\det A_{[K]} = \bigotimes_i A_{ii}$ . L'hypothèse (2.2.c) entraîne qu'il existe  $K$  tel que  $\det B_{[K]} \det A_{[K]} = e$ , et donc que les coefficients diagonaux de  $A$  sont inversibles. Au passage, on a donné une variante de la preuve du Théorème 6.2.1 du Chapitre 0.

**2.2.6 Exemple** Le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}[X]$  satisfait l'hypothèse du 2.2.5.



# Chapitre II

## Dioïde symétrisé

### Introduction

Nous avons étudié au chapitre I les propriétés combinatoires des structures symétrisées. Une symétrisation  $(\mathcal{S}, i)$  d'un demi-anneau  $\mathcal{D}$  fournit une extension de  $\mathcal{D}$  dans laquelle les formes multilinéaires alternées (et donc certains calculs d'élimination) ont du sens. Se pose la question de savoir si parmi les symétrisations de  $\mathcal{D}$ , il en est une plus "simple" que les autres. Modulo un raffinement naturel de la notion de symétrisation (régularité), et moyennant une hypothèse sur la structure additive (2.1.5) vérifiée dans le cas des dioïdes, nous montrons qu'il en est toujours ainsi (Théorème 2.2.8), et appelons demi-anneau symétrisé de  $\mathcal{D}$  cette symétrisation "minimale". Nous particulisons ensuite l'étude aux dioïdes, et caractérisons le symétrisé d'un dioïde en termes d'opérations résiduées. Quoique la relation d'équilibre ne soit jamais transitive dans un dioïde, nous montrons que certains éléments vérifient des propriétés de transitivité et de substitution affaiblies, qui permettent de manipuler les équilibres comme l'on manipule les équations usuelles. Nous caractérisons ces éléments. Nous commençons ce chapitre par un exemple et une construction élémentaire du dioïde symétrisé de  $\mathbb{R}_{\max}$ . Nous avons fait en sorte que l'essentiel des chapitres suivants relatif au dioïde symétrisé de  $\mathbb{R}_{\max}$  puisse être lu au vu de la seule section de motivation qui suit (et éventuellement de §3.2 et §3.3).

### 1 Motivations

#### 1.1 Premier exemple

On considère le système suivant de deux équations linéaires à deux inconnues dans  $\mathbb{R}_{\max}$ :

$$\begin{cases} \max(x, y - 4, 1) = \max(x - 1, y + 1, 2) \\ \max(x + 3, y + 2, -5) = \max(y + 2, 7), \end{cases} \quad (1.1.a)$$

soit sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Commençons par une remarque élémentaire: si  $a > b$ , l'équation  $a = x \oplus b$  est équivalente à  $a = x$ . Cela suggère la règle suivante:

$$\text{règle naïve: } "a \ominus b = a \text{ si } a > b". \quad (1.1.b)$$

Nous tentons maintenant de “résoudre” le système (1.1.a) à l'aide de cette règle (les calculs sont pour le moment formels).

$$(1.1.a) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & x \oplus (-4)y \oplus 1 = (-1)x \oplus 1y \oplus 2 \\ \text{(ii)} & 3x \oplus 2y \oplus (-5) = 2y \oplus 7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \Rightarrow [0 \ominus (-1)]x &= [1 \ominus (-4)]y \oplus (2 \ominus 1) \\ &\Rightarrow \text{(i}'): x = 1y \oplus 2 \\ \text{(i}') \text{ et (ii)} \Rightarrow 3(1y \oplus 2) \oplus 2y \oplus (-5) &= 2y \oplus 7 \\ \Rightarrow (4 \oplus 2 \ominus 2)y &= 7 \ominus (-5) \ominus 5 \Rightarrow 4y = 7 \Rightarrow y = 3. \end{aligned} \quad (1.1.c)$$

Par (i)', on obtient  $x = 1 \otimes 3 \oplus 2 = 4$ , et l'on vérifie immédiatement que  $(x, y) = (4, 3)$  est solution du système (1.1.a). Ces manipulations soulèvent les trois questions suivantes:

**1.1.1 Question** Dans quelle structure algébrique le calcul ci-dessus a-t-il un sens?

**1.1.2 Question** Quel statut a l'élément  $(2 \ominus 2)$  qui apparaît à la ligne (1.1.c)?

**1.1.3 Question** On a introduit de manière heuristique la règle de simplification (1.1.b). Quel est plus généralement le système “maximal” de règles de simplifications admissibles pour résoudre un système de type  $Ax \oplus b = Cx \oplus d$ ?

Ce chapitre répond à ces trois questions. On montre que l'étude de  $Ax \oplus b = Cx \oplus d$  se ramène à l'étude des solutions de  $(A \ominus C)x \nabla d \ominus b$  pour certaines “bonnes” symétrisation de  $\mathcal{D}$ , dites *régulières*. Nous montrons ensuite que parmi les symétrisations régulières de  $\mathcal{D}$ , il en est une minimale (c'est-à-dire équipée du maximum de règles de simplifications). Nous étudions ensuite les bons et mauvais éléments du dioïde symétrisé: les bons, étant *transitifs* et *substituables* pour la relation d'équilibre, autorisent les manipulations coutumières liées à l'élimination des systèmes linéaires, les mauvais généralisent l'élément  $2 \ominus 2$  qui apparaît plus haut, et conduisent à des dégénérescences.

## 1.2 Construction élémentaire du dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$

Nous donnons ici une construction élémentaire d'une structure algébrique répondant à la question 1.1.1. Cette structure mérite le nom de dioïde symétrisé de  $\mathbb{R}_{\max}$ . Nous examinerons dans la suite du chapitre de quelle manière ce dioïde procède d'une construction générale. La remarque suivante, absolument triviale, exprime que la notion classique de symétrisation (et plus généralement, de monoïde des différences, cf. [12]), n'est d'aucun intérêt pour un dioïde.

**1.2.1 Observation** Soit  $(M, \oplus)$  un monoïde idempotent, et  $(G, +)$  un groupe,  $\phi : (M, \oplus) \rightarrow (G, +)$  un morphisme de monoïde. On a  $\phi(M) = \{0\}$ .

**Preuve** On a pour tout  $x$ ,  $\phi(x) = \phi(x \oplus x) = \phi(x) + \phi(x)$ , et en simplifiant,  $\phi(x) = 0$ . ■

**1.2.2 Définition** On appelle dioïde symétrisé de  $\mathbb{R}_{\max}$ , noté  $\mathbb{S}_{\max}$ , le quotient du dioïde des couples  $\mathbb{R}_{\max}^2$  par la relation d'équivalence suivante:

$$(x', x'') \mathcal{R} (y', y'') \Leftrightarrow \begin{cases} x' \neq x'', y' \neq y'', \text{ et } x' \oplus y'' = x'' \oplus y' \\ (x', x'') = (y', y'') \text{ sinon} \end{cases} \quad (1.2.a)$$

On vérifie que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence, plus fine que la relation  $\nabla$  (qui elle n'est pas d'équivalence), que  $\mathcal{R}$  est compatible<sup>1</sup> avec les lois de structure du dioïde symétrisé  $\mathbb{R}_{\max}^2$ . On distingue trois sortes de classes d'équivalence:

$$\begin{aligned}\overline{(t, \varepsilon)} &= \{(t, x''); x'' < t\} && \text{appelées positives} \\ \overline{(\varepsilon, t)} &= \{(x', t); x' < t\} && \text{appelées négatives} \\ \overline{(t, t)} &= \{(t, t)\} && \text{appelées équilibrées.}\end{aligned}$$

En associant  $\overline{(t, \varepsilon)}$  à  $t \in \mathbb{R}_{\max}$ , on peut identifier  $\mathbb{R}_{\max}$  au sous-dioïde  $\mathbb{S}_{\max}^{\oplus}$  des classes positives ou nulles. L'ensemble des classes négatives ou nulles (i.e. de la forme  $\ominus x$  pour  $x \in \mathbb{R}_{\max}^{\oplus}$ ) sera noté  $\mathbb{S}_{\max}^{\ominus}$ , l'ensemble des classes équilibrées (de la forme  $x^\bullet$ ) sera noté  $\mathbb{S}_{\max}^\bullet$ . On a donc la décomposition

$$\mathbb{S}_{\max} = \mathbb{S}_{\max}^{\oplus} \cup \mathbb{S}_{\max}^{\ominus} \cup \mathbb{S}_{\max}^\bullet, \quad (1.2.b)$$

$\varepsilon$  étant le seul élément commun à ces trois ensembles. Cette décomposition est à comparer à  $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$ . On peut représenter cette structure comme sur la Figure II.1, où les flèches représentent l'ordre croissant.

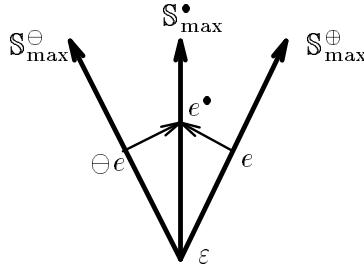


Figure II.1: Le dioïde  $\mathbb{S}_{\max}$

Ces conventions nous permettent d'écrire  $3 \ominus 2$  au lieu de  $\overline{(3, \varepsilon)} \oplus \overline{(\varepsilon, 2)}$ . On a ainsi  $3 \ominus 2 = \overline{(3, 2)} = \overline{(3, -\infty)} = 3$ . Plus généralement, on résume les règles de calcul dans  $\mathbb{S}_{\max}$  de la manière suivante:

$$\begin{aligned}a \ominus b &= a && \text{si } a > b \\ b \ominus a &= \ominus a && \text{si } a > b \\ a \ominus a &= a^\bullet\end{aligned} \quad (1.2.c)$$

Cela rend compte de la règle naïve initiale (1.1.b) et la généralise.

En raison de son importance ultérieure, nous introduisons la notation  $\mathbb{S}_{\max}^\vee$  pour l'ensemble  $\mathbb{S}_{\max}^{\oplus} \cup \mathbb{S}_{\max}^\bullet$ . On appellera *signés* les éléments de  $\mathbb{S}_{\max}^\vee$ . On a:

**1.2.3 Proposition**  $\mathbb{S}_{\max}^\vee \setminus \{\varepsilon\} = \mathbb{S}_{\max} \setminus \mathbb{S}_{\max}^\bullet$  est l'ensemble des éléments inversibles de  $\mathbb{S}_{\max}$ .

**Preuve** Comme  $t \otimes (-t) = (\ominus t) \otimes (\ominus -t) = e$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\max} \setminus \{\varepsilon\}$ , on a que tout élément de  $\mathbb{S}_{\max}^\vee \setminus \{\varepsilon\}$  est inversible. En outre, le fait que  $ab^\bullet = (ab)^\bullet$  (cf. I, (1.2.b),(iii)) montre que  $\mathbb{S}_{\max}^\bullet$  est absorbant pour le produit. Soit  $x \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet$ . On a  $x = x^\bullet$  et donc  $xy = x^\bullet y$  ne peut être égal à  $e$ , puisque  $e \notin \mathbb{S}_{\max}^\bullet$ . ■

<sup>1</sup>dans la mesure où cette compatibilité sera rendue évidente par la théorie générale qui suit, nous passons les détails

Comme  $\mathbb{S}_{\max}^\vee$  est l'image de  $\mathbb{R}_{\max}^{\oplus \ominus}$  par la projection canonique, les propriétés de trivialisation des équilibres, de substitution, et de transitivité faible prouvées en I,1.3.1 restent vraies dans  $\mathbb{S}_{\max}^\vee$ . On en déduit que les calculs *formels* effectuées en §1.1 pour la résolution du système (1.1.a) sont valides à condition de plonger  $\mathbb{R}_{\max}$  dans le dioïde  $\mathbb{S}_{\max}$ , et donnent l'unique solution de ce système d'équilibres dans  $\mathbb{S}_{\max}$ . Celle ci étant positive, et en notant que la propriété de trivialisation des équilibres 1.3.1,(i) s'étend au dioïde  $\mathbb{S}_{\max}$ , on obtient l'unique solution du système d'équations dans  $\mathbb{R}_{\max}$ .

## 2 Le symétrisé d'un demi-anneau

Nous passons maintenant à la théorie générale.

### 2.1 Symétrisation régulière

On considère l'équation

$$ax \oplus b = cx \oplus d \quad (2.1.a)$$

dans un demi-anneau *commutatif*  $\mathcal{D}$ . Pour toute symétrisation  $(\mathcal{S}, j)$  de  $\mathcal{D}$ , (2.1.a) entraîne l'équilibre dans  $\mathcal{S}$ :

$$(a \ominus c)x \nabla d \ominus b, \quad (2.1.b)$$

où l'on a identifié  $a$  à  $j(a)$ ,  $b$  à  $j(b)$ , etc. La symétrisation  $(\mathcal{S}, j)$  de  $\mathcal{D}$  est pertinente lorsque l'étude des solutions de (2.1.b) résout (2.1.a). Précisément:

**2.1.1 Définition** *La symétrisation  $(\mathcal{S}, j)$  est régulière si*

$$j(a) \nabla j(b) \Rightarrow a = b \quad (2.1.c)$$

**2.1.2 Proposition** *Pour toute symétrisation régulière, l'ensemble des solutions de (2.1.a) s'identifie à l'ensemble des solutions positives de (2.1.b).*

**Preuve**  $(a \ominus c)x \nabla d \ominus b$  entraîne  $ax \oplus b \nabla cx \oplus d$ , et si  $x$  est positif,  $j(ax \oplus b) \nabla j(cx \oplus d)$ , d'où (2.1.a). La réciproque est immédiate. ■

La symétrisation libre  $(\mathcal{D}^2, i)$  de  $\mathcal{D}$  (I,1.1.1) est régulière (cela résulte de I,1.3.1,(i)). Nous caractérisons maintenant les symétrisations régulières générales. Notons

$$\mathcal{S}^\nabla = \{x \mid x \nabla \varepsilon\} .$$

**2.1.3 Proposition** *Soit  $\varphi$  le morphisme  $\mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{S}$  tel que  $\mathcal{S} \simeq \mathcal{D}^2 / \varphi$  (cf. I,1.1.2). La symétrisation  $(\mathcal{S}, j)$  est régulière si et seulement si  $\varphi^{-1}(\mathcal{S}^\nabla) \subset \mathcal{D}^\bullet$ .*

**Preuve** Les assertions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{aligned} & j(a) \nabla j(b) \\ & \varphi((a, \varepsilon)) \nabla \varphi((b, \varepsilon)) \\ & \varphi((a, b)) \nabla \varepsilon \\ & (a, b) \in \varphi^{-1}(\mathcal{S}^\nabla) \end{aligned}$$

Comme  $(a, b) \in \mathcal{D}^\bullet$  si et seulement si  $a = b$ , la conclusion en résulte. ■

**2.1.4 Proposition** Pour une symétrisation régulière, la relation d'équivalence  $\mathcal{R}_\varphi$  induite par  $\varphi$  ( $x\mathcal{R}_\varphi y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$ ), est compatible avec  $\nabla$ , i.e.:

$$\varphi(a) = \varphi(b) \text{ et } a \nabla c \Rightarrow b \nabla c . \quad (2.1.d)$$

**Preuve**  $\varphi(a) = \varphi(b)$  et  $a \nabla c$  entraînent  $\varphi(a \ominus c) = \varphi(b \ominus c) \in \mathcal{S}^\nabla$ , d'où pour une symétrisation régulière  $b \ominus c \in \mathcal{D}^\bullet$  (par 2.1.3), d'où  $b \nabla c$ , ce qui montre que  $\mathcal{R}_\varphi$  est compatible avec  $\nabla$ . ■

Evidemment, si  $\mathcal{R}_\varphi$  est compatible avec  $\nabla$ , on a

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a \nabla b \quad (2.1.e)$$

(prendre  $c = a$  dans la formule (2.1.d)). La réciproque de la Proposition 2.1.4 est vraie moyennant une hypothèse supplémentaire:

**2.1.5 Hypothèse** L'application  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}, x \mapsto x \oplus x$  est injective.

**2.1.6 Proposition** Si  $\mathcal{D}$  vérifie l'hypothèse 2.1.5, alors toute symétrisation compatible avec  $\nabla$  est régulière.

**Preuve** Supposons  $\varphi((x^+, x^-)) \in \mathcal{S}^\nabla$ . Moyennant la compatibilité et d'après (2.1.e),  $\varphi((x^+, x^-)) = \varphi((x^-, x^+))$  entraîne  $(x^+, x^-) \nabla (x^-, x^+)$ , i.e  $x^+ \oplus x^+ = x^- \oplus x^-$  et lorsque 2.1.5 a lieu,  $x^+ = x^-$ , soit  $(x^+, x^-) \in \mathcal{D}^\bullet$ . Par 2.1.3,  $(\mathcal{S}, j)$  est régulière. ■

**2.1.7 Contre exemple** Soit  $\mathcal{D}$  le demi-anneau des parties de  $\mathbb{R}^2$ , muni de  $\ominus x = s(x)$ , où  $s$  désigne la symétrie de centre  $(0, 0)$  (exemple déjà traité en I,1.0.4).  $(\mathcal{D}, \text{Id})$  est une symétrisation non régulière de  $\mathcal{D}$ . Notons en effet  $a$  le disque de centre 0 et de rayon 1 et  $b$  le singleton  $\{0\}$ . On a  $a \nabla b$  avec  $a$  et  $b$  positifs quoique  $a \neq b$ .

## 2.2 Symétrisation régulière minimale

Du point de vue qui nous intéresse, à savoir la résolution de l'équation (2.1.a) via (2.1.b), on recherche une symétrisation régulière de  $\mathcal{D}$  la plus simple possible. Nous montrons ci-après l'existence d'une "plus petite" symétrisation régulière de  $\mathcal{D}$ . On part du demi-anneau  $\mathcal{D}^2$  symétrisé libre de  $\mathcal{D}$ . Il est naturel d'étudier l'application suivante.

**2.2.1 Notation** On définit l'application  $\Psi : \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{P}((\mathcal{D}^2)^2)$  par:

$$\Psi(a) = \{(p, q) \in (\mathcal{D}^2)^2 \mid p \nabla qa\} .$$

**2.2.2 Proposition** La relation d'équivalence  $\mathcal{R}_\Psi$  associée à  $\Psi$  est une congruence plus fine que la relation  $\nabla$ .

**Preuve**  $\mathcal{R}_\Psi$  est plus fine que  $\nabla$ , car si  $\Psi(a) = \Psi(b)$ , on a  $(a, e) \in \Psi(a)$  donc  $(a, e) \in \Psi(b)$ , donc  $a \nabla b$ . Montrons que  $\mathcal{R}_\Psi$  est compatible avec la structure de demi-anneau symétrisé de  $\mathcal{D}^2$ . Les propositions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{aligned} & (p, q) \in \Psi(a \oplus c) \\ & p \nabla qa \oplus qc \\ & p \ominus qc \nabla qa \\ & (p \ominus qc, q) \in \Psi(a) \end{aligned}$$

et donc  $\Psi(a) = \Psi(b)$  entraîne  $\Psi(a \oplus c) = \Psi(b \oplus c)$ . Semblablement, il résulte de l'équivalence de

$$\begin{aligned} (p, q) &\in \Psi(ac) \\ p \nabla qac \\ (p, qc) &\in \Psi(a) \quad (\text{commutativité}) \end{aligned}$$

que  $\Psi(a) = \Psi(b)$  entraîne  $\Psi(ac) = \Psi(bc)$ . On vérifie de même que  $\Psi(a) = \Psi(b) \Rightarrow \Psi(\ominus a) = \Psi(\ominus b)$ .  $\mathcal{R}_\Psi$  est donc une congruence. ■

**2.2.3 Notation** On note  $\Phi$  l'application  $\mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{D}^2)$  telle que:

$$\Phi(a) = \{x \in \mathcal{D}^2 \mid x \nabla a\} . \quad (2.2.a)$$

On a évidemment

$$\Psi(a) = \cup_{q \in \mathcal{D}^2} \Phi(qa) \times \{q\} . \quad (2.2.b)$$

**2.2.4 Proposition** Si tout élément de  $\mathcal{D}$  est somme finie<sup>2</sup> d'éléments inversibles, alors, pour  $a, b \in \mathcal{D}^2$ , on a  $\Phi(a) = \Phi(b)$  si et seulement si  $\Psi(a) = \Psi(b)$ .

**Preuve** a/ Si tout élément de  $\mathcal{D}$  est somme finie d'éléments inversibles, alors tout élément de  $\mathcal{D}^2$  est somme finie d'éléments inversibles. Cela résulte de  $(x, y) = (x, \varepsilon) \oplus (\varepsilon, y)$  et du fait que  $(x, \varepsilon)$  (resp.  $(\varepsilon, y)$ ) est inversible ssi  $x$  (resp.  $y$ ) l'est.

b/ Si  $\Psi(a) = \Psi(b)$ , trivialement,  $\Phi(a) = \Phi(b)$  (prendre  $q = e$ ).

c/Réiproquement, supposons  $\Phi(a) = \Phi(b)$ . Soit d'après a/,  $q = \bigoplus_{i=1}^k q_i$  somme de  $k$  éléments inversibles et  $p$  tel que  $(p, q) \in \Psi(a)$ . On a alors  $p \ominus \bigoplus_{i=2}^k q_i a \nabla q_1 a$ , d'où  $q_1^{-1}(p \ominus \bigoplus_{i=2}^k q_i a) \in \Phi(a) = \Phi(b)$ , d'où  $p \ominus \bigoplus_{i=2}^k q_i a \nabla q_1 b$ , et l'on obtient la conclusion en réitérant le procédé avec les autres  $q_i$ . ■

On note les propriétés immédiates, mais utiles:

**2.2.5 Lemme** On a (i):  $\Psi(x \oplus t^\bullet) \supset \Psi(x)$  et (ii):  $\Phi(x \oplus t^\bullet) \supset \Phi(x)$ .

**Preuve** Soit  $(p, q) \in \Psi(x)$ . L'équilibre  $p \nabla qx$  se réécrit  $p \ominus qx = qx \ominus p$ , d'où, comme  $t^\bullet = \ominus t^\bullet$ ,  $p \ominus q(x \oplus t^\bullet) = q(x \oplus t^\bullet) \ominus p$ , d'où  $p \nabla q(x \oplus t^\bullet)$ , donc  $(p, q) \in \Psi(x \oplus t^\bullet)$  et  $\Psi(x) \subset \Psi(x \oplus t^\bullet)$ . L'assertion pour  $\Phi$  s'en déduit en prenant  $q = e$ . ■

**2.2.6 Exemple** Dans le demi-anneau symétrisé libre de  $\mathbb{N}_{\text{ppcm}}$  (cf. 1.0.9),  $\Phi$  n'est pas compatible avec le produit, quoique tous les éléments non nuls de  $\mathbb{N}_{\text{ppcm}}$  soient simplifiables. On a en effet  $\Phi(2^2 \ominus 2) = \Phi(2^2)$  (vérification élémentaire ou application de l'étude qui va suivre dans §3.1), alors que  $\Phi((2^2 \times 3) \ominus (2 \times 3)) \neq \Phi(2^2 \times 3)$  (par exemple,  $2^2$  appartient au premier ensemble mais non au deuxième).

On note  $\mathcal{D}^2/\Psi$  le demi-anneau symétrisé quotient. Si  $a, b \in \mathcal{D}$  et  $a \neq b$ , alors  $(a, e) \in \Psi(a)$  mais  $(b, e) \notin \Psi(a)$  ce qui montre que  $a$  et  $b$  considérés comme des éléments de  $\mathcal{D}^2$  appartiennent à deux classes d'équivalence différentes, i.e. que  $i : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^2$  induit un morphisme injectif  $j : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^2/\Psi$ . Ainsi,  $(\mathcal{D}^2/\Psi, j)$  est une symétrisation de  $\mathcal{D}$ . En outre:

**2.2.7 Proposition** Sous l'hypothèse 2.1.5,  $(\mathcal{D}^2/\Psi, j)$  est une symétrisation régulière de  $\mathcal{D}$ .

---

<sup>2</sup>La borne sup de l'ensemble vide étant  $\varepsilon$ , on a avec cette convention  $\varepsilon$  somme finie d'éléments inversibles

**Preuve** Supposons  $j(a) \nabla j(b)$ , soit  $j(a) \ominus j(b) = j(b) \ominus j(a)$ , i.e.  $\Psi(a \ominus b) = \Psi(b \ominus a)$ . On a donc  $a \ominus b \nabla b \ominus a$  i.e  $a \oplus a = b \oplus b$  et par 2.1.5,  $a = b$ . ■

Nous formulons maintenant le résultat central de ce chapitre.

**2.2.8 Théorème** Soit  $(\mathcal{S}, k)$  une symétrisation régulière de  $\mathcal{D}$ . Sous l'hypothèse 2.1.5, il existe un unique morphisme surjectif  $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{D}^2/\Psi$  tel que  $j = \pi \circ k$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{k} & \mathcal{S} \\ & \searrow j & \downarrow \pi \\ & & \mathcal{D}^2/\Psi \end{array}$$

En ce sens,  $\mathcal{D}^2/\Psi$  est la symétrisation régulière “minimale” de  $\mathcal{D}$ .

**Preuve** On note  $\varphi$  (resp.  $\varphi'$ ) la projection  $\mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{D}^2/\Psi$  (resp.  $\mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{S}$ ) (cf.I,1.1.2).

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{D}^2 & & \\ & \nearrow i & \downarrow \varphi' & \searrow \varphi & \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{k} & \mathcal{S} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{D}^2/\Psi \\ & \searrow j & \downarrow \pi & & \end{array}$$

Via la  $\nabla$ -compatibilité de  $\varphi'$  (cf. 2.1.4), il est clair que  $\varphi'(a) = \varphi'(b)$  entraîne  $\Psi(a) = \Psi(b)$ . On définit donc un morphisme  $\pi$  de demi-anneau symétrisé en posant  $\pi(x) = \varphi(x_0)$  pour tout  $x_0$  tel que  $\varphi'(x_0) = x$ . On a  $\pi \circ \varphi' = \varphi$ . L'unicité de  $\pi$  résulte de la surjectivité de  $\varphi'$ , le caractère surjectif de  $\pi$  du caractère surjectif de  $\varphi$ . ■

**2.2.9 Définition (Demi-anneau symétrisé)**  $\mathcal{D}^2/\Psi$  sera appelé le *demi-anneau symétrisé de  $\mathcal{D}$* , et on le notera  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ .

**2.2.10 Exemple** On vérifie que dans le demi-anneau symétrisé libre de  $(\mathbb{N}, +, \times)$ , on a (i):  $\Psi(x) = \Psi(y)$  ssi (ii):  $x \nabla y$ . Par 2.2.2, (i)  $\Rightarrow$  (ii). En outre, si  $x \nabla y$  et  $(p, q) \in \Psi(x)$ , on déduit les assertions suivantes (avec des notations évidentes):

$$\begin{aligned} p &\nabla qx \\ p^+ \oplus q^+ x^- \oplus q^- x^+ &= p^- \oplus q^- x^- \oplus q^+ x^+ \\ p^+ \oplus q^+ x^- \oplus q^- x^+ \oplus (q^+ y^+ \oplus q^- y^-) &= p^- \oplus q^- x^- \oplus q^+ x^+ \oplus (q^+ y^+ \oplus q^- y^-) \\ p^+ \oplus q^+(x^- \oplus y^+) \oplus q^-(x^+ \oplus y^-) &= p^- \oplus q^-(x^- \oplus y^-) \oplus q^+(x^+ \oplus y^+) \\ p^+ \oplus q^+(x^+ \oplus y^-) \oplus q^-(x^- \oplus y^+) &= p^- \oplus q^-(x^- \oplus y^-) \oplus q^+(x^+ \oplus y^+) \quad (\text{car } x \nabla y) \\ p^+ \oplus q^+ y^- \oplus q^- y^+ &= p^- \oplus q^- y^- \oplus q^+ y^+ \quad (\text{en simplifiant}) \\ p &\nabla qy, \end{aligned}$$

d'où  $\Psi(x) \subset \Psi(y)$ . L'égalité en découle par symétrie et l'on a prouvé (ii)  $\Rightarrow$  (i). Le demi-anneau symétrisé de  $\mathbb{N}$  est donc  $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{N}^2/\nabla \simeq \mathcal{D}^2/\Psi$ , et l'on retrouve la construction classique.

**2.2.11 Exemple** On observe de même que tout anneau vérifiant l'hypothèse 2.1.5 est égal à son symétrisé. Le lecteur notera en effet que la preuve de 2.2.10 n'utilise que la simplifiabilité de la somme, a fortiori vérifiée dans un anneau. En outre,  $\Psi((x^+, x^-)) = \Psi((x^+ - x^-, \varepsilon))$ , et a donc  $\mathcal{D}^2/\Psi \simeq \mathcal{D}^\oplus \simeq \mathcal{D}$ .

**2.2.12 Remarque** On peut aussi traiter l'exemple 2.2.10 en notant que tout élément de  $\mathbb{N}$  est somme finie d'éléments inversibles. Il est alors immédiat que  $\Phi(x) = \Phi(y)$  ssi  $x \nabla y$ .

**2.2.13 Contre exemple** Lorsque l'hypothèse 2.1.5 est en défaut, la symétrisation  $(\mathcal{D}^2/\Psi, j)$  peut être non régulière. Considérons en effet  $\mathcal{D} = \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ , on a

$$j(1) = a = (1, 0) \nabla (0, 0) = b = j(0) \text{ dans } \mathcal{D}^2/\Psi$$

avec  $1 \neq 0$ , ce qui contredit la  $\nabla$ -régularité de  $\mathcal{D}^2/\Psi$  (cf. 2.1.1). En effet, on a  $\Psi(a \ominus b) = \Psi(1, 0)$ ,  $\Psi(b \ominus a) = \Psi(0, 1)$ , et  $\Psi(1, 0) = \Psi(0, 1)$ . Via 2.2.4, il suffit de vérifier que  $\Phi(1, 0) = \Phi(0, 1)$ , or

$$\Phi(1, 0) = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

et  $\Phi(0, 1) = \Phi(\ominus(1, 0)) = \ominus\Phi(1, 0) = \Phi(1, 0)$ .

**2.2.14 Proposition** *Sous l'hypothèse 2.1.5, on a  $a \nabla b$  dans  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  si et seulement si  $a_0 \nabla b_0$  dans  $\mathcal{D}^2$ , pour tous représentants  $a_0$  et  $b_0$  de  $a$  et  $b$ .*

**Preuve** Si  $a_0 \nabla b_0$ , on a  $a_0 \ominus b_0 = b_0 \ominus a_0$  et en passant au quotient  $a \ominus b = b \ominus a$  i.e.  $a \nabla b$  dans  $\mathcal{S}$ . Réciproquement, si  $a \nabla b$  dans  $\mathcal{D}^2/\Psi$ , on a  $\Psi(a_0 \ominus b_0) = \Psi(b_0 \ominus a_0)$ , donc  $(a_0 \ominus b_0, e) \in \Psi(b_0 \ominus a_0)$ , d'où  $a_0 \ominus b_0 \nabla b_0 \ominus a_0$  dans  $\mathcal{D}^2$ , d'où  $a_0 \oplus a_0 \nabla b_0 \oplus b_0$ , ce qui moyennant l'hypothèse 2.1.5, donne  $a_0 \nabla b_0$ . ■

### 2.3 Dioïde des fractions d'un dioïde commutatif

La Proposition 2.2.4 montre que les éléments inversibles jouent un rôle particulier. Via la construction d'un dioïde des fractions (calquée sur les anneaux de fractions), on peut rendre inversibles les éléments intègres et d'obtenir des résultats analogues à 2.2.4 pour les éléments intègres. Par exemple, dans  $\mathbb{R}_{\max}[X]$ , les monômes  $aX^k$  sont intègres, tout polynôme est donc somme finie d'éléments intègres, et l'on veut montrer que comme en 2.2.4, les quotients par  $\Phi$  et par  $\Psi$  sont identiques. Comme  $\Phi(P) = \{Q \in (\mathbb{R}_{\max}[X])^2 \mid Q \nabla P\}$  se calcule immédiatement à partir des  $\Phi$  des coefficients de  $P$ , on caractérisera ainsi le dioïde symétrisé de  $\mathbb{R}_{\max}[X]$ .

On rappelle que dans tout ce chapitre, le dioïde  $\mathcal{D}$  est supposé commutatif. Soit  $S \subset \mathcal{D}$  une partie telle que  $S \otimes S \subset S$ , et  $e \in S$ . On munit l'ensemble  $\mathcal{D} \times S$  des deux lois suivantes:

$$(x, s) \oplus (x', s') = (xs' \oplus x's, ss'), \quad (x, s) \otimes (x', s') = (xx', ss') .$$

Le quotient de  $\mathcal{D} \times S$  par la relation suivante:

$$(x, s) \mathcal{R} (x', s') \Leftrightarrow \exists r \in S, rx s' = rx' s$$

est un dioïde, appelé dioïde des fractions de  $\mathcal{D}$  par  $S$ , noté  $\mathcal{D}/S$ . On notera  $x/s$  ou  $\frac{x}{s}$  pour  $(x, s)$ , lorsque qu'aucune confusion avec le quotient résidué de  $x$  par  $s$  ne sera à craindre. On a un morphisme de dioïdes  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/S$ ,  $x \mapsto (x, e)$ . En particulier,  $\varepsilon/e$  et  $e/e$  sont respectivement le zéro et l'unité de  $\mathcal{D}/S$ . Pour tout  $s \in S$ , la classe d'équivalence de  $s/e$  est inversible, comme il résulte de

$$\frac{s}{e} \otimes \frac{e}{s} = \frac{s}{s} \mathcal{R} \frac{e}{e}.$$

En général, le morphisme  $x \mapsto x/e$  n'est pas injectif. Il ne l'est que si tout élément  $s$  de  $S$  est tel que  $sx = sy \Rightarrow x = y$ .

On appelle *intègre* un élément  $a$  tel que l'homothétie  $x \mapsto ax$  soit injective. On notera  $\mathcal{D}^i$  l'ensemble des éléments intègres. L'ensemble  $\mathcal{D}^i$  est clairement stable par produit et contient  $e$ .

**2.3.1 Définition (dioïde des fractions)** On appellera dioïde des fractions<sup>3</sup> de  $\mathcal{D}$ , noté  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ , le dioïde  $\mathcal{D}/\mathcal{D}^i$ .

Le morphisme injectif  $x \mapsto x/e$  plonge  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ . On pourra donc identifier  $x$  et  $x/e$ . Tous les éléments intègres de  $\mathcal{D}$  sont inversibles dans le dioïde des fractions.

**2.3.2 Exemple** Soit  $\mathcal{D} = \mathbb{R}_{\max}[X]$ . L'ensemble  $S$  des monômes (i.e. des polynômes de la forme  $aX$ , avec  $a \neq \varepsilon$ ) vérifie  $S \otimes S \subset S$  et  $e \in S$ . Un élément du dioïde des fractions de  $\mathbb{R}_{\max}[X]$  par  $S$  pourra s'écrire sous la forme  $P/X^k$ , où  $k \in \mathbb{N}$ , ou de manière équivalente sous la forme  $\bigoplus_{i=-k}^p a_i X^i$ . L'écriture  $P/X^k$  (avec  $k \in \mathbb{Z}$ ) est unique si l'on impose  $P$  de valuation 0.

On rappelle (cf. 0.7.2.1) qu'un dioïde est faiblement archimédien si pour tout  $y$  et pour  $x \neq \varepsilon$ , il existe  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\lambda x \succeq \mu y$ .

**2.3.3 Lemme** L'élément  $d = (d^+, d^-)$  est intègre dans  $\mathcal{D}^2$ ssi:  $1/d^- = \varepsilon$  et  $d^+$  intègre dans  $\mathcal{D}$  ou  $2/d^+ = \varepsilon$  et  $d^-$  intègre dans  $\mathcal{D}$ .

**Preuve** L'application  $\mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{D}^2, x \mapsto dx$  se représente par la matrice

$$P = \begin{bmatrix} d^+ & d^- \\ d^- & d^+ \end{bmatrix}$$

dans la base canonique. Via le Théorème 0.7.2.3, l'injectivité de cette application entraîne que la matrice  $P$  est monomiale, ce qui implique  $d$  positif non nul ou négatif non nul. La condition d'intégrité de  $d^+$  ou  $d^-$  selon le cas est claire. ■

**2.3.4 Proposition** Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde faiblement-archimédien. On a

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{D}})^2 \simeq \mathcal{F}_{\mathcal{D}^2} .$$

**Preuve** Il résulte du Lemme 2.3.3 que tout élément  $x$  de  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}^2}$  s'écrit sous la forme  $x = \frac{p \oplus q}{d}$ , avec  $p, q, d \in \mathcal{D}$  et  $d$  intègre. On observe que les quotients  $\frac{p}{d}$  et  $\frac{q}{d}$  dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$  ne dépendent que de  $x$ . En effet, si  $x = \frac{p' \oplus q'}{d'}$ , on a  $d'(p \oplus q) = d(p' \oplus q')$ , et en identifiant les parties positives et négatives, on obtient  $\frac{p}{d} = \frac{p'}{d'}$ ,  $\frac{q}{d} = \frac{q'}{d'}$ . On peut donc identifier  $x$  à l'élément  $\frac{p}{d} \oplus \frac{q}{d}$  de  $(\mathcal{F}_{\mathcal{D}})^2$ , ce qui montre la proposition 2.3.4. ■

**2.3.5 Dioïde des fractions de  $\mathcal{D}[X]$**  Lorsque  $\mathcal{D}$  est faiblement-archimédien, on peut caractériser simplement le dioïde des fractions de  $\mathcal{D}[X]$ . On prétend que les seuls éléments intègres de  $\mathcal{D}[X]$  sont des monômes de la forme  $dX^k$ , avec  $d$  intègre. La condition d'intégrité de  $d$  est immédiate. Le fait qu'un polynôme intègre est un monôme résulte de l'argument du Corollaire 7.2.9 du Chapitre 0. Un élément du dioïde des fractions de  $\mathcal{D}[X]$  pourra donc s'écrire  $d^{-1}X^{-k}P$ , où  $k \in \mathbb{N}$ ,  $d$  est intègre et  $P \in \mathcal{D}[X]$ . On pourra aussi l'écrire  $\bigoplus_{i=-k}^l a_i X^i$ , où  $a_i \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ . En particulier, le dioïde construit dans l'exemple 2.3.2 est le dioïde des fractions de  $\mathbb{R}_{\max}[X]$ .

**2.3.6 Exemple (Dioïde  $\mathbb{Q}_{\text{ppcm}}$ )** Comme tout élément non nul de  $\mathbb{N}_{\text{ppcm}}$  est intègre, le dioïde des fractions de  $\mathbb{N}_{\text{ppcm}}$  est égal à  $(\mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}) \cup \{\varepsilon\}$ , muni des deux lois suivantes:

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{\text{ppcm}(pq', p'q)}{qq'}, \quad \frac{p}{q} \otimes \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'} .$$

---

<sup>3</sup>Ce dioïde est l'analogue de "l'anneau total des fractions" en algèbre commutative.

Nous appliquons la construction du dioïde des fractions à la caractérisation du dioïde symétrisé. On notera:

$$\Psi_{\mathcal{D}}(x) = \{(p, q) \in (\mathcal{D}^2)^2 \mid px \nabla q\}, \quad \Psi_{\mathcal{F}}(x) = \{(p, q) \in ((\mathcal{F}_{\mathcal{D}^2})^2 \mid px \nabla q\} .$$

**2.3.7 Proposition** Soient  $x, y \in \mathcal{D}^2$ . Les propositions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $\Psi_{\mathcal{D}}(x) = \Psi_{\mathcal{D}}(y)$ ,
- (ii)  $\Psi_{\mathcal{F}}(x) = \Psi_{\mathcal{F}}(y)$ .

**Preuve** Cela résulte de l'équivalence des propositions suivantes:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{s}, \frac{q}{r}\right) &\in \Psi_{\mathcal{F}_{\mathcal{D}}}(x) \\ \frac{p}{s} \nabla \frac{q}{r} x \\ rp \nabla sqx \\ (rp, sq) &\in \Psi_{\mathcal{D}}(x) . \end{aligned}$$

■

**2.3.8 Corollaire** Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde tel que tout élément soit somme finie d'éléments intègres. On a  $\Psi_{\mathcal{D}}(x) = \Psi_{\mathcal{D}}(y)$  dans  $\mathcal{D}^2$  ssi  $\Phi_{\mathcal{F}}(x) = \Phi_{\mathcal{F}}(y)$ .

**Preuve** Résulte de la proposition 2.3.7, de 2.2.4 et du fait que les éléments intègres de  $\mathcal{D}^2$  sont inversibles dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}^2}$ . ■

### 3 Dioïdes symétrisés

#### 3.1 Solutions de l'équilibre élémentaire $x \nabla a$

Nous particularisons ici la théorie aux dioïdes. En raison de l'idempotence, l'application  $x \mapsto x \oplus x$  est injective (hypothèse 2.1.5), et l'on peut définir le dioïde symétrisé de  $\mathcal{D}$  via 2.2.9:  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^2 / \Psi$ . Comme l'étude de l'ensemble  $\Psi(x)$  se ramène à celle de  $\Phi(x)$ , comme l'exprime la formule (2.2.b), il nous suffit d'obtenir  $\Phi(x) = \{y \mid y \nabla x\}$  pour caractériser le dioïde symétrisé. Nous caractérisons ici cet ensemble, moyennant quelques hypothèses de résiduabilité.

Nous supposerons que  $\mathcal{D}$  est un dioïde inf-complet distributif (0,5.2.2), donc additivement résidué (0, 5.2.1).  $\mathcal{D}^2$  est alors également inf-complet distributif, et l'on a:

$$(a^+, a^-) \boxminus (b^+, b^-) = (a^+ \boxminus b^+, a^- \boxminus b^-) .$$

On a par 0,2.1.2 et 0,5.2.5,(vii) puisque  $\ominus x = (\ominus e)x$  et que  $\ominus e$  est inversible:

$$\ominus(a \wedge b) = (\ominus a) \wedge (\ominus b) \tag{3.1.a}$$

$$\ominus(a \boxminus b) = (\ominus a) \boxminus (\ominus b) . \tag{3.1.b}$$

En particulier, si  $a, b \in \mathcal{D}^\bullet$ , on a  $a \wedge b \in \mathcal{D}^\bullet$  et  $a \boxminus b \in \mathcal{D}^\bullet$ . En effet,  $a \in \mathcal{D}^\bullet$  est équivalent à  $a = \ominus a$ , de même pour  $b$ . On a alors  $\ominus(a \wedge b) = (\ominus a) \wedge (\ominus b) = a \wedge b$ , d'où  $a \wedge b \in \mathcal{D}^\bullet$ , et de même pour  $a \boxminus b$ .

Notons  $[u, v] = \{t \in \mathcal{D}^2 \mid u \preceq t \preceq v\}$ .

**3.1.1 Théorème** Soit  $a \in \mathcal{D}^2$ . On a  $\Phi(a) = [a \boxminus (\ominus a), a^\bullet] \oplus \mathcal{D}^\bullet$ .

**Preuve :** Soit  $x$  tel que  $x \nabla a$ , i.e.  $x^+ \oplus a^- = x^- \oplus a^+$ . On part de la décomposition (cf. 0.5.2.5.(x))

$$x = (x \boxminus a^\bullet) \oplus (x \wedge a^\bullet) .$$

1/-Montrons que  $x \boxminus a^\bullet \in \mathcal{D}^\bullet$ . Posons  $x \ominus a = t^\bullet \in \mathcal{D}^\bullet$ . On a  $t^\bullet \succeq x \succeq t^\bullet \boxminus (\ominus a)$ , donc  $t^\bullet \boxminus a^\bullet \succeq x \boxminus a^\bullet \succeq (t^\bullet \boxminus (\ominus a)) \boxminus a^\bullet = t^\bullet \boxminus (a^\bullet \ominus a) = t^\bullet \boxminus a^\bullet$ . On a donc:  $x \boxminus a^\bullet = t^\bullet \boxminus a^\bullet \in \mathcal{D}^\bullet$  d'après la remarque précédente.

2/-Notons que  $x' = x \wedge a^\bullet$  vérifie également  $x' \nabla a$ . En effet,  $\mathcal{D}^\bullet \ni (x \ominus a) \wedge a^\bullet = (x \wedge a^\bullet) \ominus (a \wedge a^\bullet) = (x \wedge a^\bullet) \ominus a$ . Il suffit donc de rechercher les solutions de  $x \nabla a$  plus petites que  $a^\bullet$ .

3/-L'équilibre  $x \nabla a$  est équivalent à  $x \ominus a = (\ominus x) \oplus a$ . On a  $x \succeq [(\ominus x) \oplus a] \boxminus (\ominus a) \succeq a \boxminus (\ominus a)$ . Inversement, supposons  $a \boxminus (\ominus a) \preceq x \preceq a^\bullet$ . On a:  $a^\bullet \preceq [a \boxminus (\ominus a)] \oplus (\ominus a) \preceq x \ominus a \preceq a^\bullet \ominus a = a^\bullet$  ■

**3.1.2 Exemple** Soit  $x = (x^+, x^-) \in \mathbb{R}_{\max}^2$  avec  $x^+ \succ x^-$ . On a  $x^+ \boxminus x^- = x^+$ ,  $x^- \boxminus x^+ = \varepsilon$ , soit  $\mu(x) = (x^+, \varepsilon)$ . Le Théorème affirme que

$$\{(y^+, y^-) \mid \max(x^+, y^-) = \max(x^-, y^+)\} = \{(y^+, y^-) \mid x^+ = y^+, y^- \preceq y^+\} \oplus \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}_{\max}\} ,$$

ce que l'on vérifie de manière élémentaire.

Nous appliquons maintenant ce résultat au calcul de quelques dioïdes symétrisés.

## 3.2 Symétrisé du dioïde de Boole

Soit  $\mathbb{B} = \{\varepsilon, e\}$  le dioïde des booléiens (cf. 0.1.0.2). Il résulte de 2.2.4 que  $\mathcal{S}_{\mathbb{B}} = \mathbb{B}^2 / \Phi$ . On a par application de 3.1.1 ou bien par une vérification élémentaire:

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon) &= \mathbb{B}^\bullet \\ \Phi(e) &= \{e, e^\bullet\} \\ \Phi(\ominus e) &= \{\ominus e, e^\bullet\} \\ \Phi(e^\bullet) &= \mathbb{B}^2 . \end{aligned}$$

Ainsi, l'application  $\mathbb{B}^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{B}^2)$ ,  $x \mapsto \Phi(x)$  est injective, et donc

$$\mathcal{S}_{\mathbb{B}} \simeq \mathbb{B}^2 = \{\varepsilon, e, \ominus e, e^\bullet\} . \quad (3.2.a)$$

On a les tables de Cayley suivantes.

$\oplus$	$\varepsilon$	$e$	$\ominus e$	$e^\bullet$
$\varepsilon$	$\varepsilon$	$e$	$\ominus e$	$e^\bullet$
$e$	$e$	$e$	$e^\bullet$	$e^\bullet$
$\ominus e$	$\ominus e$	$e^\bullet$	$\ominus e$	$e^\bullet$
$e^\bullet$	$e^\bullet$	$e^\bullet$	$e^\bullet$	$e^\bullet$

$\otimes$	$\varepsilon$	$e$	$\ominus e$	$e^\bullet$
$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$
$e$	$\varepsilon$	$e$	$\ominus e$	$e^\bullet$
$\ominus e$	$\varepsilon$	$\ominus e$	$e$	$e^\bullet$
$e^\bullet$	$e^\bullet$	$e^\bullet$	$e^\bullet$	$e^\bullet$

## 3.3 Le dioïde symétrisé de $\mathbb{R}_{\max}$

Nous étudions ici le dioïde symétrisé de  $\mathbb{R}_{\max}$ . Il en vaut la peine, pour aux moins deux raisons: (i): le symétrisé s'obtiendra de manière analogue pour tous les demi-corps idempotents totalement ordonnés, dont  $\mathbb{R}_{\max}$  est un exemple générique, (ii): c'est dans ce cadre que l'on obtiendra une théorie satisfaisante des systèmes linéaires.

Dans  $\mathbb{R}_{\max}$ , on a caractérisé l'opération  $\boxminus$  en 0.5.2.7. On a donc:

$$a \boxminus \ominus a = (a^+ \boxminus a^-, a^- \boxminus a^+) = \begin{cases} (a^+, \varepsilon) & \text{si } a^+ > a^- \\ (a^-, \varepsilon) & \text{si } a^+ < a^- \\ (\varepsilon, \varepsilon) & \text{si } a^+ = a^-, \end{cases}$$

d'où via 3.1.1:

$$\Phi(a) = \begin{cases} ([\varepsilon, a^+] \times [\varepsilon, a^+]) \cup \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}_{\max}, x > a^+\} & (\text{cas } a^+ = a^-) \\ (\{a^+\} \times [\varepsilon, a^+]) \cup \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}_{\max}, x > a^+\} & (\text{cas } a^+ > a^-) \\ ([\varepsilon, a^-] \times \{a^-\}) \cup \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}_{\max}, x > a^-\} & (\text{cas } a^+ < a^-). \end{cases} \quad (3.3.a)$$

On a représenté les diverses allures de  $\Phi((a^+, a^-))$  sur la Figure II.2. Dans ce cas précis, la caractérisation ci-dessus de  $\Phi(a) = \{(x^+, x^-) \mid \max(x^+, a^-) = \max(x^-, a^+)\}$  se retrouve évidemment de manière élémentaire.

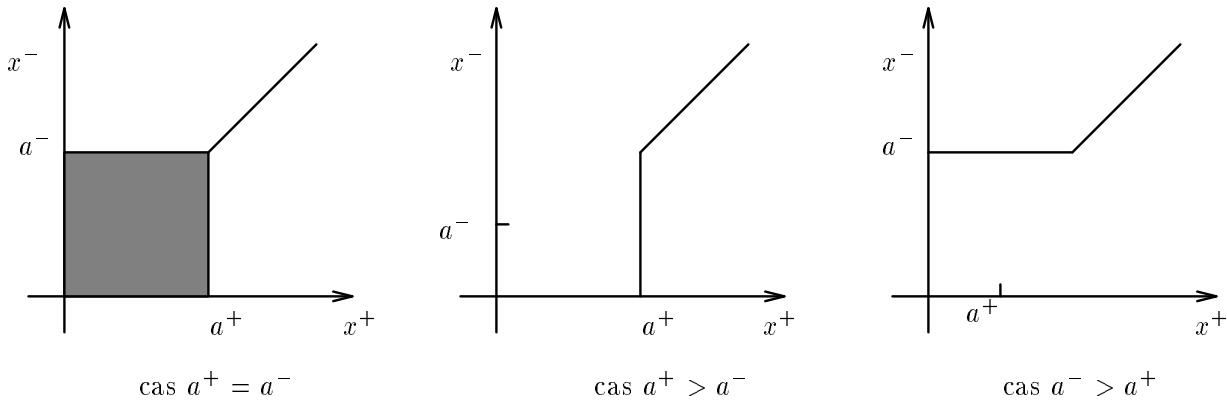


Figure II.2:  $\Phi((x^+, x^-))$  dans le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}^2$

Ainsi, on retrouve le dioïde  $\mathbb{S}_{\max}$  construit de manière élémentaire dans la motivation de ce chapitre. On retrouve de la sorte qu'il y a dans le dioïde symétrisé de  $\mathbb{R}_{\max}$ ,  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_{\max}} = \mathbb{R}_{\max}^2 / \Psi$ , trois sortes de classes d'équivalences, positives, négatives, et équilibrées, correspondant respectivement aux  $(a, \varepsilon)$ ,  $(\varepsilon, a)$  et  $(a, a)$  (cf. §1.2).

**3.3.1 Définition (Signe)** *On appelle signe l'application  $s : \mathbb{S}_{\max} \rightarrow \mathbb{B}^2$ ,  $x \mapsto sx$ , défini comme suit:*

$$sx = \begin{cases} e & \text{si } x \in \mathbb{S}_{\max}^\oplus \setminus \{\varepsilon\} \\ \ominus e & \text{si } x \in \mathbb{S}_{\max}^\ominus \setminus \{\varepsilon\} \\ e^\bullet & \text{si } x \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet \setminus \{\varepsilon\} \\ \varepsilon & \text{si } x = \varepsilon. \end{cases}$$

Le signe n'est pas un morphisme de dioïde. On a par exemple  $2 \oplus (\ominus 1) = 2$ , mais  $s2 = e \neq s2 \oplus s\ominus 1 = e \ominus e = e^\bullet$ . On peut voir l'ordre de  $\mathbb{S}_{\max}$  comme l'ordre lexicographique formé à partir de l'ordre de  $\mathbb{R}_{\max}$  et de l'ordre du dioïde symétrisé des booléiens.

**3.3.2 Propriétés** *Dans  $\mathbb{S}_{\max}$ , on a les propriétés suivantes:*

- (i)  $a \preceq b$ ssi  $|a| \prec |b|$  ou  $(|a| = |b| \text{ et } sa \preceq sb)$ ,

(ii) Soient  $a \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet$  et  $b \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus}$ . On a  $a \oplus b \nabla \varepsilon$ ssi  $|b| \preceq |a|$ .

(iii)  $a = b$ ssi  $\mathbf{s}a = \mathbf{s}b$  et  $|a| = |b|$ .

**Preuve** (i): L'application  $x \mapsto |x|$  est croissante, donc  $a \preceq b$  entraîne  $|a| \preceq |b|$ . La suite se déduit de 3.1.1.

(ii): résulte immédiatement de la caractérisation de  $\Phi(a^\bullet)$  (cf. 3.1.1).

(iii): immédiat. ■

Soit maintenant l'équilibre linéaire:

$$ax \oplus b \nabla \varepsilon \quad (3.3.b)$$

avec  $(a, b) \in (\mathbb{S}_{\max})^2$ . Si  $x$  est solution de (3.3.b), pour tout  $t \in \mathbb{S}_{\max}$ ,

$$x'' = x \oplus t^\bullet \quad (3.3.c)$$

est également solution. Afin d'exclure les solutions triviales, nous posons:

**3.3.3 Définition** Une solution  $x$  de l'équation (3.3.b) est dite dégénérée si et seulement si il existe  $x' \prec x$  et  $t \in \mathbb{S}_{\max}$  tels que:

$$x = x' \oplus t^\bullet$$

L'étude des équilibres linéaires pourra se limiter à la recherche des solutions non dégénérées, étant entendu que les autres solutions peuvent se recouvrir par (3.3.c).

**3.3.4 Lemme** Une solution  $x$  de (3.3.b) est signéessi elle est non dégénérée.

**Preuve** Si  $x$  est signé et  $x = x' \oplus t^\bullet$ , comme  $\mathbf{s}t^\bullet = e^\bullet \not\preceq \mathbf{s}x$ , il résulte de 3.3.2,(i) que l'on ne peut avoir  $|t^\bullet| = |x|$ . Ainsi,  $|t| \prec |x|$ , et donc  $|x| = |x'|$ . En appliquant à nouveau 3.3.2,(i), on trouve que  $\mathbf{s}x' \preceq \mathbf{s}x$ , et comme  $x' \neq \varepsilon$ ,  $\mathbf{s}x' = \mathbf{s}x$ , d'où  $x = x'$  par 3.3.2,(iii), ce qui montre que  $x$  est non dégénérée.

Réciproquement, supposons  $x = t^\bullet$  non signé solution de  $ax \nabla b$  et montrons que  $x$  est solution dégénérée. Si  $|a||x| \succ |b|$ , on a en choisissant  $u$  tel que  $|x| \succ |u| \succ |a|^{-1}|b|$ ,  $au^\bullet \nabla b$ , avec  $u^\bullet \preceq x$ . Si  $|a||x| \prec |b|$ , on a  $ax \ominus b = \ominus b \nabla \varepsilon$ , et donc  $u = \varepsilon$  est solution. Si  $|a||x| = |b|$ , de deux choses l'une: 1/ si  $a \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet$ , on a  $a|x| = a^\bullet|x| = ax^\bullet$ , et  $|x|$  est solution, 2/ si  $a$  est inversible, on peut supposer  $a = e$  quitte à multiplier par  $a^{-1}$ , et la conclusion résulte de ce que les points minimaux de  $\Phi(b)$  sont signés ou nuls (cf. (3.3.a)). ■

**3.3.5 Théorème** Soit  $a \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus} \setminus \{\varepsilon\}$  et  $b \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus}$ . L'équilibre  $ax \oplus b \nabla \varepsilon$  admet l'unique solution signée  $x = \ominus a^{-1}b$ .

C'est un cas particulier du résultat suivant:

**3.3.6 Théorème** L'ensemble des solutions signées de l'équilibre (3.3.b) est:

$$\begin{cases} \{\ominus a^{-1}b\} & \text{si } a \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus} \setminus \{\varepsilon\} \text{ et } b \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus} \\ \{t \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus} \mid |t| \preceq |a^{-1}b|\} & \text{si } a \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus} \setminus \{\varepsilon\} \text{ et } b \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet \\ \{t \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus} \mid |t| \succeq |a|^{-1}|b|\} & \text{si } a \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet \setminus \{\varepsilon\} \text{ et } b \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus} \\ \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus} & \text{si } (a, b) \in (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^2. \end{cases}$$

**Preuve :** les cas  $a \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee} \setminus \{\varepsilon\}$  sont une traduction de  $x \in \Phi(\ominus a^{-1}b)$  (cf. II,3.1.1). Supposons  $a \in \mathbb{S}_{\max}^{\bullet}$  et  $b$  déséquilibré. Via la Propriété 3.3.2,(ii),  $ax \oplus b \nabla \varepsilon$  est équivalent à  $|ax| \succeq |b|$ , c'est à dire à  $|a||x| \succeq |b|$ , soit  $|x| \succeq |a|^{-1}|b|$ . ■

**3.3.7 Remarque** Le Théorème 3.3.5 exprime que dans le cas *générique*, l'équilibre  $ax \oplus b \nabla \varepsilon$  admet une unique solution signée, donnée par la formule habituelle.

Les deux propriétés suivantes, immédiates, seront utiles.

**3.3.8 Propriétés** *On a:*

- (i)  $\mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus} \otimes \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus} \subset \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus}$ .
- (ii)  $a \oplus b \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus} \Rightarrow a \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus}$  ou  $b \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus}$ .

**3.3.9 Proposition**  $\mathbb{S}_{\max}$  est additivement résidué.

**Preuve** Comme l'équation  $b \oplus x \succeq a$  est équivalente à  $\ominus b \ominus x \succeq \ominus a$ , on a

$$(\ominus a) \boxminus (\ominus b) = \ominus(a \boxminus b) \quad (3.3.d)$$

dès que l'une des deux quantités est définie. On vérifie sans difficulté que l'opération  $\boxminus$  est donnée par le tableau suivant:

$\boxminus$	$v$	$\ominus v$	$v^\bullet$
$u$	$\begin{cases} u & \text{si } u \succ v \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} u & \text{si } u \succeq v \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} u & \text{si } u \succ v \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$
$u^\bullet$	$\begin{cases} u^\bullet & \text{si } u \succ v \\ \ominus v & \text{si } u = v \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$		$\begin{cases} u^\bullet & \text{si } u \succ v \\ \varepsilon & \text{sinon,} \end{cases}$

où  $u, v \in \mathbb{R}_{\max}$ , les autres cas s'en déduisant par (3.3.d). ■

**3.3.10 Contre exemple** Le dioïde  $\mathbb{S}_{\max}$  n'est ni relativement complet<sup>4</sup>, ni un treillis, ni multiplicativement résidué. En effet, l'ensemble des minorants de  $e$  et  $\ominus e$ , égal à  $\{x \mid |x| \prec e\}$ , n'admet pas d'élément maximal. Ainsi, l'ensemble  $\{e, \ominus e\}$  n'admet pas de borne-inf. En outre, on a  $\{x \mid e^\bullet \preceq e\} = \{x \mid |x| \prec e\}$ , ce qui montre que l'homothéties  $x \mapsto e^\bullet x$  n'est pas résiduable.

**3.3.11 Dioïde complété de  $\mathbb{S}_{\max}$**  On a vu en 0,§5.3 que dans les inf-dioïdes multiplicativement résidués, on peut simplement étudier les équations matricielles de type  $Ax = b$  et caractériser les familles faiblement indépendantes. Cela motive la question du plongement d'un dioïde donné dans un inf-dioïde multiplicativement résidué. Cette question mériterait une étude complète et générale. Nous nous contenterons ici d'un résultat particulier relatif à  $\mathbb{S}_{\max}$ .

On notera  $|D\mathbb{S}_{\max}|$  l'ensemble des idéaux non vides de  $\mathbb{S}_{\max}$ . Etant donné un idéal  $I$ , l'image  $|I|$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}_{\max}$  par le morphisme de demi-treillis  $x \mapsto |x|$  est un idéal de  $\mathbb{R}_{\max}$ .

**3.3.12 Lemme** Soit  $I$  un idéal non vide de  $\mathbb{S}_{\max}$ . De trois choses l'une:

- (i)  $|I|$  n'est pas majoré, auquel cas  $I = \mathbb{S}_{\max}$ ,

---

<sup>4</sup>un ensemble ordonné est relativement complet si toute partie bornée admet une borne sup

- (ii) on a  $|I| = \downarrow(x)$  avec  $x \in \mathbb{R}_{\max}$ , auquel cas  $I$  est principal. De manière précise, on a  $1/I = \downarrow(x)$  ou  $2/\downarrow(\ominus x)$  ou  $3/\downarrow(x^\bullet)$  selon que  $1/x \in I$  et  $\ominus x \notin I$ ,  $2/\ominus x \in I$  et  $x \notin I$ ,  $3/x, \ominus x \in I$ .
- (iii)  $|I| = \{t \in \mathbb{R}_{\max} \mid t \prec x\}$ , auquel cas  $I = \{u \in \mathbb{S}_{\max} \mid u \prec x\} = \downarrow(x) \cap \downarrow(\ominus x)$ .

**Preuve** Résulte immédiatement de la caractérisation 3.3.2 de l'ordre de  $\mathbb{S}_{\max}$ . ■

L'ensemble  $\text{IDS}_{\max}$  est un treillis complet, dont le sup est donnée par 0,2.1.5. L'application  $x \mapsto \downarrow(x)$  est un morphisme de demi-treillis injectif de  $\mathbb{S}_{\max}$  dans  $\text{IDS}_{\max}$ . Définissons le produit des idéaux par

$$I \otimes J = \{xx' \mid x \in I, x' \in J\} .$$

Le produit de deux idéaux est un idéal. En effet, il est immédiat que  $\downarrow(I \otimes J) = I \otimes J$ . Montrons que  $(I \otimes J)$  est stable par borne-sup. Soient  $x, x' \in I$  et  $y, y' \in J$ . On a  $xy \oplus x'y' \preceq (x \oplus x')(y \oplus y') \in I \otimes J$ , ce qui montre la stabilité. De manière plus précise, on a les règles de calcul suivantes:

$$\begin{aligned} \downarrow(a) \otimes \downarrow(b) &= \downarrow(ab) \\ \downarrow(a) \otimes (\downarrow(u) \cap \downarrow(\ominus u)) &= \downarrow(u|a|) \cap \downarrow(\ominus u|a|), \\ (\downarrow(u) \cap \downarrow(\ominus u)) \otimes (\downarrow(v) \cap \downarrow(\ominus v)) &= \downarrow(uv) \cap \downarrow(\ominus uv) . \end{aligned}$$

Le Lemme suivant résulte immédiatement de la caractérisation des idéaux de  $\mathbb{S}_{\max}$  (cf. 3.3.12).

**3.3.13 Lemme** Soit  $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$  une famille majorée d'idéaux non vides de  $\mathbb{S}_{\max}$ . De deux choses l'une:

- (i)  $\bigoplus_{\alpha} |I_\alpha|$  est un idéal principal. On a alors deux indices  $\mu, \nu \in A$  (éventuellement confondus) tels que  $\bigoplus_{\alpha} I_\alpha = I_\mu \oplus I_\nu$ .
- (ii)  $\bigoplus_{\alpha} |I_\alpha|$  est de la forme  $\{t \mid t \prec x\}$ , auquel cas  $\bigoplus_{\alpha} I_\alpha = \{u \in \mathbb{S}_{\max} \mid u \prec x\}$ .

**3.3.14 Proposition** L'ensemble des idéaux non vides de  $\mathbb{S}_{\max}$ , muni de la borne sup naturelle (cf. 0,2.1.5) et du produit, est un dioïde complet.

**Preuve** Le seul point non trivial est la distributivité (infinie). Dans le cas (ii) du Lemme 3.3.13, on a pour un idéal  $J$  majoré,

$$|(\bigcup_{\alpha} I_\alpha)J| = \bigcup_{\alpha} |I_\alpha||J| = \{t \in \mathbb{R}_{\max} \mid t \prec x \sup |J|\} .$$

Il résulte que

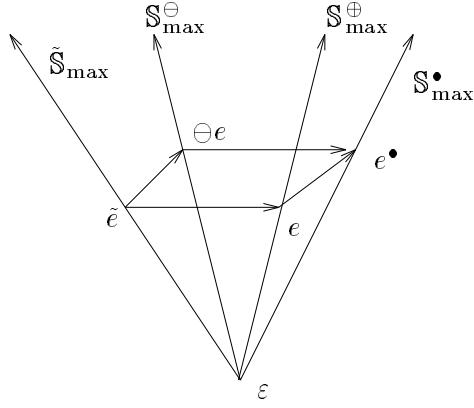
$$(\bigoplus_{\alpha} I_\alpha)J = \{u \mid u \prec x\}J = \{u \mid u \prec x \sup |J|\} = \bigoplus_{\alpha} I_\alpha J .$$

Dans le cas (i), on est ramené à une propriété de distributivité finie, qui se vérifie de manière élémentaire. ■

Le morphisme  $x \mapsto \downarrow(x)$  permet d'identifier  $\mathbb{S}_{\max}$  au sous-dioïde des idéaux principaux de  $\mathbb{S}_{\max}$ . On notera  $\tilde{u}$  l'idéal  $\downarrow(u) \cap \downarrow(\ominus u) = \{x \mid x \prec u\}$ ,  $\tilde{\mathbb{S}}_{\max}$  l'ensemble des idéaux de la forme  $\tilde{u}$ , et  $\infty$  l'idéal  $\mathbb{S}_{\max}$ . On a la décomposition:

$$\text{IDS}_{\max} = \mathbb{S}_{\max} \cup \tilde{\mathbb{S}}_{\max} \cup \{\infty\}, \quad \mathbb{S}_{\max} \cap \tilde{\mathbb{S}}_{\max} = \{\varepsilon\} .$$

On a illustré cette décomposition sur la Figure II.3 (où les flèches représentent l'ordre croissant).

Figure II.3: Le dioïde  $|D S_{\max}$  (complété de  $S_{\max}$ )

**3.3.15 Exemple** On peut maintenant appliquer les résultats de résiduation à la résolution de certaines équations dans  $S_{\max}$ . Soit le système:

$$AX = b, \text{ où } A = \begin{bmatrix} e & e^\bullet \\ \Theta e & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix} .$$

En se plongeant dans  $|D S_{\max}$ , qui est un inf-dioïde multiplicativement résidué, on peut écrire:

$$A \otimes (A \backslash b) = \begin{bmatrix} e & e^\bullet \\ \Theta e & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e \backslash e \wedge (\Theta e) \backslash 1 = e \\ e^\bullet \backslash e \wedge 2 \backslash 1 = -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

ce qui montre que le vecteur  $A \backslash b = [e, -1]^T$  est solution.

Nous concluons cette section en donnant un résultat de quasi-unicité de familles génératrices minimales pour les sous-moduloïdes de type-fini de  $S_{\max}^n$ .

**3.3.16 Proposition** *Etant données deux familles génératrices minimales  $\{u_i\}_{i \in I}$  et  $\{v_j\}_{j \in J}$  d'un sous-moduloïde de type-fini  $\mathcal{V} \subset S_{\max}^n$ , il existe une famille de scalaires  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  et une bijection  $\sigma : I \rightarrow J$  tels que  $u_i = \lambda_i v_{\sigma(i)}$ .*

En particulier, le cardinal d'une famille génératrice minimale est invariant. On l'appellera dimension faible de  $\mathcal{V}$ .

**Preuve** On adapte la preuve du Théorème 5.5.3 du Chapitre 0. En reprenant les mêmes notations, on a:

$$u_i = \bigoplus_{j \in J, k \in I} \lambda_{ij} \mu_{jk} u_k . \quad (3.3.e)$$

On distingue deux cas:

(i): Il existe une composante non équilibrée  $u_i^l$  de  $u_i$ . De

$$u_i^l \succeq \bigoplus_{j \in J} \lambda_{ij} \mu_{ji} u_i^l . \quad (3.3.f)$$

on tire alors  $\bigoplus_{j \in J} \lambda_{ij} \mu_{ji} \preceq u_i^l \setminus u_i^l = e$ . On a en outre l'égalité (sinon, le terme associé à  $u_i$  serait redondant à droite de (3.3.e) et l'on conclut comme en 0,5.5.3).

(ii):  $u_i = u_i^\bullet$ . On prend alors  $u_i^l$  composante non nulle de  $u_i$ . De (3.3.f), on tire maintenant  $|\bigoplus_{j \in J} \lambda_{ij} \mu_{ji}| = e$ , et donc il existe  $j_i$  tel que

$$|\lambda_{ij_i} \mu_{j_i i}| = e .$$

On a

$$u_i = u_i^\bullet \succeq \lambda_{ij_i} v_j \succeq \lambda_{ij_i} \mu_{j_i i} u_i = |\lambda_{ij_i} \mu_{j_i i}| u_i^\bullet = u_i ,$$

d'où

$$u_i = \lambda_{ij_i} v_{j_i} .$$

Il est clair que l'application  $i \mapsto j_i$  est une bijection de  $I$  dans  $J$ . ■

**3.3.17 Remarque** A la différence de  $\mathbb{R}_{\max}$ , les  $\lambda_{j_i}$  ne sont pas en général inversibles. Par exemple,  $\{e^\bullet\}$  et  $\{2^\bullet\}$  sont deux familles génératrice minimales du moduloïde  $\mathbb{S}_{\max}^\bullet$ , et l'on peut écrire  $2^\bullet = \lambda e^\bullet$  avec  $\lambda = 2, \ominus 2$  ou  $2^\bullet$ .

### 3.4 Autres dioïdes symétrisés

**3.4.1 Dioïde symétrisé de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$**  Dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  muni de l'union et de la somme vectorielle,  $a^+ \boxminus a^-$  est la différence ensembliste coutumière de  $a^+$  et de  $a^-$  (cf. 0,5.2.6). La connaissance de  $\Phi(a)$  détermine  $a^+ \cup a^-$  ainsi que les différences ensemblistes  $a^+ \setminus a^-$  et  $a^- \setminus a^+$ . On obtient alors  $a^+ \cap a^-$  par  $a^+ \cap a^- = (a^+ \cup a^-) \setminus [(a^+ \setminus a^-) \cup (a^- \setminus a^+)]$ , ce qui détermine  $a^+ = (a^+ \setminus a^-) \cup (a^+ \cap a^-)$  et montre l'injectivité de  $\Phi$ , donc de  $\Psi$ . On a donc  $\mathcal{S}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})} = (\mathcal{P}(\mathbb{R}))^2$ .

**3.4.2 Symétrisé du dioïde des compacts convexes** On a vu en 0,5.2.8 que le dioïde des compacts convexes de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\text{conv}\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2)$ , n'est pas additivement résidué. On ne peut donc caractériser l'application  $\Psi$  en termes de résidu. Nous n'entreprendrons pas ici de caractériser le dioïde quotient par  $\Psi$ , mais indiquons simplement que l'on a la règle de simplification suivante:

**3.4.3 Proposition** Soit  $A = (A^+, A^-) \in (\text{conv}\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2))^2$ . On a

$$\text{int } A^+ \supset A^- \Rightarrow \Psi((A^+, A^-)) = \Psi((A^+, \varepsilon)) .$$

( $\text{int } B$  désigne l'intérieur de la partie  $B$ ).

**Preuve** Soit en effet  $(P, Q) \in \Psi(A)$ , avec  $P = (P^+, P^-)$ ,  $Q = (Q^+, Q^-)$ . Il suffit de montrer que  $\Phi(Q^+(A^+, A^-)) = \Phi(Q^+(A^+, \varepsilon))$  (décomposer  $Q$  en  $Q^+ \ominus Q^-$  et raisonner comme en 2.2.4). On a que  $P$  appartient à  $\Phi(Q^+(A^+, A^-))$  ssi  $P^+ \oplus Q^+ A^- = P^- \oplus Q^+ A^+$ , c'est-à-dire en passant aux fonctions support (cf. 0,1.0.11)

$$\max(\delta_{P^+}^*, \delta_{Q^+}^* + \delta_{A^-}^*) = \max(\delta_{P^-}^*, \delta_{Q^+}^* + \delta_{A^+}^*)$$

et comme  $\delta_{A^-}^* < \delta_{A^+}^*$ , cela équivaut à

$$\delta_{P^+}^* = \max(\delta_{P^-}^*, \delta_{Q^+}^* + \delta_{A^+}^*) ,$$

i.e.  $P \in \Phi(Q^+(A^+, \varepsilon))$ . ■

Dans le dioïde symétrisé de  $\text{conv}\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2)$ , on pourra donc écrire, par exemple,

$$B_2(0, 1) \ominus B_2(0, 2) = \ominus B_2(0, 2),$$

où  $B_2(a, r)$  désigne la boule de centre  $a$  et de rayon  $r$  pour la norme euclidienne (et donc  $B_2(0, 1) \subset \text{int}B_2(0, 2)$ ).

**3.4.4 Proposition** *Pour tout dioïde  $\mathcal{D}$  faiblement-archimédien tel que tout élément de  $\mathcal{D}$  soit somme finie d'éléments intègres, on a  $(\mathcal{S}_{\mathcal{D}})[X] \simeq \mathcal{S}_{(\mathcal{D}[X])}$ .*

**Preuve** On a l'isomorphisme:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^2[X] & \simeq & (\mathcal{D}[X])^2 \\ \bigoplus_i (P_i^+ \ominus P_i^-) X^i & \mapsto & \bigoplus_i P_i^+ X^i \ominus (\bigoplus_i P_i^- X^i) . \end{array}$$

Soient  $P = \bigoplus_i P_i X^i$ ,  $Q = \bigoplus_i Q_i X^i \in \mathcal{D}^2[X]$ . Il faut montrer l'équivalence des deux conditions suivantes:

- (i)  $\forall i, \Psi(P_i) = \Psi(Q_i)$  dans  $\mathcal{D}^2$ ,
- (ii)  $\Psi(P) = \Psi(Q)$  dans  $\mathcal{D}^2[X]$ .

Cela résulte du Corollaire 2.3.8 en passant au dioïde des fractions. Soit  $\mathcal{F}_1$  le dioïde des fractions de  $\mathcal{D}^2[X]$  et  $\mathcal{F}_2$  le dioïde des fractions de  $\mathcal{D}^2$ . Soient  $U, R \in \mathcal{F}_1$ . D'après l'exemple 2.3.5, on peut écrire  $U = \bigoplus_i U_i X^i$  et  $R = \bigoplus_i R_i X^i$  où  $U_i$  et  $R_i$  appartiennent à  $\mathcal{F}_2$ . D'après le Corollaire 2.3.8, il suffit de voir que  $\Phi(U) = \Phi(R)$  dans  $\mathcal{F}_1$ ssi pour tout  $i$ ,  $\Phi(U_i) = \Phi(R_i)$  dans  $\mathcal{F}_2$ . Comme  $V = \bigoplus_i V_i X^i \nabla U_i$ ssi pour tout  $i$ ,  $V_i \nabla U_i$ , le résultat est acquis. ■

**3.4.5 Dioïde symétrisé de  $\mathbb{N}_{\text{ppcm}}$**  Il est égal à  $\mathbb{N}_{\text{ppcm}}^2$ . Nous montrons que certaines règles de simplification sont compatibles avec la structure additive de  $(\mathbb{N}_{\text{ppcm}})^2$ , mais pas avec le produit. Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers. La décomposition d'un naturel non nul  $x$  en produit de nombres premiers:

$$x = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(x)}$$

se traduit par l'isomorphisme de demi-treillis:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ppcm}) & \longrightarrow & (\mathbb{N}^{(\mathcal{P})}, \max) \\ x & \longmapsto & \{v_p(x)\}_{p \in \mathcal{P}} , \end{array} \right. \quad (3.4.a)$$

où  $\mathbb{N}^{(\mathcal{P})}$  désigne l'ensemble des familles de naturels indicés par  $\mathcal{P}$  avec seulement nombre fini d'éléments non nuls. Posons pour  $x = (x^+, x^-) \in (\mathbb{N}_{\text{ppcm}})^2$ ,  $v_p(x) := (v_p(x^+), v_p(x^-))$ . On en déduit que  $\Phi(x) = \Phi(y)$ ssi:

$$\forall p \in \mathcal{P}, \quad \Phi(v_p(x)) = \Phi(v_p(y)) \text{ dans } (\mathbb{N}^2, \max) .$$

Autrement dit, on a une généralisation en “dimension infinie” de la règle (1.2.a) valable pour  $\mathbb{R}_{\max}$ , i.e.

$$\Phi(x) = \Phi(y) \Leftrightarrow \forall p \in \mathcal{P}, \quad \begin{aligned} & v_p(x) \neq v_p(x'), v_p(y) \neq v_p(y') \text{ et} \\ & \max(v_p(x^+), v_p(y^-)) = \max(v_p(x^-), v_p(y^+)), \\ & \text{ou } v_p(x) = v_p(y) . \end{aligned}$$

Par exemple, on a  $\Phi(2^3, 2) = \Phi(2^3, \varepsilon)$ . Cependant, l'application  $x \mapsto \Psi(x)$  est injective, d'où il résulte que  $\mathcal{S}_{\mathbb{N}_{\text{ppcm}}} = (\mathbb{N}_{\text{ppcm}})^2$ . Nous montrons seulement ici pourquoi, par exemple,  $\Psi(2^3, 2) \neq \Psi(2^3, \varepsilon)$ , laissant le cas général au lecteur. On a:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & (2^3 \ominus 2)(3) \nabla 2^3 \ominus 1, \\ \text{(ii)} \quad & 2^3 3 \nabla 2^3 \ominus 1 \end{aligned}$$

d'où  $(3, 4 \ominus 1) \in \Psi(2^3, 2), \notin \Psi(2^3, \varepsilon)$ . Les assertions (i) et (ii) se réécrivent en effet:

$$\begin{aligned} \text{ppcm}(2^3 \times 3, 1) &= \text{ppcm}(2^3, 2 \times 3), \\ \text{ppcm}(2^3 \times 3, 1) &\neq 2^3 . \end{aligned}$$

### 3.5 Domaine de transitivité de la relation d'équilibre

On a constaté en I,1.2.3 que la relation  $\nabla$  n'est jamais transitive dans un dioïde. Cependant, dans le dioïde symétrisé libre de  $\mathcal{D}$ , on a la propriété de "transitivité faible" déjà notée en I,1.3.1. Il s'agit ici de généraliser ces propriétés au dioïde symétrisé d'un dioïde. Nous définissons donc:

**3.5.1 Définition** *L'élément  $x \in \mathcal{S}$  est transitif si:*

$$\forall y, z \in \mathcal{S}, \quad y \nabla x \text{ et } x \nabla z \Rightarrow y \nabla z .$$

Nous caractérisons ci-après les éléments transitifs. A cet effet, nous introduisons l'application:

$$\mu(x) = x \boxminus \ominus x . \quad (3.5.a)$$

**3.5.2 Proposition** *On a  $\mu \preceq \text{Id}$  et  $\mu \circ \mu = \mu$ .*

**Preuve** On a par 0,5.2.5,(ii)  $\mu(x) = x \boxminus \ominus x \preceq x \boxminus \varepsilon = x$ . En outre,

$$\begin{aligned} \mu \circ \mu(x) &= (x \boxminus \ominus x) \boxminus \ominus (x \boxminus \ominus x) \\ &= (x \boxminus \ominus x) \boxminus (\ominus x \boxminus x) \quad (3.1.b) \\ &= x \boxminus (\ominus x \oplus (\ominus x \boxminus x)) \quad (0,5.2.5.(iv)) \\ &= x \boxminus \ominus x = \mu(x) \end{aligned}$$

car  $\ominus x \boxminus x \preceq \ominus x$ . ■

**3.5.3 Remarque**  $\mu$  n'est cependant pas une fermeture duale, car  $\mu$  n'est pas croissante (par exemple, dans  $\mathbb{R}_{\max}^2$ ,  $\mu(2, \varepsilon) = (2, \varepsilon)$  mais  $\mu(2, 2) = \varepsilon$ ).

**3.5.4 Proposition** *L'ensemble des éléments transitifs de  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  est l'image de l'ensemble des éléments transitifs de  $\mathcal{D}^2$  par la projection canonique.*

**Preuve** Résulte immédiatement de 2.2.14. ■

**3.5.5 Corollaire** *Les éléments signés sont transitifs.*

**Preuve** résulte de 3.5.4 et de I,1.3.1,(iv). ■

**3.5.6 Théorème** Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde inf-complet distributif. Pour tout  $x \in \mathcal{D}^2$ , les propositions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $|x| = |\mu(x)|$
- (ii)  $x^\bullet = \mu(x)^\bullet$
- (iii)  $\Phi(\mu(x)) = \Phi(x)$
- (iv)  $\Phi(x) = \bigcap_{y \in \Phi(x)} \Phi(y)$
- (v)  $\Phi(x) = \{\mu(x)\} \oplus \mathcal{D}^\bullet$
- (vi)  $x$  est transitif.

**Preuve** (i) $\Leftrightarrow$ (ii): résulte de I,1.4.2,(i) et (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): on a  $\Phi(x) = [\mu(x), x^\bullet] \oplus \mathcal{D}^\bullet$  et  $\Phi \circ \mu(x) = [\mu(x), \mu(x)^\bullet] \oplus \mathcal{D}^\bullet$  (par 3.5.2), d'où la conclusion.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): On a  $\mu(x) \preceq \mu(x) \oplus |x| \preceq \mu(x) \oplus x^\bullet = x^\bullet$ , et donc par 3.1.1,  $\mu(x) \oplus |x| \in \Phi(x) = \Phi(\mu(x))$ , donc  $\mu(x) \oplus |x| \preceq \mu(x)^\bullet$ , donc  $(\mu(x) \oplus |x|)^\bullet = \mu(x)^\bullet \oplus x^\bullet = x^\bullet \preceq (\mu(x)^\bullet)^\bullet = \mu(x)^\bullet$ , d'où (ii).

(iv) $\Leftrightarrow$ (vi): On a comme  $x \in \Phi(x)$ ,  $\Phi(x) \supset \bigcap_{y \in \Phi(x)} \Phi(y)$ . (iv) est donc équivalent à  $\Phi(x) \subset \bigcap_{y \in \Phi(x)} \Phi(y)$ , i.e. pour tout  $y \in \Phi(x)$ ,  $\Phi(x) \subset \Phi(y)$ , i.e.  $z \nabla x \Rightarrow z \nabla y$ .

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Il suffit de voir que  $\Phi(y) \supset \Phi(x)$  pour tout  $y \in \Phi(x)$ . Quitte à remplacer  $x$  par  $\mu(x)$ , on pourra supposer  $x = \mu(x)$ . D'après 3.1.1, on a une décomposition de la forme  $y = y' \oplus t^\bullet$ , avec  $y' \in [x, x^\bullet]$ . Par 2.2.5,  $\Phi(y' \oplus t^\bullet) \supset \Phi(y')$ . Il suffit donc de montrer  $\Phi(y') \supset \Phi(x)$ . On a en effet:  $x \preceq y' \preceq x^\bullet$ , donc  $\mu(y') = y' \boxminus \ominus y' \preceq x^\bullet \boxminus \ominus x = (x \ominus x) \boxminus \ominus x = (x \boxminus \ominus x) \oplus (\ominus x \boxminus \ominus x) \preceq x$ , et d'autre part  $y'^\bullet \succeq x^\bullet$ , soit  $[\mu(y'), y'^\bullet] \supset [x, x^\bullet]$ , et donc  $\Phi(y) \supset \Phi(x)$ .

(iv) $\Rightarrow$ (iii): On a  $\mu(x) \in \Phi(x)$ , donc par (iv),  $\Phi(x) \subset \Phi(\mu(x))$ . L'autre inclusion résulte de 3.1.1.

(v) $\Rightarrow$ (iii): Si  $\Phi(x) = \{\mu(x)\} \oplus \mathcal{D}^\bullet$ , on a  $\Phi(\mu(x)) \supset \{\mu(x)\} \oplus \mathcal{D}^\bullet = \Phi(x)$ . L'autre inclusion a été vue dans la preuve de (iv) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (v): Il suffit de voir  $\{\mu(x)\} \oplus \mathcal{D}^\bullet \supset \Phi(x)$ , l'autre inclusion étant triviale. Quitte à remplacer  $x$  par  $\mu(x)$ , on peut supposer  $x = \mu(x)$ . Soit  $y \in \Phi(x)$ . On a  $y \succeq \mu(x) = x$ , donc

$$y = (y \boxminus x) \oplus x \tag{3.5.b}$$

(via 0,5.2.5(x)). On a  $x \ominus y \succeq y$ , donc  $y \boxminus x \preceq \ominus y$ , donc  $\ominus(y \boxminus x) \preceq y$ , et en additionnant à (3.5.b),  $y = (y \boxminus x)^\bullet \oplus x$ . ■

**3.5.7 Interprétation** Lorsque  $x$  est transitif, il résulte du Théorème 3.1.1 et du point (iii) ci-dessus que  $\mu(x)$  est le plus petit élément dans la classe d'équivalence de  $x$  modulo  $\Phi$ . On peut le voir comme un représentant canonique de  $x$ . Par exemple, dans  $\mathbb{R}_{\max}^2$ , on a  $\mu((3, 2)) = (3, \varepsilon)$ .

**3.5.8 Exemple** Considérons le dioïde symétrisé libre de  $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \cup, +)$ . Soit  $x = (x^+, x^-)$ . On a  $|\mu(x)| = |x|$ ssi

$$(x^+ \setminus x^-) \cup (x^- \setminus x^+) = x^+ \cup x^- ,$$

où  $\setminus$  dénote la différence ensembliste. Cela entraîne que les éléments transitifs sont les  $x$  tels que  $x^+ \cap x^- = \emptyset$ .

### 3.6 Eléments substituables

**3.6.1 Définition** Soit  $\mathcal{S}$  un dioïde symétrisé. On dit qu'un élément  $x$  est substituable s'il vérifie la propriété suivante:

$$\forall y, c, d \in \mathcal{S}, \left\{ \begin{array}{l} x \nabla y \\ cx \nabla d \end{array} \right. \implies cy \nabla d . \quad (3.6.a)$$

On notera  $\mathcal{S}^\vee$  l'ensemble des éléments substituables de  $\mathcal{S}$ .

En prenant  $c = e$  dans (3.6.a), on constate qu'un élément substituable est transitif. Comme en 3.5.4, les éléments substituables de  $\mathcal{S}_D$  sont les images des éléments substituables de  $D^2$  par la projection canonique, et donc, via I.1.3.1(iii), les éléments signés sont substituables. Avant de caractériser les éléments substituables de  $D^2$ , nous énonçons un lemme technique:

**3.6.2 Lemme** On a pour tous  $x, q \in D^2$ ,

$$\mu(q\mu(x)) \succeq \mu(qx) .$$

#### Preuve

$$\begin{aligned} \mu(q\mu(x)) &= q\mu(x) \boxminus \ominus q\mu(x) = q(x \boxminus \ominus x) \boxminus \ominus q(x \boxminus \ominus x) \\ &\succeq (qx \boxminus \ominus qx) \boxminus \ominus q(x \boxminus \ominus x) \quad (\text{via 0.5.2.5,(vii)}) \\ &\succeq (qx \boxminus \ominus qx) \boxminus \ominus qx \\ &= qx \boxminus (\ominus qx \oplus \ominus qx) \quad (\text{via 0.5.2.5,(iv)}) \\ &= \mu(qx) . \end{aligned}$$

**3.6.3 Contre exemple** L'inégalité peut être stricte dans (3.6.2). En effet, dans le dioïde symétrisé libre de  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ , on a en prenant  $q = (+\infty, \varepsilon)$  et  $x = (2, 1)$ ,  $\mu(qx) = (+\infty, +\infty) \boxminus (+\infty, +\infty) = \varepsilon$  alors que  $\mu(q\mu(x)) = \mu((+\infty, \varepsilon).(2, \varepsilon)) = \mu((+\infty, \varepsilon)) = (+\infty, \varepsilon)$ .

**3.6.4 Corollaire** On a pour tous  $x, q \in D^2$ ,  $\Psi(\mu(x)) \subset \Psi(x)$ .

**Preuve** Résulte immédiatement de 3.6.2 et de la formule (2.2.b). ■

**3.6.5 Proposition** Soit  $D$  un dioïde inf-complet infiniment distributif. Dans le dioïde  $D^2$ , les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i)  $\forall q \in D^2$ ,  $\mu(qx) = \mu(q\mu(x))$  et  $\mu(x)^\bullet = x^\bullet$
- (ii)  $\Psi(\mu(x)) = \Psi(x)$
- (iii)  $\Psi(x) = \bigcap_{y \in \Phi(x)} \Psi(y)$
- (iv)  $x$  est substituable.

**Preuve** (iv) $\Leftrightarrow$ (iii): La propriété (iii) est équivalente à  $\Psi(y) \supset \Psi(x)$ , pour tout  $y \in \Phi(x)$ , i.e.  $p \nabla qx \Rightarrow p \nabla qy$ , i.e.  $x$  substituable.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): une inclusion de (ii) résulte de 3.6.4. La propriété (iii) entraîne que  $\Psi(\mu(x)) \supset \Psi(x)$  car  $\mu(x) \in \Phi(x)$ , ce qui est l'autre inclusion.

(ii) $\Rightarrow$ (i): par 3.1.1, on a pour tout  $q$ ,  $\mu(qx) = \bigwedge \Phi(qx) = \bigwedge \Phi(q\mu(x)) = \mu(q\mu(x))$ . D'autre part,  $\Phi(x) = \Phi(\mu(x))$ , donc  $x^\bullet = \mu(x)^\bullet$  (cf. 3.5.6).

(i) $\Rightarrow$ (iii): Soit  $y \in \Phi(x)$ . On a par 3.1.1 une décomposition de la forme  $y = y' \oplus t^\bullet$ , avec

$$y' \in [\mu(x), x^\bullet] \quad (3.6.b)$$

et comme par 2.2.5,  $\Psi(y) \supseteq \Psi(y')$ , il suffit de montrer  $\Psi(y') \supseteq \Psi(x)$  pour avoir (iii). Ici encore, quitte à remplacer  $x$  par  $\mu(x)$ , on supposera  $x = \mu(x)$ . Via la formule (2.2.b) et la proposition 3.1.1, il suffit de voir que pour tout  $q \in \mathcal{D}^2$ , on a

$$[\mu(qy'), (qy')^\bullet] \supseteq [\mu(qx), (qx)^\bullet]. \quad (3.6.c)$$

Par (3.6.b), on a  $y' \succeq \mu(x)$ , donc  $(qy')^\bullet = q(y')^\bullet \succeq q\mu(x)^\bullet = (qx)^\bullet$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} \mu(qy') &= qy' \boxminus \ominus qy' \preceq qx^\bullet \boxminus \ominus qx \\ &\preceq (qx \oplus \ominus qx) \boxminus \ominus qx \\ &\preceq qx \boxminus \ominus qx \quad (\text{via 0, 5.2.5.(v)}) \\ &= \mu(qx), \end{aligned}$$

ce qui montre l'inclusion (3.6.c). ■

**3.6.6 Corollaire** *Si tout élément est somme finie d'éléments inversibles, alors les éléments substituables de  $\mathcal{D}^2$  sont exactement les éléments transitifs.*

**Preuve** Trivialement, substituable entraîne transitif. Supposons  $x$  transitif,  $x \nabla b$ ,  $cx \nabla d$ , où  $c = c_1 \oplus c_2$  est somme de deux éléments inversibles (le cas  $n$  s'en déduisant). Par transitivité faible,  $b \nabla x \nabla c_1^{-1}(d \ominus c_2 x)$  entraîne  $b \nabla c_1^{-1}(d \ominus c_2 x)$ . En réitérant avec  $c_2^{-1}(d \ominus c_1 b) \nabla x \nabla b$ , on obtient le résultat. ■

**3.6.7 Contre exemple** Les éléments transitifs ne sont pas toujours substituables. Dans le dioïde symétrisé libre de  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ , on a en effet

$$\begin{cases} (\varepsilon, 2) \nabla (+\infty, \varepsilon)(2, 1) & \text{et } (\varepsilon, 2) \nabla (+\infty, \varepsilon)(2, \varepsilon) = (+\infty, \varepsilon), \\ (2, 1) \nabla (2, \varepsilon) & \end{cases}$$

ce qui montre que  $(2, 1)$  n'est pas substituable, quoique  $(2, 1)$  vérifie  $\mu(2, 1) = (2, \varepsilon)$  et soit donc transitif (cf. 3.5.6.(i)).

**3.6.8 Contre exemple** On ne peut relaxer 3.6.6: il est faux que si tout élément est somme finie d'éléments intègres, alors transitif=substituable. Dans le dioïde symétrisé de  $\mathbf{N}_{\text{PPCM}}$ ,  $2^3 \ominus 2$  est transitif (cela résulte par exemple de l'identification à  $\mathbf{N}_{\max}^{(\mathcal{P})}$ , cf. (3.4.a)). Cependant,  $2^3 \ominus 2$  n'est pas substituable:

$$\begin{cases} (2^3 \ominus 2) \nabla 2^3 \\ 3 \times (2^3 \ominus 2) \nabla 2^3, \end{cases} \quad \text{mais } 3 \times 2^3 \not\nabla 2^3.$$

**3.6.9 Proposition** *Pour tout  $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ , on a*

$$x = \mu(x) \oplus (x \boxminus \mu(x))^\bullet.$$

**Preuve** Comme  $\mu(x) \preceq x$  il résulte de 0.5.2.5,(x), que  $x = \mu(x) \oplus (x \boxminus \mu(x))$ . En outre,  $\ominus(x \boxminus \mu(x)) = \ominus x \boxminus (\ominus x \boxminus x) \preceq x$  (par 0.5.2.5,(viii)), et donc  $x = \mu(x) \oplus (x \boxminus \mu(x)) \ominus (x \boxminus \mu(x)) = \mu(x) \oplus (x \boxminus \mu(x))^\bullet$ .

■

Comme  $\mu(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^\vee$ , la Proposition 3.6.9 donne la décomposition:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}} = \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^\vee \oplus \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^\bullet . \quad (3.6.d)$$

**3.6.10 Proposition (Trivialisation des équilibres)** *On a dans le dioïde symétrisé de  $\mathcal{D}$  la propriété suivante:*

$$a, b \text{ substituables et } a \nabla b \implies a = b .$$

**Preuve** Prenons deux représentants de  $a$  et  $b$ ,  $a_0$  et  $b_0 \in \mathcal{D}^2$ , substituables, tels que  $a_0 \nabla b_0$ . De  $(p, q) \in \Psi(a_0)$ , i.e.  $p \nabla qa_0$ , on déduit en substituant  $b_0$  que  $p \nabla qb_0$ , ce qui montre que  $\Psi(a_0) \subset \Psi(b_0)$ . L'autre inclusion s'obtient de même, et l'on conclut que  $a_0$  et  $b_0$  représentent le même élément modulo  $\Psi$ , i.e.  $a = b$ . ■

**3.6.11 Proposition** *Tout élément inversible de  $\mathcal{D}^2$  est substituable.*

**Preuve** Si  $x \nabla y$  et  $cx \nabla z$  avec  $x$  inversible, on a  $e \nabla x^{-1}y, cx.e \nabla z$ , et en observant que  $e$  est toujours substituable (il vérifie le critère 3.6.5,(i)),  $cx.x^{-1}y = cy \nabla z$ . ■

**3.6.12 Lemme (Substitution vectorielle)** *Soit  $x$  un vecteur de taille  $n$  dont les coefficients sont substituables. On a pour tous vecteur  $b$  et matrice  $C$  de tailles compatibles:*

$$x \nabla b, \quad Cx \nabla d \Rightarrow Cb \nabla d .$$

**Preuve** vérifions le pour la  $i$ -ième composante. On a  $(Cx)_i = \bigoplus_{k=1}^n C_{ik}x_k \nabla d_i$ . La proposition résulte d'une application répétée du lemme de substitution scalaire à cette équation. ■

**3.6.13 Exemple (Éléments substituables dans  $\mathbb{S}_{\max}$ )** Dans le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}^2$ , les éléments transitifs (donc par 3.6.6 substituables) sont les éléments de la forme  $(a^+, a^-)$  avec  $a^+ \neq a^-$ . On a en effet  $\mu((a^+, a^-)) = (a^+, \varepsilon)$  si  $a^+ > a^-$ ,  $(\varepsilon, a^-)$  si  $a^- > a^+$  et  $\varepsilon$  si  $a^+ = a^-$ . On constate que le critère 3.5.6,(ii) est vérifié dans les deux premiers cas, et pas dans le dernier. Ainsi, par 3.5.4, les éléments substituables de  $\mathbb{S}_{\max}$  sont précisément les éléments signés, i.e.  $\mathbb{S}_{\max}^\vee = \mathbb{S}_{\max}^{\oplus\ominus}$ .

**3.6.14 Exemple (Polynômes substituables)** Dans le dioïde symétrisé de  $\mathbb{R}_{\max}[X]$ , substituable=transitif (i.e les éléments substituables sont les polynômes dont aucun coefficient n'est pointé,  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_{\max}[X]}^\vee = \mathbb{S}_{\max}^\vee[X]$ ). On a en effet montré les assertions suivantes:

- (i)  $x$  transitifssi  $\Phi(\mu(x)) = \Phi(x)$  (cf. 3.5.6).
- (ii)  $x$  substituablessi  $\Psi(\mu(x)) = \Psi(x)$  (cf. 3.6.5).
- (iii)  $\Psi(x) = \Psi(y)$  dans  $(\mathbb{R}_{\max}[X])^2$ ssi  $\Phi(x) = \Phi(y)$  dans le dioïde des fractions de  $\mathbb{R}_{\max}[X]$  (cf. 2.3.7).

Il suffit donc de voir que (a):  $\Phi(x) = \Phi(y)$  dans  $\mathcal{F}_{(\mathbb{R}_{\max}[X])^2}$ ssi (b):  $\Phi(x) = \Phi(y)$  dans  $(\mathbb{R}_{\max}[X])^2$ . Le sens (a)  $\Rightarrow$  (b) s'obtient par restriction. Supposons (b). Soit  $z \in \mathcal{F}^2$ . On peut écrire  $z = X^{-k}w$ , avec  $w \in (\mathbb{R}_{\max}[X])^2$ . On a  $z \nabla x$ ssi  $w \nabla X^kx$ , et comme d'après (b),  $\Phi(X^kx) = \Phi(X^ky)$  (cf. par exemple le point (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) de la preuve de la Proposition 3.4.4), on a  $w \nabla X^ky$ , d'où la conclusion.

### 3.7 Elimination

On dira que  $x$  est éliminable si

$$\left\{ \begin{array}{l} ax \nabla b \\ cx \nabla d \end{array} \right. \Rightarrow ad \nabla bc .$$

L'éliminabilité entraîne clairement la substituabilité.

**3.7.1 Proposition** *Dans  $\mathbb{S}_{\max}$ , les éléments éliminables sont les éléments signés.*

**Preuve** Si  $a$  ou  $c$  sont non équilibrés, par exemple  $a$ , la première équation est équivalente à  $x \nabla a^{-1}b$ , et l'on s'est ramené à la propriété de substitution 3.6.1. Si  $a$  et  $c$  sont tous deux équilibrés, on a  $ad \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet$  et  $cb \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet$ , et la condition  $ad \nabla bc$  est remplie. Réciproquement, un élément éliminable est transitif, donc signé. ■

L'éliminabilité est un fait plus rare que la substituabilité, pour lequel nous n'avons pas de caractérisation générale.

**3.7.2 Contre exemple** L'éliminabilité ne “passe pas” aux polynômes. On a par exemple:

$$\left\{ \begin{array}{l} (e \ominus X)(e \oplus X) \nabla e \ominus X^2 \\ e^\bullet(e \oplus X) \nabla e \end{array} \right. \text{ mais } (e \ominus X)e \not\nabla e^\bullet(e \ominus X^2) .$$

Les coefficients de  $e \oplus X$  sont éliminables dans  $\mathbb{S}_{\max}$ , mais  $e \oplus X$  ne l'est pas dans  $\mathbb{S}_{\max}[X]$ .

## Chapitre III

# Systèmes d'équilibres linéaires

Nous étudions dans ce chapitre les systèmes d'équilibres linéaires. On travaillera essentiellement dans le dioïde  $\mathbb{S}_{\max}$  (symétrisé de  $\mathbb{R}_{\max}$ ). Cette étude repose sur les trois approches suivantes.

a/ Point de vue géométrique. On étudie les questions d'orthogonalité dans  $\mathbb{S}_{\max}^n$ , ou de manière équivalente, les systèmes homogènes  $Ax \nabla \varepsilon$ . Le résultat central est que l'orthogonal d'un sous-moduloïde de type fini de  $\mathbb{S}_{\max}^n$  est un sous-moduloïde de type fini (effectivement calculable). En outre, l'orthogonal d'un sous-moduloïde de type fini de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  caractérise complètement ce moduloïde, ce qui autorise l'emploi de résultats de dualité pour l'étude des sous-moduloïdes de type fini de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ . De manière précise, on peut associer à un sous-moduloïde  $M$  de type fini de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  l'ensemble  $M^\perp$  des équations  $\phi(x) = \psi(x)$  vérifiées pour tout  $x$  appartenant à  $M$  ( $\phi$  et  $\psi$  étant des formes linéaires sur  $\mathbb{R}_{\max}^n$ ). Les résultats d'orthogonalité qui précédent affirment que les équations de cette forme vérifiées par  $M$  admettent une famille génératrice finie, et caractérisent  $M$ . On cherche ensuite des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de solutions de systèmes d'équilibres homogènes et non homogènes. On obtient alors des conditions simples et purement structurelles.

b/ Point de vue Cramerien. Si l'on se restreint à la recherche de solutions *signées* de systèmes d'équilibres linéaires homogènes et non homogènes, on trouve par des techniques d'élimination des conditions *nécessaires* précisément analogues aux conditions de Cramer pour des systèmes carrés. On montre que les systèmes rectangulaires vérifient de nouvelles conditions de compatibilité (qui sont impliquées par les conditions de compatibilité usuelles dans un corps, mais pas dans un dioïde). On montrera qu'en général, les conditions nécessaires obtenues en éliminant ne sont pas suffisantes.

c/ Point de vue combinatoire. Pour des systèmes *carrés* non homogènes, on montre que la non nullité du déterminant entraîne l'existence d'une solution signée. Une première démonstration est fondée sur un avatar des algorithmes itératifs classiques (Jacobi, Gauss-Seidel). Une seconde démonstration repose sur le Théorème de Frobenius-König. On étudie ensuite les systèmes homogènes carrés. On montre que l'équilibre du déterminant entraîne l'existence d'une solution signée, ce qui généralise un résultat de Gondran et Minoux [47] dont nous reprenons partiellement les techniques.

L'idée d'introduire un signe moins formel dans les dioïdes pour résoudre les systèmes d'équations est due à J.P. Quadrat. La partie sur la condition nécessaire de Cramer pour les systèmes carrés ( $Ax \nabla b$  entraîne  $\det A \cdot x \nabla A^{\text{adj}}b$ ) est commune avec Max Plus [79, 80]. En particulier, le lemme d'élimination (pour  $x$  signé,  $ax \nabla b$  et  $cx \nabla d$  entraîne  $ad \nabla bc$ ), est du à M. Akian. L'idée d'adapter les algorithmes itératifs est due à M. Akian et R. Nikoukhah.

# 1 Dualité

## 1.1 Orthogonalité dans $\mathbb{S}_{\max}^n$

Dans  $\mathbb{S}_{\max}^n$ , on définit le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  comme à l'accoutumée:

$$x \cdot y = \bigoplus_{i=1}^n x_i y_i .$$

La propriété familière

$$(Au) \cdot (Bv) = (B^T Au) \cdot v \quad (1.1.a)$$

est encore valide. Etant donnée une partie  $P \subset \mathbb{S}_{\max}^n$ , on définit l'*orthogonal* de  $P$ :

$$P^\perp = \{v \in \mathbb{S}_{\max}^n \mid \forall u \in P, v \cdot u \nabla \varepsilon\} .$$

$P^\perp$  est clairement un sous-moduloïde de  $\mathbb{S}_{\max}^n$ . On a les propriétés suivantes.

### 1.1.1 Propriétés

- (i)  $P \mapsto P^\perp$  est décroissante
- (ii)  $(P^\perp)^\perp \supset P$
- (iii)  $((P^\perp)^\perp)^\perp = P^\perp$
- (iv)  $(\text{vect}\langle P \rangle \oplus (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^n)^\perp = P^\perp$
- (v)  $(P \cup Q)^\perp = P^\perp \cap Q^\perp$
- (vi) pour des sous-moduloïdes de  $\mathbb{S}_{\max}^n$ ,  $(V \oplus W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$ .

Les propriétés (i) et (ii) expriment que  $P \mapsto P^\perp$  est une correspondance de Galois (cf. 0.5.1.9). L'involutivité (iii) est générale pour les correspondances de Galois (cf. 0.5.1.8,(i)). Les autres propriétés sont immédiates. ■

Nous considérons d'abord le cas où  $P = \{v\}$  est réduit à un singleton.

### 1.1.2 Proposition

Soit  $v \in \mathbb{S}_{\max}^n$ . Le moduloïde  $v^\perp$  est de type fini.

Il résulte de (1.1.a) que pour toute matrice  $D$  diagonale à coefficients diagonaux dans  $\mathbb{S}_{\max}^\vee \setminus \{\varepsilon\}$ , et pour toute matrice de permutation  $P$ , l'on peut écrire:

$$u \cdot v \nabla \varepsilon \Leftrightarrow (D^{-1}Pu) \cdot (DPv) \nabla \varepsilon . \quad (1.1.b)$$

On pourra ainsi supposer quitte à normaliser et à réordonner les indices que

$$v = [\underbrace{e, \dots, e}_p \text{ fois}, \underbrace{e^\bullet, \dots, e^\bullet}_q \text{ fois}, \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{n-q-p \text{ fois}}] . \quad (1.1.c)$$

On notera  $e_1, \dots, e_n$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{S}_{\max}^n$ . On a le résultat plus précis suivant:

### 1.1.3 Lemme

La famille  $\mathcal{F}$  formée des vecteurs suivants est une base faible de  $v^\perp$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_i \ominus e_j, i < j \leq p, \\ e_i, i \geq p+1, \\ e_i \oplus e_j, i \leq p, p+1 \leq j \leq p+q, \\ e_i \ominus e_j, i \leq p, p+1 \leq j \leq p+q, \\ e_i^\bullet, i \leq p . \end{array} \right. \quad (1.1.d)$$

**Preuve** du Lemme. Quitte à diviser  $u$  par  $\bigoplus_i |u_i|$ , on prendra  $\bigoplus_i |u_i| = e$ .

Cas 1 Il existe  $i, p+1 \leq i \leq p+q$ , tel que  $|u_i| = e$ . On peut écrire:

$$u = u_i e_i \oplus \bigoplus_{k \neq i, k \leq p} u_k (e_k \oplus e_i) \oplus \bigoplus_{k \geq p+1, k \neq i} u_k e_k ,$$

ce qui montre que  $u \in \text{vect}(\mathcal{F})$ .

Cas 2 Il existe  $i, i \leq p$ , tel que  $u_i = e^\bullet$ . On peut écrire:

$$u = u_i e_i^\bullet \oplus \bigoplus_{k \leq p} u_k (e_k \ominus e_i) \oplus \bigoplus_{k \geq p+1} u_k e_k .$$

En effet, il est clair que le second membre est supérieur ou égal à  $u$ . L'autre inégalité vient de ce que  $|u_k| \preceq e$ , et donc  $u_k e_i \preceq u_i e_i^\bullet = e_i^\bullet$ .

Cas 3 Aucun  $u_i$ , pour  $1 \leq i \leq p$  n'est égal à  $e^\bullet$ , et il existe  $i$  et  $j \leq p$  tels que  $|u_i| = |u_j| = e$  et  $u_i = \ominus u_j$ , par exemple  $u_i = e$  et  $u_j = \ominus e$ . Pour  $k \leq p$  et  $k \neq i, j$ , on a  $u_k \preceq e$  ou  $u_k \preceq \ominus e$ . Posons  $w_k = u_k (e_k \ominus e_i)$  si  $u_k \preceq \ominus e$  et  $w_k = u_k (e_k \ominus e_j)$  si  $u_k \preceq e$ . On a clairement  $w_k \preceq u$ . On vérifie que:

$$u = u_i (e_i \ominus e_j) \oplus \bigoplus_{k \geq p+1} u_k e_k \oplus \bigoplus_{k \leq p, k \neq i, j} w_k \in \text{vect}(\mathcal{F})$$

On a montré dans tous les cas que  $\mathcal{F}$  est une famille génératrice de  $v^\perp$ . On vérifie de manière élémentaire qu'aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres, ce qui montre que  $\mathcal{F}$  est non redondante. ■

#### 1.1.4 Théorème L'orthogonal d'un moduloïde type fini $V \subset \mathbb{S}_{\max}^n$ est un moduloïde type fini.

**Preuve** Par induction sur le cardinal d'une famille génératrice de  $V$ . Supposons  $V = W \oplus \mathbb{S}_{\max} v$ , et  $W^\perp$  sous-moduloïde de type fini, soit  $W^\perp = \text{vect}\langle w_1, \dots, w_k \rangle$ . Les assertions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{aligned} & x \in (W \oplus \mathbb{S}_{\max} v)^\perp \\ & x \in W^\perp \cap v^\perp \\ & \exists y \in \mathbb{S}_{\max}^k, x = \bigoplus_{i=1}^k y_i w_i \text{ et } v \cdot x \nabla \varepsilon \\ & \exists y \in \mathbb{S}_{\max}^k, x = \bigoplus_{i=1}^k y_i w_i \text{ et } (\bigoplus_i v_i w_i) \cdot y \nabla \varepsilon \end{aligned}$$

Notons  $\mathcal{W}$  l'application linéaire  $\mathbb{S}_{\max}^k \rightarrow \mathbb{S}_{\max}^n$ ,  $e_i \mapsto w_i$ . D'après ce qui précède, on a  $(W \oplus \mathbb{S}_{\max} v)^\perp = \mathcal{W}(\bigoplus v_i w_i)^\perp$ . La Proposition 1.1.2 affirme que  $(\bigoplus v_i w_i)^\perp$  est un moduloïde type fini, et donc,  $V^\perp$ , image de  $(\bigoplus v_i w_i)^\perp$  par  $\mathcal{W}$ , est également de type fini. ■

**1.1.5 Exemple** La preuve ci-dessus est effective. Calculons l'orthogonal du moduloïde suivant:

$$V = \text{vect}\langle v_1, v_2 \rangle \text{ où } v_1 = \begin{bmatrix} e \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ e \end{bmatrix} .$$

On a d'après (1.1.d):

$$\begin{bmatrix} e \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix}^\perp = \text{vect}\left\langle \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ \ominus e \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^\bullet \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e^\bullet \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right\rangle .$$

On cherche donc  $x \in V^\perp$  sous la forme:

$$x = My = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & e^\bullet & \varepsilon \\ \varepsilon & \ominus e & \varepsilon & e^\bullet \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}. \quad (1.1.e)$$

L'équation  $v_2.x \nabla \varepsilon$  se réécrit:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & e & e^\bullet & \varepsilon \\ \varepsilon & \ominus e & \varepsilon & e^\bullet \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \ominus e & \varepsilon & e^\bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \nabla \varepsilon.$$

On a donc, en notant  $\text{vect}\langle A \rangle$  le moduloïde des colonnes d'une matrice  $A$ , et en appliquant à nouveau la formule (1.1.d):

$$y \in \text{vect}\left(\begin{bmatrix} e & e & e & e & e & e & e & e^\bullet & \varepsilon \\ e & e & e & e & e & e & e & e^\bullet & e^\bullet \\ \varepsilon & e & e & e & e & e & e & e & \varepsilon \\ \varepsilon & e & e & e & \ominus e & e & \ominus e & e & \varepsilon \end{bmatrix}\right) = \text{vect}\langle N \rangle$$

et en reportant dans (1.1.e),  $x \in \text{vect}\langle MN \rangle$ , soit après suppression des vecteurs redondants:

$$x \in \text{vect}\left(\begin{bmatrix} e & e & e & e^\bullet & \varepsilon & \varepsilon \\ \ominus e & e^\bullet & e^\bullet & \varepsilon & e^\bullet & \varepsilon \\ e & e & \varepsilon & \varepsilon & e & e^\bullet \end{bmatrix}\right) = V^\perp. \quad (1.1.f)$$

De manière équivalente, on peut affirmer que les éléments de  $V$  satisfont les trois équilibres suivants:

$$x \oplus z \nabla y, \quad y \oplus z \nabla y, \quad x \oplus y \nabla y$$

(on a ignoré les équilibres triviaux associés aux trois derniers vecteurs de (1.1.f)).

**1.1.6 Proposition** Soit  $w \in \mathbb{S}_{\max}^n$ . On a  $(w^\perp)^\perp = \mathbb{S}_{\max}w \oplus (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^n$ .

**Preuve** La Propriété 1.1.1.(iv) donne

$$(w^\perp)^\perp \supset \mathbb{S}_{\max}w \oplus (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^n. \quad (1.1.g)$$

Réiproquement, prenons  $w$  sous la forme canonique (1.1.c). On peut supposer  $n = p+q$ . Supposons  $\alpha \notin \mathbb{S}_{\max}w \oplus (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^n$ , et posons  $\lambda = w \setminus \alpha$  (bien défini dans le dioïde complété de  $\mathbb{S}_{\max}$ ). On ne peut avoir  $\alpha = \lambda w \oplus \mu(\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^n$ . Comme trivialement,  $\alpha \succeq (w \setminus \alpha)w$ , on a une composante non équilibrée de  $\alpha$ ,  $\alpha_i$ , telle que:

$$\alpha_i \succ \lambda w_i, \quad (1.1.h)$$

avec

$$\lambda = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \wedge (\alpha_{p+1}/e^\bullet) \wedge \dots \wedge (\alpha_n/e^\bullet).$$

Quitte à multiplier  $\alpha$  par un scalaire inversible, on pourra supposer  $\alpha_i = e$ . L'inégalité stricte (1.1.h) n'est possible que dans les cas suivants.

1/ On a  $|\alpha_k| \prec e$  pour un certain  $k$ . Le vecteur  $f$  dont les seules composantes non nulles sont  $f_i = e$  et  $f_k = \ominus e$  est dans l'orthogonal de  $w$  mais pas de  $\alpha$ .

2/ Pour tout  $k$ ,  $|\alpha_k| \succeq e$ , et a/ on a  $\alpha_q \in \mathbb{S}_{\max}^\vee$  avec  $q \geq p+1$ . Le vecteur  $f$  dont la seule composante non nulle est  $f_q = e$  est dans l'orthogonal de  $w$  mais pas de  $\alpha$ .

2/ b/. On a  $\alpha_q = \ominus \alpha_r = e$  avec  $q, r \leq p$ . On conclut de manière analogue.

On a montré  $\alpha \notin \mathbb{S}_{\max} w \oplus (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^n \Rightarrow \alpha \notin (w^\perp)^\perp$ , ce qui montre l'inclusion réciproque de (1.1.g)

■

Le contre exemple suivant montre que la propriété 1.1.6 ne s'étend pas aux sous-moduloïdes de "dimension" plus grande.

**1.1.7 Contre exemple** Soient  $v_1$  et  $v_2$  comme en 1.1.5. Après quelques calculs, on observe les faits suivants.

$$v_1^\perp = \text{vect}\left\langle \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ \ominus e \\ \varepsilon \end{bmatrix} \right\rangle \oplus (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^3, \quad v_2^\perp = \text{vect}\left\langle \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \ominus e \end{bmatrix} \right\rangle \oplus (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^3.$$

$$(v_1^\perp \oplus v_2^\perp)^\perp = \mathbb{S}_{\max} \begin{bmatrix} e^\bullet \\ e \\ e^\bullet \end{bmatrix} \oplus (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^3.$$

Par application immédiate de (1.1.d), on obtient:

$$((v_1^\perp \oplus v_2^\perp)^\perp)^\perp = \text{vect}\left\langle \begin{bmatrix} e & \varepsilon & e & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \ominus e & e & e & e^\bullet \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \ominus e & e & \varepsilon \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Posons  $F_1 = v_1^\perp$  et  $F_2 = v_2^\perp$ . On a montré:

$$(F_1 \oplus F_2)^{\perp\perp} \supsetneq F_1 \oplus F_2.$$

Ce contre exemple entraîne en outre que

$$(G_1 \cap G_2)^\perp \supsetneq G_1^\perp \oplus G_2^\perp, \quad (1.1.i)$$

où  $G_1 = \text{vect}\langle v_1 \rangle \oplus (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^3$  et  $G_2 = \text{vect}\langle v_2 \rangle \oplus (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^3$ . En effet, comme  $G_1$  et  $G_2$  sont (aux termes triviaux près) de dimension 1, il résulte de la Proposition 1.1.6 que  $G_1 = (G_1^\perp)^\perp$  et de même pour  $G_2$ . On peut alors écrire, d'après la Propriété 1.1.1,

$$(G_1 \cap G_2)^\perp = ((G_1^\perp)^\perp \cap (G_2^\perp)^\perp) = ((G_1^\perp \oplus G_2^\perp)^\perp)^\perp = ((F_1 \oplus F_2)^\perp)^\perp \supsetneq F_1 \oplus F_2 = G_1^\perp \oplus G_2^\perp.$$

Il résulte de ce qui précède que la correspondance  $V \mapsto V^\perp$  n'est pas injective, même en faisant abstraction du sous-moduloïde trivial  $(\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^n$ . On a cependant des résultats plus simples en se restreignant au dioïde  $\mathbb{R}_{\max}^n$  comme il suit.

## 1.2 Dualité $\mathbb{R}_{\max}^n \leftrightarrow \mathbb{S}_{\max}^n$

Considérons la correspondance suivante:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\max}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{S}_{\max}^n \\ V & \mapsto & V^\perp = \{u \in \mathbb{S}_{\max}^n \mid \forall v \in V, u.v \nabla \varepsilon\} \\ W^\top = \{u \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid \forall w \in W, u.w \nabla \varepsilon\} & \leftarrow & W \end{array} \quad (1.2.a)$$

Cette correspondance s'interprète de manière bien simple. Soit  $M$  un sous-moduloïde de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ , et  $v \in M^\perp$ . On peut écrire  $v \in \mathbb{S}_{\max}^n$  comme différence:

$$v = v_1 \ominus v_2, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}_{\max}^n.$$

Pour  $x \in M$  (et donc  $x$  positif), l'équilibre  $vx \nabla \varepsilon$  se trivialise en

$$v_1 x = v_2 x. \quad (1.2.b)$$

Autrement dit, on associe au moduloïde  $M$  l'ensemble  $M^\perp$  des équations de type (1.2.b) qu'il satisfait.

**1.2.1 Exemple** On vérifie de manière élémentaire que le sous-moduloïde de  $\mathbb{R}_{\max}^2$ :

$$M = \text{vect}\left(\begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

est caractérisé par les équations:

$$3x \oplus y = 3x, \quad 1x \oplus y = y,$$

ou de manière équivalente

$$3x \succeq y \succeq 1x.$$

**1.2.2 Théorème (i):** *Les deux applications (1.2.a) établissent une correspondance de Galois entre les sous-moduloïdes de type fini de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  et les sous-moduloïdes de type fini de  $\mathbb{S}_{\max}^n$ . En outre, (ii): l'application  $\mathbb{R}_{\max}^n \rightarrow \mathbb{S}_{\max}^n, V \mapsto V^\perp$  est injective.*

**Preuve** (i): On a déjà montré en 1.1.4 que  $V^\perp$  était un moduloïde de type fini. Réciproquement, on à l'analogue<sup>1</sup> du Lemme 1.1.3:

**1.2.3 Lemme** Soit

$$w = [\underbrace{e, \dots, e}_p \text{ fois}, \underbrace{\ominus e, \dots, \ominus e}_r \text{ fois}, \underbrace{e^\bullet, \dots, e^\bullet}_q \text{ fois}, \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{n-q-p-r \text{ fois}}] \in \mathbb{S}_{\max}^n \quad (1.2.c)$$

La famille  $\mathcal{F}$  formée des vecteurs suivants est une base faible de  $w^\top$ :

$$\begin{aligned} & e_i \oplus e_j, i \leq p, p+1 \leq j \leq p+r \\ & e_i, i \geq p+r+1, \\ & e_i \ominus e_j, i \leq p+r, p+r+1 \leq j \leq p+q. \end{aligned} \quad (1.2.d)$$

Le Lemme se prouve de manière analogue au Lemme 1.1.3, et la récurrence donnée dans la preuve de 1.1.4 donne une famille génératrice finie de  $w^\top$ . Cela achève la preuve de (i).

**Preuve** de (ii). Le lemme suivant est la clé du résultat.

**1.2.4 Lemme (de séparation)** Soit  $V$  un sous-moduloïde de type fini de  $(\mathbb{R}_{\max})^n$  et  $w \notin V$ . Il existe un vecteur  $p \in (\mathbb{S}_{\max})^n$  tel que

$$p.w \not\nabla \varepsilon, \quad \forall v \in V, \quad p.v \nabla \varepsilon.$$

---

<sup>1</sup>la forme du vecteur  $w$  est justifiée par le fait que dans la normalisation (1.1.b), il faut maintenant prendre la matrice  $D$  à coefficients diagonaux strictement positifs

On affirme de la sorte l'existence d'une forme linéaire séparant  $w$  de  $V$ , i.e. équilibrant tout vecteur de  $V$  mais pas  $w$ . Admettons provisoirement le Lemme. Il en résulte que

$$V \subsetneq W \Rightarrow W^\perp \subsetneq V^\perp . \quad (1.2.e)$$

En effet, en prenant  $w \in W \setminus V$ , on obtient un vecteur  $p \in V^\perp$  tel que  $p \notin w^\perp \supset W^\perp$ . On déduit de (1.2.e) que l'on ne peut avoir  $V \subsetneq (V^\perp)^\top$  (car alors  $((V^\perp)^\top)^\perp \subsetneq V^\perp$ , ce qui contredirait une propriété générale des correspondances de Galois). Ainsi, on a  $(V^\perp)^\top = V$  ce qui montre que l'application  $V \mapsto V^\perp$  est injective. Il reste à voir le Lemme.

**Preuve** du Lemme de séparation. Comme  $w \notin V$ , on a nécessairement:

$$w \succ A(A \setminus w) ,$$

(on plonge  $\mathbb{R}_{\max}$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$  pour que cette écriture ait un sens). On peut supposer par exemple  $w_1 \succ (A(A \setminus w))_1$ , soit:

$$w_1 \succ \bigoplus_i A_{1i} \bigwedge_k A_{ki} \setminus w_k$$

et donc

$$\forall i, \exists k, \quad w_1 \succ A_{1i}(A_{ki} \setminus w_k) . \quad (1.2.f)$$

Pour  $\alpha \succ e$  et  $\alpha$  assez proche de  $e$ , on a donc:

$$\forall i, \exists k, \quad w_1 \succ \alpha A_{1i}(A_{ki} \setminus w_k) . \quad (1.2.g)$$

D'abord, une observation immédiate:

$$A_{1i} \neq \varepsilon \Rightarrow A_{ki} \neq \varepsilon \quad (1.2.h)$$

(sinon, on aurait  $+\infty$  à droite de (1.2.f)). Soit  $t \in \mathbb{R}_{\max}$  un grand paramètre et définissons le vecteur  $p \in \mathbb{S}_{\max}^n$  comme suit:

$$p_k = \begin{cases} \alpha & \text{si } k = 1, \text{ et sinon:} \\ (\frac{w_1}{w_k})^\bullet & \text{si } w_k \neq \varepsilon \\ t^\bullet & \text{si } w_k = \varepsilon. \end{cases} \quad (1.2.i)$$

On a  $p.w \nearrow \varepsilon$ . En effet, pour  $k \geq 2$ , si  $w_k$  est nul, le terme  $p_k w_k$  ne contribue pas à  $p.w$ , et sinon, on a  $p_k w_k = w_1^\bullet$ , lequel terme, comme  $\alpha \succ e$ , est strictement majoré par  $\alpha w_1$ , d'où  $p.w = \alpha w_1 \nearrow \varepsilon$ .

On montre que  $p$  appartient à  $V^\perp$ , i.e. que  $p$  est orthogonal à toutes les colonnes de  $A$ . Si  $A_{1i} = \varepsilon$ , il est trivial que  $p.A_{:,i} \nabla \varepsilon$ . Sinon, il résulte de (1.2.h) que  $A_{ki} \neq \varepsilon$ . Si  $w_k \neq \varepsilon$ , on peut écrire d'après (1.2.g)

$$p_k A_{ki} = (\frac{w_1}{w_k})^\bullet A_{ki} \succ \alpha A_{1i} = p_1 A_{1i} ,$$

et donc  $p.A_{:,i} \nabla \varepsilon$ . Si  $w_k = \varepsilon$ , on a la même conclusion en prenant  $t$  assez grand. On a montré  $p \in V^\perp$  et  $p \notin w^\perp$ . Cela achève la preuve du Lemme de séparation et du Théorème. ■

**1.2.5 Corollaire** *On a  $(V^\perp)^\top = V$  pour tout sous-moduloïde de type fini de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ .*

**Preuve** On l'a montré incidemment dans la preuve du Théorème 1.2.2,(ii). ■

**1.2.6 Corollaire** *L'intersection de deux sous-moduloïdes de type fini de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  est de type fini.*

**Preuve** Soient  $V, W$  deux tels moduloïdes. On a

$$\begin{aligned} V \cap W &= V^{\perp T} \cap W^{\perp T} \quad (\text{par 1.2.5}) \\ &= (V^\perp \oplus W^\perp)^T \quad (\text{par l'analogie de 1.1.1,(vi)}) \end{aligned}$$

qui est de type fini d'après 1.2.2. ■

**1.2.7 Exemple** Calculons l'intersection des deux moduloïdes des colonnes des deux matrices suivantes:

$$M_1 = \begin{bmatrix} e & e \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ 1 & e \end{bmatrix}.$$

On a, en notant  $\text{vect}\langle U \rangle$  le moduloïde des colonnes d'une matrice  $U$ :

$$\text{vect}\langle M_1 \rangle^\perp = \text{vect}\langle \begin{bmatrix} 3^\bullet & \varepsilon \\ e & e^\bullet \end{bmatrix} \rangle.$$

Un vecteur  $v$  appartient à l'intersection ssi  $v = M_2 u$ , et  $v \in (\text{vect}\langle M_1 \rangle^\perp)^T$ , soit, en posant  $u = [x, y]^T$ :

$$\begin{bmatrix} 3^\bullet & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ 1 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \nabla \varepsilon.$$

Ainsi,

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \text{vect}\langle \begin{bmatrix} e & e \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix} \rangle$$

et en remplaçant

$$v = M_2 u \in \text{vect}\langle \begin{bmatrix} e & e \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rangle = \text{vect}\langle M_1 \rangle \cap \text{vect}\langle M_2 \rangle.$$

**1.2.8 Remarque** On peut reformuler l'exemple qui précéde de la manière suivante.  $\text{vect}\langle M_1 \rangle$  est le moduloïde d'équation

$$M_1^\perp : 3x \oplus y = 3x. \quad (1.2.j)$$

$\text{vect}\langle M_2 \rangle$  est le moduloïde d'équation:

$$M_2^\perp : 1x \oplus y = y. \quad (1.2.k)$$

L'intersection de ces deux moduloïdes est donnée par les deux équations (1.2.j) et (1.2.k).

**1.2.9 Application aux sous-demi-treillis de  $\mathbb{B}^n$**  Dans le Lemme de séparation, on a eu recours à un argument de densité (usage du  $\alpha$ ) ainsi que de domination (usage du grand paramètre  $t$ ). On notera cependant que ce lemme reste vrai pour une dualité  $\mathbb{B}^n \leftrightarrow (\mathbb{B}^2)^n$ . Il suffit de prendre le vecteur  $p$  défini par

$$p_k = \begin{cases} e & \text{si } k = 1, \text{ et sinon:} \\ \varepsilon & \text{si } w_k \neq \varepsilon \\ e^\bullet & \text{si } w_k = \varepsilon. \end{cases} \quad (1.2.l)$$

au lieu de (1.2.i). Ainsi, un sous-moduloïde de  $\mathbb{B}^n$  est caractérisé par l'ensemble des équilibres à coefficients booléiens qu'il vérifie. Notons qu'un sous moduloïde  $X$  de  $\mathbb{B}^n$  n'est rien d'autre qu'une partie  $X$  stable par sup et contenant  $\varepsilon$ . On peut donc affirmer qu'un sous-demi-treillis  $X$  de  $\mathbb{B}^n$  contenant  $\varepsilon$  est caractérisé par l'ensemble des couples  $(I, J) \in (\mathcal{P}(\{1, \dots, n\}))^2$  tels que

$$\forall x \in X, \quad \bigoplus_{i \in I} x_i = \bigoplus_{j \in J} x_j.$$

**1.2.10 Remarque** On aurait pu définir directement une dualité entre  $(\mathbb{R}_{\max})^n$  et  $((\mathbb{R}_{\max})^2)^n$  sans faire usage du dioïde symétrisé.

## 2 Solutions générales d'équilibres linéaires

### 2.1 Systèmes homogènes

On considère une famille finie  $\{u_i\}_{i \in I}$  de vecteurs de  $\mathbb{S}_{\max}^n$ .

**2.1.1 Définition (famille libre)** La famille  $\{u_i\}_i$  est libre si pour toutes familles presque nulles<sup>2</sup> de scalaires  $\{\lambda_i\}_i$  et  $\{\mu\}_i$ , on a

$$\bigoplus_i \lambda_i u_i = \bigoplus_i \mu_i u_i \Rightarrow \lambda = \mu . \quad (2.1.a)$$

**2.1.2 Définition (famille  $\nabla$ -libre)** La famille  $\{u_i\}$  est  $\nabla$ -libre si pour toutes familles presque nulles  $\{\lambda_i\}_i$  et  $\{\mu\}_i$  d'éléments de  $\mathbb{R}_{\max}$ , on a

$$\bigoplus_i \lambda_i u_i \nabla \bigoplus_i \mu_i u_i \Rightarrow \lambda \nabla \mu .$$

Cette dernière propriété est équivalente à l'assertion suivante pour une famille d'éléments de  $\mathbb{S}_{\max}$ :

$$\bigoplus_i \lambda_i u_i \nabla \varepsilon \Rightarrow \lambda \nabla \varepsilon , \quad (2.1.b)$$

(car  $a \nabla b$  ssi  $a \ominus b \nabla \varepsilon$ , cf. I,(1.2.a),(i)). On emploiera les termes “liée” et “ $\nabla$ -liée” avec un sens évident.

**2.1.3 Théorème** Une famille est libre ssi elle est  $\nabla$ -libre.

**2.1.4 Lemme** Pour tout  $a, b \in \mathbb{S}_{\max}^n$ , on a

$$a \nabla b \Rightarrow a \oplus b^\bullet = a^\bullet \oplus b .$$

**Preuve** du Lemme. Si  $a \nabla b$ , on a  $a \ominus b = b \ominus a$ . On obtient le résultat en ajoutant  $a \oplus b$  des deux cotés de l'égalité. ■

**Preuve** du Théorème.

1/  $\{u_i\} \nabla$ -liée entraîne  $\{u_i\}$  liée. Supposons d'après (2.1.b)  $\bigoplus_i \lambda_i u_i \nabla \varepsilon$  avec  $\lambda \nabla \varepsilon$ , par exemple  $\lambda_k \nabla \varepsilon$ . On a alors

$$\lambda_k u_k \nabla \ominus \bigoplus_{i \neq k} \lambda_i u_i$$

et d'après 2.1.4,

$$\lambda_k u_k \oplus \bigoplus_{i \neq k} \lambda_i^\bullet u_i = \lambda_k^\bullet u_k \ominus \bigoplus_{i \neq k} \lambda_i u_i .$$

Comme on a supposé  $\lambda_k \notin \mathbb{S}_{\max}^\bullet$ , on a  $\lambda_k \neq \lambda_k^\bullet$ , et on contredit la propriété (2.1.a).

---

<sup>2</sup>la famille  $\{\lambda_i\}_i$  est presque nulle si on a seulement un nombre fini d'indices  $i$  tels que  $\lambda_i \neq \varepsilon$

2/  $\{u_i\}$  liée entraîne  $\{u_i\}$   $\nabla$ -liée. Supposons

$$\bigoplus_i \lambda_i u_i = \bigoplus_j \mu_j u_j ,$$

avec  $\lambda \neq \mu$ , par exemple  $\lambda_1 \neq \mu_1$ , et quitte à permuter  $\lambda$  et  $\mu$ ,  $|\lambda_1| \succeq |\mu_1|$ . On est dans l'une des deux situations suivantes.

2,a/ Si  $\lambda_1 \notin \mathbb{S}_{\max}^\bullet$  et  $|\lambda_1| > |\mu_1|$ , on a  $\lambda_1 \ominus \mu_1 = \lambda_1 \notin \mathbb{S}_{\max}^\bullet$ , et donc  $\nu = \lambda \ominus \mu$  est un vecteur non équilibré tel que  $\bigoplus_i \nu_i u_i \nabla \varepsilon$ .

2,b/ Il reste à voir le cas où  $|\lambda_1| = |\mu_1|$  avec  $\lambda_1 \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet$  ou  $\mu_1 \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet$ . Après permutation éventuelle, et compte tenu de  $\lambda_1 \neq \mu_1$ , on peut supposer  $\lambda_1 = \mu_1^\bullet$ , avec  $\mu_1 \in \mathbb{S}_{\max}^\vee$ . Le résultat provient d'un lemme de raffinement des égalités dans  $\mathbb{S}_{\max}$ .

**2.1.5 Lemme** Soient  $b \in \mathbb{S}_{\max}^\vee$ ,  $a, u \in \mathbb{S}_{\max}$ . On a

$$a \oplus b^\bullet c = a \oplus bc \Rightarrow a \ominus bc \nabla a \oplus bc .$$

En supposant ce Lemme, on pose  $c = u_1$ ,  $b = \mu_1$  et  $a = \bigoplus_{i>2} (\lambda_i \oplus \mu_i) u_i$ . On a alors le vecteur  $\nu$  non équilibré donné par  $\nu_1 = \ominus \mu_1$  et  $\nu_i = \lambda_i \oplus \mu_i$  pour  $i \geq 2$ , tel que  $\bigoplus_j \nu_j u_j \nabla \varepsilon$ , d'où il résulte que  $\{u\}_j$  est  $\nabla$ -liée.

**Preuve** du Lemme 2.1.5

- (o) Cas  $c \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet$ . Cela résulte de  $\ominus bc = \ominus bc^\bullet = b^\bullet c = bc$  via la Formule (1.2.b) du Chapitre I.
- (i) Cas  $|bc| \prec |a|$ . C'est trivial.
- (ii) Cas  $|bc| \succ |a|$ . L'identité  $a \oplus b^\bullet c = a \oplus bc$  se réécrit  $b^\bullet c = bc$ , et compte tenu de  $b \in \mathbb{S}_{\max}^\vee$ ,  $c \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet$  ce qui ramène au cas (o).
- (iii) Cas  $|bc| = |a|$ ,  $c \in \mathbb{S}_{\max}^\vee$ . On a alors  $b^\bullet c = a \oplus bc$ . Si  $a$  est équilibré, on a  $a \ominus bc = a^\bullet = a \oplus bc$  est le résultat est acquis. Si  $a$  est signé, le signe de  $bc$  est alors l'opposé du signe de  $a$ , soit  $a = \ominus bc$ , et donc  $a \ominus bc = a \nabla a \oplus bc = a^\bullet$ . Cela achève la preuve du Lemme et du Théorème 2.1.3. ■

**2.1.6 Définition (rang)** On appelle rang d'une matrice  $A$  le nombre maximal de colonnes de  $A$  formant une famille libre.

On rappelle (cf. 0.6.1.3) qu'une matrice carrée  $A$  est dite monomiale si  $A$  se factorise sous la forme  $A = DP$ , où  $D$  est une matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls et  $P$  une matrice de permutation.

**2.1.7 Théorème** Le rang de la matrice  $A \in \mathbb{S}_{\max}^{n \times p}$  est égal à la taille de la plus grande matrice monomiale inversible extraite de  $A$ .

**Preuve** Via le Théorème 2.1.3, on se ramène à la Proposition suivante, qui étend au dioïde  $\mathbb{S}_{\max}$  la caractérisation des applications linéaires inversibles donnée en 0.7.2.8.

**2.1.8 Proposition** Une application linéaire  $f : \mathbb{S}_{\max}^p \rightarrow \mathbb{S}_{\max}^n$  est injectivessi sa matrice contient une sous matrice monomiale inversible de taille  $p$ .

**Preuve** de la proposition. D'après le Lemme 7.2.6 du Chapitre 0, la matrice  $A$  associée à  $f$  contient une matrice monomiale. On pourra supposer quitte à multiplier par des matrices monomiales inversibles convenables que  $A$  a la forme suivante:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \varepsilon \\ \varepsilon & \dots & \varepsilon & A_{pp} \\ * & * & * & * \end{bmatrix},$$

où les  $A_{ii}$  sont soit égaux à  $e$  soit à  $e^\bullet$ . Si tous les  $A_{ii}$  sont égaux à  $e$ , le résultat est acquis. Supposons  $A_{ll} = e^\bullet$ . On montre qu'il existe une ligne  $k > p$  dont le seul coefficient non nul est  $A_{kl}$ , qui est inversible, de sorte qu'en permutant les lignes  $k$  et  $l$ , on obtient une matrice monomiale inversible. Si ce n'est pas le cas, on est dans la situation suivante:

$$\forall k > p + 1, \quad (A_{kl} \text{ inversible} \Rightarrow \exists u_k \neq k, \quad A_{ku_k} \neq \varepsilon) .$$

Il est clair qu'en prenant un grand paramètre  $t$  et en considérant le vecteur

$$u : u_i = \begin{cases} e & \text{si } i = l \\ t^\bullet & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a  $Au = A(\ominus u)$ , ce qui montre que l'application  $X \mapsto AX$  n'est pas injective. Cela achève la preuve de la Proposition et du Théorème. ■

### 2.1.9 Corollaire

On a  $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$ .

Il résulte que le rang de la matrice  $A$  est aussi bien égal au nombre maximal de lignes de  $A$  formant une famille libre. On peut résumer cette section par l'énoncé familier suivant.

**2.1.10 Corollaire** Soit  $A \in \mathbb{S}_{\max}^{n \times p}$ . Le système  $Ax \nabla \varepsilon$  admet une solution non triviale (i.e.  $x \notin (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^n$ ) ssi  $\operatorname{rg} A < p$ .

## 2.2 Solutions des équilibres non homogènes

Nous donnons ici un résultat rapide sur l'existence de solutions à l'équilibre  $Ax \nabla b$ . On caractérise cette existence à l'aide de conditions élémentaires (purement structurelles). On se restreindra plus tard à l'étude des solutions *signées* pour obtenir des résultats plus fins. On notera, pour  $u \in \mathbb{S}_{\max}^n$

$$\operatorname{supp} u = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid u_i \neq \varepsilon\} ,$$

$$\operatorname{supp}^\vee u = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid u_i \nabla \varepsilon\} .$$

Notons le fait immédiat suivant.

**2.2.1 Lemme** Soient  $u, v \in \mathbb{S}_{\max}^n$ . On a:

$$u \nabla v \Rightarrow \operatorname{supp}^\vee u \subset \operatorname{supp} u .$$

**2.2.2 Théorème** Soit  $A \in \mathbb{S}_{\max}^{n \times p}$  et  $b \in \mathbb{S}_{\max}^n$ . Les propositions suivantes sont équivalentes:

- (i) Il existe  $x \in \mathbb{S}_{\max}^p$  tel que  $Ax \nabla b$ ,
- (ii)  $\text{supp}^\vee b \subset \cup_i \text{supp } A_{\cdot,i}$ .

**Preuve** (i) $\Rightarrow$ (ii): On a d'après le Lemme 2.2.1:

$$\text{supp}^\vee b \subset \text{supp } Ax \subset \cup_i \text{supp } A_{\cdot,i} .$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Il existe  $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$  tel que  $|Ax| \succeq |b|$ . On pourra par exemple choisir,

$$x_k = \bigoplus_{i, A_{ik} \neq \varepsilon, b_i \neq \varepsilon} |A_{ik}| \setminus |b_i| ,$$

qui est bien défini d'après (ii). On a alors  $Ax \nabla b$ . ■

### 3 Systèmes de Cramer

#### 3.1 Solution de Cramer

$\mathcal{S}$  désigne ici un demi-anneau symétrisé commutatif.

**3.1.1 Proposition** Soit  $A \in \mathcal{S}^{n \times n}$ , de déterminant inversible dans  $\mathcal{S}$ , et  $b \in \mathcal{S}^n$ .

$$\bar{x} = (\det A)^{-1} A^{\text{adj}} b$$

vérifie  $A\bar{x} \nabla b$ .

**Preuve** : on a  $AA^{\text{adj}} \nabla (\det A)\text{Id}$ , et en multipliant à gauche par  $b$ :  $AA^{\text{adj}}b \nabla (\det A)b$ , d'où la conclusion en divisant par  $\det A$ . ■

On appellera  $\bar{x}$ , ainsi défini, la *solution de Cramer* de l'équilibre  $Ax \nabla b$ .

**3.1.2 Exemple** Dans  $\mathbb{S}_{\max}$ , soit

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

Le déterminant vaut  $D = 3 \ominus 2 = 3$ . La solution de Cramer est donnée par:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{3} = 2^\bullet, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{3} = 1 .$$

#### 3.2 Systèmes de Cramer dans $\mathbb{S}_{\max}$

Nous étudions maintenant l'existence de solutions *signées* de systèmes d'équilibres linéaires dans le cadre du dioïde  $\mathbb{S}_{\max}$ . On discutera plus loin les extensions éventuelles.

**3.2.1 Théorème (Condition de Cramer)** Soient  $A \in \mathbb{S}_{\max}^{n \times n}$  et  $b \in \mathbb{S}_{\max}^n$ . Toute solution  $x \in (\mathbb{S}_{\max}^\vee)^n$  de l'équilibre  $Ax \nabla b$  vérifie:

$$\det A x \nabla A^{\text{adj}} b$$

La preuve repose sur une technique analogue à l'élimination de Gauss, rendue possible par le Lemme suivant:

**3.2.2 Lemme (d'élimination vectorielle)** *On a:*

$$a \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}, x \in (\mathbb{S}_{\max}^{\vee})^n \text{ et } \begin{cases} ax \nabla b \\ Cx \nabla d \end{cases} \Rightarrow Cb \nabla da .$$

**Preuve** On a  $Cax \nabla da$ . Le lemme résulte du lemme de substitution vectoriel II,3.6.12 appliqué à  $ax$  qui appartient à  $(\mathbb{S}_{\max}^{\vee})^n$ . ■

**3.2.3 Contre exemple** L'hypothèse  $a \nabla \varepsilon$  est nécessaire. On a en effet, avec

$$a = e^\bullet, x = \begin{bmatrix} e \\ \ominus e \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} e \\ e \end{bmatrix}, c = [e \quad e], d = \varepsilon$$

$ax \nabla b$  et  $cx \nabla d$ , mais  $cb = e \nabla ad = \varepsilon$ .

**Preuve** du Théorème 3.2.1:

1/ Cas  $\det A \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$ :

On montre le résultat par récurrence sur la taille de la matrice  $A$ . Si  $A \in \mathbb{S}_{\max}^{1 \times 1}$ , le résultat est acquis, avec la convention  $A^{\text{adj}} = (e)$ . Supposons le théorème démontré pour des matrices de taille  $n - 1$  et soit  $A \in \mathbb{S}_{\max}^{n \times n}$  avec  $\det A \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$ . Comme en développant par rapport à la dernière ligne  $\det A = \bigoplus_k a_{nk} \det A(n|k) \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$ , on a par II,3.3.8,ii que l'un au moins des  $\det A(n|k)$  est signé. On peut donc supposer sans restriction de généralité  $\det A(n|n) \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$ . On a alors:

$$Ax \nabla b \iff \begin{cases} A_{(n|n)}x_{(n|} \oplus A_{(n|n)}x_n \nabla b_{(n|} & (1) \\ A_{[n|n]}x_{(n|} \oplus a_{nn}x_n \nabla b_n & (2) \end{cases}$$

L'application de l'hypothèse de récurrence au système de  $n - 1$  équilibres:

$$(1) \Leftrightarrow (1'): A_{(n|n)}x_{(n|} \nabla b_{(n|} \ominus A_{(n|n)}x_n$$

donne  $(\det A_{(n|n)})x_{(n|} \nabla A_{(n|n)}^{\text{adj}}(b_{(n|} \ominus A_{(n|n)}x_n)$ . L'application du lemme d'élimination 3.2.2 donne:

$$A_{[n|n]}A_{(n|n)}^{\text{adj}}(b_{(n|} \ominus A_{(n|n)}x_n) \oplus (\det A_{(n|n)})a_{nn}x_n \nabla (\det A_{(n|n)})b_n$$

c'est à dire:

$$[(\det A_{(n|n)})a_{n,n} \ominus A_{[n|n]}A_{(n|n)}^{\text{adj}}A_{(n|n)}]x_n \nabla (\det A_{(n|n)})b_n \ominus A_{[n|n]}A_{(n|n)}^{\text{adj}}b_{(n|}$$

Dans le premier membre de l'équilibre, on reconnaît le développement par blocs de  $\det A$  (cf. I,2.1.6), et dans le second, le développement par blocs du  $n$ -ième déterminant de Cramer:

$$D_n = \det \begin{bmatrix} A_{(n|n)} & b_{(n|} \\ A_{[n|n]} & b_n \end{bmatrix} = (A^{\text{adj}}b)_n$$

On a ainsi montré:

$$(\det A)x_n \nabla (A^{\text{adj}}b)_n$$

On aurait pu faire la démonstration en distinguant la  $i$ -ième colonne à la place de la  $n$ -ième, ce qui aurait donné l'équilibre correspondant pour  $x_i$ . On a donc  $(\det A)x \nabla A^{\text{adj}}b$ , ce qui prouve le résultat à l'ordre  $n$  et achève la démonstration dans le cas  $\det A \in \mathbb{S}_{\max}^\vee$ .

### 2/ Cas $\det A \nabla \varepsilon$

Si toutes les composantes de  $A^{\text{adj}}b$  sont équilibrées, les conditions de Cramer sont trivialement vérifiées. On peut donc supposer  $(A^{\text{adj}}b)_i \in \mathbb{S}_{\max}^\vee$ . On considère alors le système

$$\begin{bmatrix} A_{[1]} & \dots & A_{[n-1]} & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ \ominus 0 \end{bmatrix} \nabla \ominus A_{[n]}x_n ,$$

système de déterminant inversible, pour lequel le résultat précédent s'applique et donne

$$\ominus \begin{bmatrix} A_{[1]} & \dots & A_{[n-1]} & b \end{bmatrix}^{\text{adj}} A_{[n]}x_n \nabla \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ \ominus 0 \end{bmatrix} [A^{\text{adj}}b]_n$$

ce qui projeté sur la dernière composante donne:

$$\det Ax_n \nabla [A^{\text{adj}}b]_n$$

et montre le Théorème dans le cas  $\det A \notin \mathbb{S}_{\max}^\vee$ . ■

## 3.3 Application aux systèmes d'équations linéaires à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$

**3.3.1 Proposition** Soient  $A, C \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ ,  $b, d \in \mathbb{R}_{\max}^n$ . On pose:  $\tilde{A} = A \ominus C$  et  $\tilde{b} = b \ominus d$  L'ensemble des solutions de

$$Ax \oplus b = Cx \oplus d \tag{3.3.a}$$

dans  $\mathbb{R}_{\max}$  et l'ensemble des solutions positives de l'équilibre

$$\tilde{A}x \oplus \tilde{b} \nabla \varepsilon \tag{3.3.b}$$

dans  $\mathbb{S}_{\max}$  coïncident. En particulier, si  $\det A$  est inversible et  $\bar{x} = (\det A)^{-1}A^{\text{adj}}b \in (\mathbb{S}_{\max}^\oplus)^n$ , la solution de Cramer  $\bar{x}$  est l'unique solution de (3.3.a).

**Preuve** : résulte immédiatement du fait que  $\mathbb{S}_{\max}$  est une symétrisation régulière de  $\mathbb{R}_{\max}$  (cf. II,2.1.2). ■

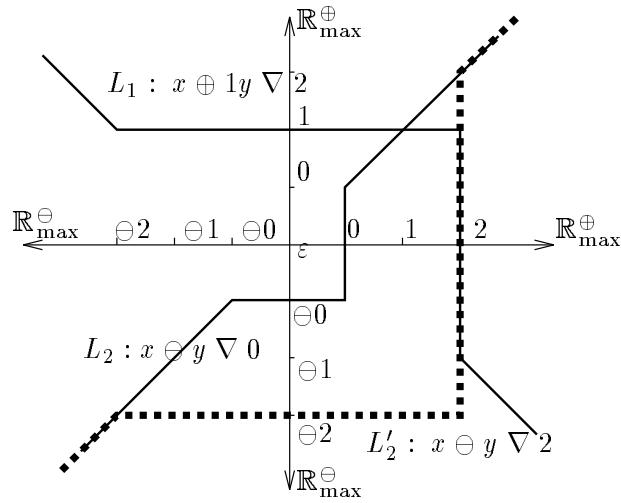
**3.3.2 Exemple** Considérons le système déjà traité de manière heuristique en II,§1.1, soit:

$$\begin{cases} \max(x, y - 4, 1) = \max(x - 1, y + 1, 2) \\ \max(x + 3, y + 2, -5) = \max(y + 2, 7) \end{cases} \tag{3.3.c}$$

L'équilibre associé est:

$$\begin{bmatrix} 0 & \ominus 1 \\ 3 & 2^\bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{3.3.d}$$

de déterminant  $D = 4$  (inversible).

Figure III.1: Intersection de droites dans  $(\$_{\max}^V)^2$ 

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & \ominus 1 \\ 7 & 2^\bullet \end{vmatrix} = 8, \quad D_y = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7$$

$$A^{\text{adj}} b = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} \in (\$_{\max}^{\oplus})^2$$

Ainsi,  $x = \frac{D_x}{D} = 8 - 4 = 4, y = \frac{D_y}{D} = 7 - 4 = 3$  donne l'unique solution positive de l'équilibre (3.3.d). C'est donc l'unique solution de l'équation (3.3.c) dans  $\mathbb{R}_{\max}$ .

### 3.3.3 Interprétation géométrique

Considérons les trois droites suivantes dans  $(\$_{\max}^V)^2$ :

$$\begin{aligned} L_1 & \quad x \oplus 1y \nabla 2 \\ L_2 & \quad x \ominus y \nabla 0 \\ L'_2 & \quad x \ominus y \nabla 2 \end{aligned}$$

Le déterminants associés au système  $L_1 \cap L_2$  valent

$$D = \ominus 1, \quad D_x = 2, \quad D_y = \ominus 2,$$

d'où l'on conclut à l'unicité de la solution  $(x, y) = (1, \ominus 1) \in (\$_{\max}^V)^2$ . On constate sur la Figure III.1 que  $L_1$  et  $L_2$  se rencontrent en un unique point. Par contre, le déterminant  $D'_y$  associé au système  $L_1 \cap L'_2$  vaut  $2^\bullet$ . On constate en effet que les droites  $L_1$  et  $L'_2$  ont tout un segment en commun, quoique  $L'_2$  soit “parallèle” à  $L_2$ . Tout point de la forme  $(1, t)$  avec  $|t| \leq 1$  appartient en effet à  $L_1 \cap L'_2$ .

### 3.4 Commentaires

En fait, les formules de Cramer sont seulement des conditions *nécessaires* pour l'existence d'une solution signée à  $Ax \nabla b$ . Considérons le système dans  $\mathbb{S}_{\max}$ :

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On a  $\det A = 0 \in \mathbb{S}_{\max}^{\oplus} \subset \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$ . Les trois déterminants de Cramer valent

$$D_x = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} = 0^\bullet, \quad D_y = 0^\bullet, \quad D_z = 0^\bullet$$

de sorte que les équations de Cramer s'écrivent

$$0.x \nabla 0^\bullet, \quad 0.y \nabla 0^\bullet, \quad 0.z \nabla 0^\bullet \quad (3.4.a)$$

Par exemple,  $x = y = z = -1$  (-1 avec le - usuel) sont solutions de (3.4.a) mais

$$A \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cependant, si  $A^{\text{adj}}b$  est signé, la solution de Cramer est l'unique solution signée:

**3.4.1 Proposition** Supposons  $\det A \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$  inversible, et  $A^{\text{adj}}b \in (\mathbb{S}_{\max}^{\vee})^n$ . Il existe une unique solution signée ( $x \in (\mathbb{S}_{\max}^{\vee})^n$ ) à  $Ax \nabla b$ , donnée par  $x = (\det A)^{-1} A^{\text{adj}}b$

**Preuve :** Dans ce cas,  $(\det A)^{-1} A^{\text{adj}}$  est l'unique solution non dégénérée des équations de Cramer, qui sont nécessaires d'après le théorème 3.2.1 et suffisantes (Proposition 3.1.1). ■

Nous montrons maintenant que lorsque l'on ne requiert pas que les solutions soient signées où lorsque l'on prend des dioïdes plus généraux, les conditions de Cramer ne sont plus nécessaires.

**3.4.2 Contre exemple** Dans le dioïde symétrisé de  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ , on considère le système

$$\begin{cases} (2 \ominus 1)x \oplus \varepsilon y \nabla \ominus 2 \\ (1 \ominus 2)x \oplus \varepsilon y \nabla 10 \end{cases} . \quad (3.4.b)$$

$(x, y) = (\infty, \varepsilon)$  est clairement solution. On a  $D = \varepsilon$ ,  $D_x = \varepsilon$ , et

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 \ominus 1 & \ominus 2 \\ 1 \ominus 2 & 10 \end{vmatrix} = 12 \ominus 11 .$$

La seconde condition de Cramer  $Dy \nabla D_y$  n'est donc pas satisfaite.

On a vu au chapitre précédent que les dioïdes où tout élément était somme finie d'éléments intègres jouaient un rôle important. On donne un contre exemple analogue pour un dioïde de ce type.

**3.4.3 Contre exemple** Dans  $\mathbb{R}_{\max}[X]$ , on a

$$\begin{bmatrix} e \ominus X & \varepsilon \\ e^\bullet & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \oplus X \\ \varepsilon \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} e \ominus X^2 \\ e \end{bmatrix} .$$

Cependant,

$$D = e \ominus X, \quad D_y = \begin{vmatrix} e \ominus X & e \ominus X^2 \\ e^\bullet & e \end{vmatrix} = e^\bullet \ominus X \oplus (X^2)^\bullet ,$$

et donc  $y = \varepsilon$  ne satisfait pas la seconde condition de Cramer.

**3.4.4 Contre exemple** Les conditions de Cramer peuvent ne pas être vérifiées pour une solution non signée. Soit en effet le système dans  $\mathbb{S}_{\max}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & e \\ e & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^\bullet \\ \varepsilon \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.c)$$

La condition de Cramer s'écrit:

$$\det A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1^\bullet \\ \varepsilon \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ce qui est faux.

Les solutions signées sont intéressantes du point de vue de l'élimination. Elles ne semblent cependant pas jouir de propriétés de structure, comme le montre la suite de contre exemples suivants. Notons

$$\text{Sol}(A, b) = \{x \in \mathbb{S}_{\max}^n \mid Ax \nabla b\} . \quad (3.4.d)$$

On a le fait trivial suivant.

**3.4.5 Observation** On a  $\text{Sol}(A, b) = \text{Sol}(A, b) \oplus \text{Sol}(A, \varepsilon)$ .

L'intérêt de  $\text{Sol}(A, \varepsilon)$  est d'être un moduloïde. En considérant l'ensemble de éléments minimaux de  $\text{Sol}(A, b)$ ,  $\text{Sol}^{\min}(A, b)$ , on pourrait s'attendre à un théorème de décomposition du type

$$\text{Sol}(A, b) = \text{Sol}^{\min}(A, b) \oplus \text{Sol}(A, \varepsilon) ? \quad (3.4.e)$$

ce qui généraliserait le classique "solution générale = solution particulière + solution de l'équation sans second membre". Il n'en est rien.

**3.4.6 Contre exemple** Considérons le système dans  $\mathbb{S}_{\max}$ :

$$\text{Id} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} e^\bullet \\ e^\bullet \end{bmatrix}$$

On a:

$$\text{Sol}(A, b) = \{(x, y) \in \mathbb{S}_{\max}^2 \mid |x| \preceq e \text{ et } |y| \preceq e\} \oplus (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^2 .$$

$$\text{Sol}^{\min}(A, b) = \{(\varepsilon, \varepsilon)\}, \quad \text{Sol}(A, \varepsilon) = (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^2$$

ce qui contredit (3.4.e). En outre, on vérifie que l'on n'a pas de partie finie  $P \subset \text{Sol}(A, b)$  telle que  $\text{Sol}(A, b) = P \oplus \text{Sol}(A, \varepsilon)$ .

Définissant  $\text{Sol}^\vee = \{x \in (\mathbb{S}_{\max}^\vee)^n \mid Ax \nabla b\}$ , une généralisation du Lemme II.3.3.4 au cas vectoriel serait:

$$\text{Sol}(A, b) = \text{Sol}^\vee(A, b) \oplus (\mathbb{S}_{\max}^\bullet)^n \quad ? \quad (3.4.f)$$

Il n'en est rien.

### 3.4.7 Contre exemple

Soit le système

$$\begin{bmatrix} e & e \\ e & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

On a d'après la première équation  $x \nabla 1 \ominus y$ , et en reportant dans la seconde,  $(1 \ominus y) \oplus y \nabla 2$ , soit  $y^\bullet \nabla 2$ , d'où  $|y| \succeq 2$ . De même  $|x| \succeq 2$ . On vérifie sans difficulté que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ \ominus 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \ominus 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sont les deux solutions signées minimales du système. Cependant,

$$\begin{bmatrix} 2^\bullet \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

est une autre solution, qui n'est pas minorée par un élément de  $\text{Sol}^\vee(A, b)$ . On contredit (3.4.f).

Nous donnons un autre contre exemple où  $\text{Sol}^\vee(A, b) = \emptyset$  et  $\text{Sol}(A, b) \neq \emptyset$ .

### 3.4.8 Contre exemple

Soit le système:

$$\begin{cases} 1x \oplus y \nabla 1 \\ 1x \oplus y \nabla \ominus 1 \\ x \oplus 1y \nabla 1 \end{cases} \quad (3.4.g)$$

Les deux premières équations se réécrivent  $1x \oplus y \nabla 1, \ominus 1 \ominus y \nabla 1$ , d'où comme 1 est *transitif*,  $1x \oplus y \nabla \ominus 1x \ominus y$ , i.e.  $1x \oplus y \nabla \varepsilon$ , i.e.  $y \nabla \ominus 1x$ , et en reportant dans la dernière équation,  $x \ominus 2x = \ominus 2x \nabla 1$ , d'où  $x \nabla \ominus -1$ . En déduit que si  $x$  et  $y$  sont signés, nécessairement,  $x = \ominus -1$  et  $y = \ominus 1z = e$ , qui ne sont pas solution de (3.4.g). Ainsi,  $\text{Sol}^\vee(A, b) = \emptyset$ . Cependant, on obtient en appliquant les résultats du §1.1:

$$\begin{aligned} \text{Sol}(A, b) &= \left\{ \begin{bmatrix} x^\bullet \\ e \end{bmatrix} \mid e \preceq |x| \prec 1 \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} x^\bullet \\ t \end{bmatrix} \mid 1 \preceq |x|, |t| \preceq -1|x| \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y^\bullet \end{bmatrix} \mid |x| \preceq -1|y| \right\} \\ \text{Sol}(A, \varepsilon) &= \text{vect} \langle \begin{bmatrix} e^\bullet \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e^\bullet \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^\bullet \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ e^\bullet \end{bmatrix} \rangle . \end{aligned}$$

**3.4.9 Remarque** La preuve du théorème 3.2.1 repose sur les deux propriétés 3.3.8,(i) et (ii). Semblablement, dès que l'on aura une partie  $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^\vee$  telle que  $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$  et  $x \oplus y \in \mathcal{K} \Rightarrow x$  ou  $y \in \mathcal{K}$ , le système  $Ax \nabla b$  avec  $\det A \in \mathcal{K}$  entraînera les conditions de Cramer  $\det Ax \nabla A^{\text{adj}}b$ . Cela rend difficile la généralisation de ce résultat à des dioides non totalement ordonnés. En fait, on aura la  $n$ -ième condition de Cramer  $D_n x_n \nabla D_n$  lorsque, après permutation éventuelle des lignes, la suite des mineurs principaux  $\Delta_i := \det A[1..i|1..i]$  vérifiera

$$\forall i, \Delta_i \text{ inversible et } \det A = \bigotimes_{j>i} a_{jj} \Delta_i .$$

**3.4.10 Exemple** On considère dans le dioïde symétrisé de  $\text{conv}\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2)$  le système:

$$\begin{cases} B_2(1)x \oplus B_\infty(1)y \nabla B_\infty(2) \\ B_2(2)x \oplus B_1(1)y \nabla B_2(3) \end{cases}, \quad (3.4.h)$$

où  $B_1(r)$ ,  $B_2(r)$  et  $B_\infty(r)$  désignent les boules de rayon  $r$  pour les normes respectives  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$ . On constate que le déterminant

$$D = B_2(1)B_1(1) \ominus B_2(2)B_\infty(1) = \ominus B_2(2)B_\infty(1)$$

(via II,3.4.2) est signé. L'argument du théorème 3.2.1 s'applique donc. On a

$$D_x = \ominus B_2(3)B_\infty(1), \quad D_y = \ominus B_2(2)B_\infty(2),$$

et donc

$$D.x \nabla \ominus B_2(3)B_\infty(1), \quad D.y \nabla \ominus B_2(2)B_\infty(2).$$

Comme  $\text{conv}\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2)$  est intègre (cf. 0,1.0.11), on peut simplifier par  $D$ , et l'on a que

$$x = B_2(1), \quad y = B_\infty(1)$$

est l'unique solution de l'équilibre (3.4.h). En outre, cette solution étant positive, c'est l'unique solution de l'équation

$$\begin{cases} B_2(1)x \oplus B_\infty(1)y = B_\infty(2) \\ B_2(2)x \oplus B_1(1)y = B_2(3) \end{cases}$$

associée à inconnues dans  $\text{conv}\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^2)$ .

**3.4.11 Remarque** Dans l'exemple ci-dessus, compte tenu de l'intégrité du dioïde des compacts convexes, il est loisible de se plonger dans le dioïde des fractions et de pratiquer une élimination usuelle. On écrira par exemple à partir de la seconde équation:

$$\begin{aligned} & x \nabla B_2(1) \ominus \frac{B_1(1)}{B_2(2)}y \\ & B_2(1) \left( B_2(1) \ominus \frac{B_1(1)}{B_2(2)}y \right) \oplus B_\infty(1)y \nabla B_\infty(2). \end{aligned}$$

On notera que  $B_\infty(2) \ominus B_2(2) = B_\infty(2)$  ( $B_2(2)$  est à 4 points près contenu dans l'intérieur de  $B_\infty(2)$ ) et l'on étend facilement la règle du II,3.4.2). D'autre part, comme  $B_\infty(1)B_2(1) \ominus B_1(1) = B_\infty(1)B_2(1)$ , on obtient

$$B_\infty(1)y \nabla B_\infty(2),$$

ce qui redonne le résultat précédent.

**3.4.12 Note** Signalons un résultat voisin d'Olsder et Roos [77]. On part de l'idée que  $\exp(\alpha t) + \exp(\beta t) \simeq \exp(\max(\alpha, \beta)t)$ , i.e. que certains phénomènes ( $\max, +$ ) s'obtiennent par passage à la limite à partir de l'algèbre usuelle. Définissons la matrice  $e^{At}$  par  $(e^{At})_{ij} = \exp(a_{ij}t)$  (exponentielle coefficient par coefficient) et de même  $(e^{bt})_i = \exp(b_i t)$ . Olsder et Roos obtiennent des formules de type Cramer en passant à la limite sur les formules usuelles. Ces formules peuvent être différentes des conditions obtenues en symétrisant (car le passage à la limite autorise des annulations de termes).

De manière précise, Olsder et Roos introduisent le *dominant*, dont on peut donner la définition équivalente suivante:

$$\text{dom } A = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\det e^{At}|}{t}, \quad (3.4.i)$$

où  $\det$  désigne le déterminant dans l'algèbre usuelle. Ils définissent en outre le *signe* associé au dominant comme le signe des termes réalisant asymptotiquement le max à droite de (3.4.i). Ils montrent que les conditions de Cramer pour  $Ax = b$ , soit

$$\text{dom } A x_i = \text{dom}(A_1, \dots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \dots, A_n) \quad (3.4.j)$$

sont suffisantes dès que  $\text{dom } a > \varepsilon$  et que les signes associés aux dominants à gauche et à droite de (3.4.j) sont égaux. Notons que si le dominant à droite de (3.4.j) est nul,  $\text{dom } A$  étant toujours non nul, le résultat est encore vrai. On voit bien la différence avec les conditions de Cramer obtenues en symétrisant sur l'exemple 3.1.2 traité plus haut, soit

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

On a  $\text{dom } A = 3$ ,  $\text{dom}(b, A_2) = \varepsilon$ ,  $\text{dom}(A_1, b) = 4$ , les dominants non nuls étant de signe positif, et l'on obtient via (3.4.j) la solution  $x = \varepsilon$  et  $y = 1$ . Le caractère pointé des conditions de Cramer symétrisées atteste la non unicité de la solution (par exemple,  $x = 2$  et  $y = 1$  convient également). En l'occurrence, les formules (3.4.j) sélectionnent la plus petite solution.

## 4 Conditions de compatibilité de systèmes rectangulaires

### 4.1 Rang mineur

**4.1.1 Définition (rang mineur)** *On appelle rang mineur d'une matrice  $A$ , noté  $\text{rg}_m(A)$ , la dimension maximale d'un mineur non équilibré.*

On définit la matrice des mineurs d'ordre  $k$  de  $A$ ,  $\mathcal{M}^{(k)}(A)$ . C'est une matrice  $C_n^k \times C_p^k$ , indiquée par des ensembles de lignes de  $A$  et de colonnes de  $A$ , définie de la manière suivante:

$$\mathcal{M}_{I,K}^{(k)}(A) = \det A_{[I|J]} \text{ avec } \#I = \#J = k.$$

Les ensembles d'indices sont supposés ordonnés par ordre lexicographique. En particulier, on a  $\mathcal{M}^{(1)} = A$ .

En termes de matrices des mineurs, le théorème de Binet-Cauchy I,2.1.8 se réécrit:

$$\mathcal{M}^{(k)}(AB) \nabla \bullet \mathcal{M}^{(k)}(A)\mathcal{M}^{(k)}(B) . \quad (4.1.a)$$

Il en résulte que

$$\text{rg}_m(AB) \leq \min(\text{rg}_m(A), \text{rg}_m(B)) . \quad (4.1.b)$$

### 4.2 Conditions supplémentaires de compatibilité

On considère le système

$$Ax \nabla \varepsilon \quad (4.2.a)$$

où  $A \in \mathbb{S}_{\max}^{n \times p}$ , avec  $n \geq p$ .

**4.2.1 Théorème** Pour que le système (4.2.a) admette une solution signée non nulle, les conditions suivantes sont nécessaires.

- (i) Pour tout ensemble d'indices  $I$  de cardinal  $p$ ,  $\det A_I \nabla \varepsilon$ ,
- (ii) Pour tous ensembles d'indices  $I, J$  de cardinal  $p - 1$  et pour tous  $k, l \in \{1, \dots, p\}$ ,

$$\begin{vmatrix} \det A_{[I|k]} & \det A_{[I|l]} \\ \det A_{[J|k]} & \det A_{[J|l]} \end{vmatrix} \nabla \varepsilon . \quad (4.2.b)$$

Par exemple, pour  $A \in \mathbb{S}_{\max}^{4 \times 3}$ ,  $I = \{1, 2\}$ ,  $J = \{3, 4\}$ ,  $k = 2$ ,  $l = 3$ , la condition (ii) se réécrit:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{23} \ominus a_{21}a_{13} & a_{11}a_{22} \ominus a_{21}a_{12} \\ a_{31}a_{43} \ominus a_{41}a_{33} & a_{31}a_{42} \ominus a_{41}a_{32} \end{vmatrix} \nabla \varepsilon .$$

**Preuve** du Théorème. La condition (i) n'est autre que la condition de Cramer du système  $A_{[I]}X \nabla \varepsilon$ . Montrons (ii). Supposons  $\det A_{[I|k]}$  non équilibré. On a  $x_k \neq \varepsilon$  (sinon, on contredirait la condition de Cramer pour le système  $A_{[I|k]}x_k \nabla \varepsilon$ ). Soit le système:

$$A_{[I|k]}X_{(k)} \nabla \ominus A_{[I|k]}x_k .$$

On a

$$\det A_{[I|k]}X_{(k)} \nabla \ominus A_{[I|k]}^{\text{adj}}A_{[I|k]}x_k ,$$

d'où en projetant sur la  $l$ -ième coordonnée ( $l \neq k$ ):

$$\det A_{[I|k]}x_l \nabla \ominus \det A_{[I|l]}x_k .$$

En exprimant de  $x_l$  en fonction de  $x_k$ , en reportant dans le système  $A_{[J]}X_{[J]} \nabla \varepsilon$  et en exprimant la condition de Cramer du nouveau système qui ne contient plus l'indéterminée  $x_l$ , on obtient (ii).

■

**4.2.2 Remarque** La condition (ii) affirme que le rang mineur de  $\mathcal{M}^{(p-1)}$  est majoré par 1.

D'ordinaire, la condition (ii) est conséquence de la condition (i) (la preuve ci-dessus marche aussi dans un corps). Dans  $\mathbb{S}_{\max}$ , elle n'est pas automatiquement vérifiée comme le montre le contre exemple suivant.

**4.2.3 Exemple** Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} e & e & e \\ \ominus e & e & e \\ e & \ominus e & e \\ e & e & \ominus e \end{bmatrix}$$

On a:

$$\mathcal{M}^{(3)}(A) = \begin{bmatrix} e^\bullet \\ e^\bullet \\ e^\bullet \\ e^\bullet \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} [1, 2] & [1, 3] & [2, 3] \\ [1, 2] & e & e^* \\ [1, 3] & \ominus e & e^* \\ [1, 4] & e^* & \ominus e \\ [2, 3] & e^* & \ominus e \\ [2, 4] & \ominus e & e^* \\ [3, 4] & e & \ominus e \end{bmatrix}.$$

Tous les mineurs d'ordre 3 sont équilibrés, et la condition (i) est donc remplie. Cependant, on a

$$\det(\mathcal{M}^{(2)}(A)_{[2,5|1,3]}) = \begin{vmatrix} \det A_{[1,3|1,2]} & \det A_{[1,3|2,3]} \\ \det A_{[2,4|1,2]} & \det A_{[2,4|2,3]} \end{vmatrix} = e$$

ce qui contredit la seconde condition de compatibilité. Le Théorème affirme alors que le système  $Ax \nabla \varepsilon$  n'a pas de solution. On peut aussi le vérifier de manière élémentaire comme suit. On a  $\mathcal{M}^{(2)}(A)_{11} = \det A_{[1,2|1,2]} = e$ , d'où l'on déduit que le système  $A_{[1,2|1,2]}x_{[1,2]} \nabla \ominus A_{[1,2|3]}x_{[3]}$  est de Cramer, et donc que si  $x_3$  est nul, il n'admet que des solutions dégénérées. On peut supposer par exemple  $x_3 = \ominus e$ . Alors le déterminant de Cramer associé à  $x_2$  vaut  $\det A_{[1,2|1,3]} = \mathcal{M}_{1,2}^{(2)} = e$ , d'où  $x_2 \nabla e$ . Par ailleurs, le déterminant de Cramer associé à  $x_2$  du système  $A_{[3,4|1,2]}x_{[1,2]} \nabla A_{[3,4|3]}$  vaut  $\mathcal{M}_{6,2}^{(2)} = \ominus e$ , d'où  $x_2 \nabla \ominus e$  ce qui contredit  $x_2$  signé.

On obtient aisément des conditions de compatibilités analogues à (ii) pour des mineurs d'ordre plus petit. De manière précise.

**4.2.4 Proposition** Soient  $1 \leq q \leq p - 1$ ,  $I_1, \dots, I_{q+1}$   $q + 1$  ensembles de lignes, chaque  $I_l$  étant de cardinal  $p - q$ ,  $K = \{k_1, \dots, k_{q+1}\}$  un ensemble de colonnes de cardinal  $q + 1$ . Soit  $M$  la matrice  $(q + 1) \times (q + 1)$  extraite de la matrice des mineurs d'ordre  $p - q$  telle que

$$M_{ij} = \det A_{[I_i|K \setminus \{k_j\}]}.$$

Une condition nécessaire pour que  $Ax \nabla \varepsilon$  admette une solution signée non nulle est que

$$\det M \nabla \varepsilon.$$

Cela résulte évidemment du Lemme suivant.

**4.2.5 Lemme** Pour tout ensemble de lignes  $I$  de cardinal  $p - q$  et pour tout ensemble de colonnes  $K$  de cardinal  $q + 1$ ,

$$\bigoplus_{l \in K} \sigma_{K,l} \det A_{[I|K \setminus \{l\}]} x_l \nabla \varepsilon \quad (4.2.c)$$

où  $\sigma_{K,l} = e$  ou  $\ominus e$ .

**Preuve** S'obtient de manière analogue à la condition (ii) du Théorème 4.2.1. On observe que la condition de Cramer du système

$$A_{[I|K \setminus \{k\}]} \cdot x_{(K \setminus \{k\})} \nabla \ominus A_{[I|K \setminus \{k\}]} \cdot x_{[K \setminus \{k\}]}$$

où  $\ominus A_{[I|K \setminus \{k\}]} \cdot x_{(K \setminus \{k\})}$  est vu comme un second membre constant est:

$$\det A_{[I|K \setminus \{k\}]} x_{(K \setminus \{k\})} \nabla \ominus \left( A_{[I|K \setminus \{k\}]} \right)^{\text{adj}} A_{[I|K \setminus \{k\}]} x_{[K \setminus \{k\}]} ,$$

soit

$$\det A_{[I|K\setminus\{k\})}x_{(K\setminus\{k\})} \nabla \ominus \bigoplus_{l \in K \setminus \{k\}} \left( A_{[I|K\setminus\{k\})} \right)^{\text{adj}} A_{[I|l]} x_l .$$

En projetant sur la  $k$ -ième coordonnée, on obtient

$$\det A_{[I|K\setminus\{k\})}.x_k \nabla \bigoplus_{l \in K \setminus \{k\}} \sigma_{kl} \det A_{[I|K\setminus\{l\})} x_l$$

(on rappelle que la  $l$ -ième composante du vecteur  $B^{\text{adj}} u$  est égale au déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la  $l$ -ième colonne de  $B$  par  $u$ ). Le Lemme en résulte. ■

On pourrait chercher d'autres conditions de compatibilité. Nous ne le ferons pas ici. Il faut bien voir que le procédé d'élimination qui permet de déduire de telles conditions ne fournit en général que des conditions nécessaires (le caractère suffisant sera obtenu seulement dans certains cas par des arguments combinatoires). Le contre exemple suivant montre que pour certaines matrices, les conditions du type ci-dessus sont automatiquement vérifiées pour des mineurs de taille suffisante, ce qui suggère que la compatibilité des systèmes généraux ne s'exprime pas en termes de mineurs.

**4.2.6 Contre exemple** Considérons le système suivant:

$$A = \begin{bmatrix} e & e & e & e \\ e & e & e & \ominus e \\ e & e & \ominus e & e \\ e & e & \ominus e & \ominus e \\ e & \ominus e & e & e \\ e & \ominus e & e & \ominus e \\ e & \ominus e & \ominus e & e \\ e & \ominus e & e \ominus & \ominus e \end{bmatrix}, \quad Ax \nabla \varepsilon . \quad (4.2.d)$$

Le Lemme suivant affirme que les mineurs de taille suffisante d'une matrice à coefficients de module  $e$  sont équilibrés.

**4.2.7 Lemme** Pour toute matrice carrée  $A$  de taille supérieure ou égale à 3 telle que  $|A_{i,j}| = e$ , on a  $\det A = e^\bullet$ .

Moyennant ce Lemme, il est clair que  $\mathcal{M}^{(4)}(A)$  et  $\mathcal{M}^{(3)}(A)$  sont totalement équilibrées, et que de plus le rang mineur de  $\mathcal{M}^{(2)}(A)$  ne saurait être plus grand que 2. Ainsi, les conditions de la proposition 4.2.4 sont automatiquement vérifiées. Cependant,  $Ax \nabla \varepsilon$  n'a pas de solution. En effet, aucun des  $x_i$  ne peut être nul (sinon, on retrouve le système incompatible de l'exemple 4.2.3). On a donc  $x_1 = x_2$  ou  $x_1 = \ominus x_2$ . Dans les deux cas, 4 des 8 équations (4.2.d) sont automatiquement vérifiées et il reste encore le système incompatible  $4 \times 3$  de l'exemple 4.2.3. Ceci montre que le système (4.2.d) n'admet pas de solution.

**Preuve** du lemme 4.2.7. Dès qu'une sous matrice de  $A$  est de déterminant  $e^\bullet$ , comme la sous matrice complémentaire est de déterminant non nul, on a  $\det A = e^\bullet$ . Si donc l'un des coefficients de  $A$  est  $e^\bullet$ , c'est évident. On peut ainsi toujours supposer quitte à multiplier les deux premières lignes et la seconde colonne par  $\ominus e$  que

$$A_{[1,2|1,2]} = \begin{bmatrix} e & e \\ e & \ominus e \end{bmatrix}$$

Alors, en supposant de même  $A_{1,3} = e$ , on a

$$A_{[1,2|3]} = \begin{bmatrix} e \\ e \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} e \\ \ominus e \end{bmatrix} .$$

Dans le premier cas,  $\det A_{[1,2|1,3]} = e^\bullet$ , dans le second,  $\det A_{[1,2|2,3]} = e^\bullet$ , d'où la conclusion. ■

#### 4.2.8 Contre exemple

Considérons le système

$$\begin{cases} e^\bullet x \oplus y \nabla \varepsilon \\ x \oplus e^\bullet y \nabla \varepsilon \end{cases} . \quad (4.2.e)$$

Si on élimine  $x$  ou  $y$ , on trouve les conditions triviales  $e^\bullet x \nabla \varepsilon$  et  $e^\bullet \nabla \varepsilon$ . Cependant, toute solution signée de (4.2.e) vérifie  $|x| = |y|$ . C'est dire que les arguments d'élimination ne suffisent pas à caractériser les solutions signées des systèmes d'équilibres linéaires.

## 5 Existence de solutions signées d'équilibres linéaires

On a vu ci-dessus que dans  $\mathbb{S}_{\max}$ , les conditions de Cramer sont nécessaires. Le résultat suivant affirme que l'on peut résoudre  $Ax \nabla b$  dès que  $\det A \neq \varepsilon$  (et donc même dans le cas dégénéré  $\det A \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet$ ).

**5.0.1 Théorème** *Soit  $A$  une matrice carrée à coefficients dans  $\mathbb{S}_{\max}$  de déterminant non nul (mais éventuellement équilibré). Il existe au moins une solution signée à  $Ax \nabla b$ .*

Nous donnerons de ce résultat deux preuves, une algébrique fondée sur des algorithmes itératifs, la seconde un peu plus longue dans l'esprit des techniques de Gondran et Minoux, faisant usage du théorème de Frobenius-König.

## 6 Algorithme de Jacobi

Nous introduisons tout d'abord une nouvelle relation plus fine que  $\nabla$  :

$$x \nabla| y \Leftrightarrow x \nabla y \text{ et } |x| = |y|,$$

ce qui se lit “ $x$  équilibre  $y$  en valeur absolue” Nous écrirons comme dans l'algorithme de Jacobi classique

$$A = D \oplus U \oplus L$$

avec  $U$  triangulaire supérieure,  $L$  triangulaire inférieure et  $D$  diagonale. La bonne notion de dominance diagonale dans  $\mathbb{S}_{\max}$  est la suivante:

**6.0.1 Définition (Dominance diagonale)** *La matrice  $A$  est à diagonale dominante si*

$$|\det A| = \left| \bigotimes_i A_{ii} \right| .$$

**6.0.2 Théorème (Algorithme de Jacobi)** *Soit  $A$  une matrice carrée de déterminant non nul à diagonale dominante.*

1/ *On peut choisir une suite  $\{x^p\}$  de vecteurs signés satisfaisant:*

- (i)  $\varepsilon = x^0 \preceq x^1 \preceq \dots \preceq x^p \preceq \dots$
- (ii)  $Dx^{p+1} \nabla \ominus (U \oplus L)x^p \oplus b$ .

2/ La suite  $x^p$  est stationnaire après  $n$  itérations (à savoir  $x^n = x^{n+1} = \dots$ ), et  $x^n$  est une solution de  $Ax \nabla b$

3/ On a  $|x^n| = |\det A|^{-1}|A^{\text{adj}}b|$ .

Avant que de démontrer le Théorème 6.0.2, nous donnons un exemple:

**6.0.3 Exemple** Nous appliquons l'algorithme de Jacobi au système suivant:

$$\begin{bmatrix} 5 & \ominus 0 & 3 \\ 1 & 3 & \ominus 1 \\ 3 & \ominus 2 & 1^\bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} \ominus 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec  $|\det A|^{-1}|A^{\text{adj}}b| = [0 \ 1 \ 2]^t$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1^1 \nabla \ominus 1 \\ 3x_2^1 \nabla 4 \\ 1^\bullet x_3^1 \nabla 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^1 = \ominus -4 \\ x_2^1 = 1 \\ x_3^1 = -1 \text{ ou } \ominus -1, \text{ choisissons } x_3^1 = -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1^2 \nabla 0x_2^1 \ominus 3x_3^1 \ominus 1 = \ominus 2 \\ 3x_2^2 \nabla \ominus 1x_1^1 \oplus 1x_3^1 \oplus 4 = 4 \\ 1^\bullet x_3^2 \nabla \ominus 3x_1^1 \oplus 2x_2^1 \oplus 0 = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 = \ominus -3 \\ x_2^2 = 1 \\ x_3^2 = 2 \text{ ou } \ominus 2, \text{ disons } x_3^2 = 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1^3 \nabla \ominus 5 \\ 3x_2^3 \nabla 4 \text{ et } x_3^3 \geq x_3^2 \Rightarrow \\ 1^\bullet x_3^3 \nabla 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^3 = \ominus 0 \\ x_2^3 = 1 \\ x_3^3 = 2 \end{array} \right.$$

D'autres choix pour  $x_3^1$  and  $x_3^2$  fournissent l'autre solution:  $x_1^3 = 0, x_2^3 = 1, x_3^3 = \ominus 2$ .

Nous montrons maintenant le Théorème 6.0.2.

## 6.1 Existence de la suite $\{x^p\}$

Nous montrons par récurrence l'existence de la suite  $\{x^p\}$ .

A/Cas où la matrice  $D$  est inversible La condition (ii) est alors équivalente à:

$$(ii') \quad x^{p+1} \nabla \ominus D^{-1}(U \oplus L)x^p \oplus D^{-1}b$$

Supposons construits  $\varepsilon = x^0 \preceq x^1 \preceq \dots \preceq x^p \preceq x^{p+1}$  vérifiant (ii'). Via le lemme évident

**6.1.1 Lemme**  $a \nabla b$  et  $a \in \mathbb{R}_{\max}^\vee \Rightarrow a \preceq b$ .

$$(ii') \Rightarrow x^{p+1} \preceq \ominus D^{-1}(U \oplus L)x^p \oplus D^{-1}b \tag{6.1.a}$$

L'application  $x \mapsto D^{-1}(U \oplus L)x \oplus D^{-1}b$  est croissante, comme  $x^p \preceq x^{p+1}$ , (6.1.a) entraîne

$$x^{p+1} \preceq \ominus D^{-1}(U \oplus L)x^{p+1} \oplus D^{-1}b. \tag{6.1.b}$$

L'on peut donc choisir  $x^{p+2} \in (\mathbb{R}_{\max}^\vee)^n$  tel que

$$x^{p+1} \preceq x^{p+2} \preceq \ominus D^{-1}(U \oplus L)x^{p+1} \oplus D^{-1}b \quad (6.1.c)$$

et  $|x^{p+2}| = |\ominus D^{-1}(U \oplus L)x^{p+1} \oplus D^{-1}b|$ , ce qui achève la récurrence.

**B/Cas général** Maintenant, les éléments de la diagonale sont non nuls mais peut-être équilibrés. Une remarque permet de se ramener à la démonstration précédente:

**6.1.2 Lemme** Soit  $a \neq \varepsilon$ . On définit

$$\tilde{a} = \begin{cases} a^{-1} & \text{si } a \text{ inversible} \\ (|a|^{-1})^\bullet & \text{si } a \text{ équilibré} \end{cases}$$

Alors, pour tout  $x \in \mathbb{S}_{\max}$ ,

$$ax \mid \nabla \mid b \iff x \mid \nabla \mid \tilde{a}b$$

**Preuve** Immédiate en regardant les signes à gauche et à droite des équilibres. ■

On définit la matrice diagonale  $\tilde{D}$  (telle que  $[\tilde{D}]_{ii} = \tilde{D}_{i,i}$ ), et la preuve de A/ vaut encore à condition de remplacer  $D^{-1}$  par  $\tilde{D}$ .

## 6.2 Stationnarité de la suite $\{x^p\}$

Pour voir que  $x^p$  est stationnaire, nous introduisons  $\hat{x}^p = |x^p|$ . La récurrence (ii) donne

$$\hat{x}^{p+1} = M\hat{x}^p \oplus |D|^{-1}|b|$$

où  $M = |D|^{-1}|U \oplus L|$ . Soit

$$\hat{x}^{p+1} = (\text{Id} \oplus M \oplus \dots \oplus M^p)|D|^{-1}|b|$$

On a:

**6.2.1 Lemme** Si  $A$  est à diagonale dominante, alors  $M = |D|^{-1}|U \oplus L|$  n'a pas de circuits de poids strictement positif.

**Preuve** On a  $M_{ij} = |a_{ii}|^{-1}|a_{ij}|$  pour  $i \neq j$ . Supposons un circuit de longueur  $k$  de poids  $> 0$ , pour fixer les idées:

$$|a_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1}a_{23}\dots a_{k-1,k-1}^{-1}a_{k-1,k}a_{kk}^{-1}a_{k1}| > 0$$

alors il est clair que la permutation  $\sigma$  définie par:  $1 \xrightarrow{\sigma} 2 \mapsto 3 \mapsto \dots \mapsto k \mapsto 1$  et  $\sigma(i) = i$  ailleurs vérifie  $\bigotimes_{i=1}^n |a_{i\sigma(i)}| > |\det A|$ , ce qui est contredit le fait que la diagonale principale est dominante. ■

On peut donc appliquer le théorème de Carre-Gondran-Minoux (cf. [48], p.72, Théorème 1) à la matrice  $M$ . La somme  $M^* = \text{Id} \oplus M \oplus M^2 \oplus \dots \oplus M^p \oplus \dots$  est donc atteinte à partir du rang  $n - 1$ . Comme

$$|x^{p+1}| = (\text{Id} \oplus M \oplus \dots \oplus M^p)|D|^{-1}|b|$$

on a

$$|x^n| = |x^{n+1}| = \dots = |M^*|D|^{-1}|b|. \quad (6.2.a)$$

$x^n$  et  $x^{n+1}$  étant signés,  $x^n \preceq x^{n+1}$  et  $|x^n| = |x^{n+1}|$  entraînent  $x^n = x^{n+1}$ . En reportant dans (ii),

$$Dx^n \mid \nabla \mid \ominus (U \oplus L)x^n \oplus b$$

soit  $Ax^n \mid \nabla \mid b$ , ce qui achève la preuve de 2/.

### 6.3 Etoiles et cofacteurs

L'assertion 3/ est une conséquence de:

**6.3.1 Lemme**  $(|D|^{-1}|U \oplus L|)^*|D|^{-1} = |\det A|^{-1}|A^{\text{adj}}|$ .

Nous déduisons ce lemme d'un résultat du à Yoeli ([102], Théorème 4). Yoeli considère des permanents au lieu des déterminants. Le Théorème 4 de [102] s'écrit dans notre formalisme:

**6.3.2 Théorème (Yoeli)** *Supposons  $A$  telle que (i):  $|A| \succeq \text{Id}$  et (ii):  $|A|$  n'aie pas de circuits de poids  $\succ e$ , alors*

$$|A^{\text{adj}}| = |A|^* . \quad (6.3.a)$$

Notons que les conditions (i) et (ii) entraînent que tous les termes diagonaux de  $A$  sont de module  $e$ . Nous aurons besoin d'un Lemme qui interprète les termes du développement du déterminant en termes de chemins, le Théorème de Yoeli étant un sous-produit de ce Lemme. Etant donné un chemin  $p = (i_1, \dots, i_k)$  de  $i_1$  à  $i_k$ , on note  $w_A(p) = A_{i_1 i_2} \dots A_{i_{k-1} i_k}$ . Si  $i_k = i_1$ , le chemin sera qualifié de circuit. On dira que le circuit  $c$  passe par l'arc  $(ij)$  s'il existe  $l$  tel que  $i = i_l$ ,  $j = i_{l+1}$  (avec la convention  $k + 1 = 1$ ).

**6.3.3 Lemme** *On a pour  $i \neq j$ ,*

$$|a_{ij}\text{cof}_{ij}A| = \bigoplus_c w_{|A|}(c) \quad (6.3.b)$$

où la somme est prise sur tous les circuits élémentaires  $c$  passant par l'arc  $(ij)$ .

Le terme  $a_{ij}\text{cof}_{ij}A$  correspond aux termes de  $\det A$  associées aux permutations  $\sigma$  telles que  $\sigma(i) = j$ . En décomposant  $\sigma$  en produit de cycles, et compte tenu de  $|A_{ii}| = e$ , on a immédiatement l'égalité (6.3.b). Comme  $p$  est un chemin élémentaire de  $i$  à  $j$ ssi  $(p, j)$  est un circuit élémentaire passant par l'arc  $(ij)$ , on en déduit immédiatement l'égalité (6.3.a), du moins pour les coefficients hors-diagonaux. On observe que  $|\text{cof}_{ii}A| = e$  (en décomposant les permutation on produit de cycles, on trouve  $|\text{cof}_{ii}A| \preceq e$ , en considérant la permutation identité, on trouve compte tenu de  $|A_{ii}| = e$ ,  $|\text{cof}_{ii}A| \succeq e$ ), ce qui montre le Théorème 6.3.2. ■

**Preuve de 6.3.1.** La matrice  $|D|^{-1}A$  vérifie les conditions du Théorème 6.3.2. On a donc:

$$(|D|^{-1}A)^{\text{adj}} = (|D|^{-1}|A|)^*$$

Or

$$\begin{aligned} (|D|^{-1}|A|)^* &= (|D|^{-1}|D \oplus U \oplus L|)^* = \\ &= (\text{Id} \oplus |D|^{-1}|U \oplus L|)^* = \\ &= (|D|^{-1}|U \oplus L|)^* \end{aligned}$$

La conclusion résulte de

$$(|D|^{-1}|A|)^{\text{adj}} = |A^{\text{adj}}| |\det A|^{-1} |D| \quad (6.3.c)$$

laquelle identité est une conséquence des deux résultats suivants:

**6.3.4 Lemme** *Supposons  $C$  inversible, alors*

$$(CB)^{\text{adj}} = B^{\text{adj}}C^{\text{adj}} . \quad (6.3.d)$$

### 6.3.5 Lemme Supposons $C$ inversible, alors

$$(\det C)^{-1}C^{\text{adj}} = C^{-1} . \quad (6.3.e)$$

Ces lemmes se vérifient de manière élémentaires pour les matrices diagonales et les matrices de permutation qui, d'après l'étude des matrices inversibles réalisée au chapitre 0, engendrent le groupe linéaire de  $\mathbb{S}_{\max}^n$ . ■

Ici s'achève la preuve de 3/, et celle du Théorème 6.0.2.

**6.3.6 Remarque** Si ni  $C$  ni  $B$  ne sont inversibles, on a en général seulement un équilibre au lieu de l'identité (6.3.d), comme il résulte de I.2.1.4.

## 7 Algorithme de Gauss-Seidel

**7.0.1 Théorème** Soit  $A$  une matrice carrée de déterminant non nul à diagonale dominante.

1/ On peut choisir une suite  $x^p$  telle que

- (i)  $\varepsilon = x^0 \preceq x^1 \preceq \dots \preceq x^p \preceq \dots$
- (ii)  $(D + U)x^p \nabla \ominus Lx^{p-1} \oplus b$
- (iii)  $|x^p| = |\det(A)^{-1}(D \oplus U)^{\text{adj}}||Lx^{p-1} \oplus b|$

2/ La suite  $x^p$  est stationnaire après  $n$  itérations ( $x^n = x^{n+1} = \dots$ ) et  $x^n$  est solution de  $Ax \nabla b$ .

3/ On a  $|x^n| = |\det A|^{-1}|A\text{adj}b|$ .

**7.0.2 Exemple** Nous considérons à nouveau le système traité en 6.0.3. On a:

$$\begin{cases} 1 \bullet x_3^1 \nabla 0 & \text{par exemple, } x_3^1 = -1 \\ 3x_2^1 \nabla 0 \oplus 4 & x_2^1 = 1 \\ 5x_3^1 \nabla 0x_2^1 \ominus 3x_3^1 \ominus 1 = \ominus 2 & x_1^1 = \ominus -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \bullet x_3^2 \nabla \ominus 3x_1^1 \oplus 2x_2^1 \oplus 0 = 3 & \text{par exemple } x_3^2 = 2 \\ 3x_2^2 \nabla \ominus 1x_1^1 \oplus 1x_3^2 \oplus 4 = 4 & x_2^2 = 1 \\ 5x_1^2 \nabla 0x_2^2 \ominus 3x_3^2 \ominus 1 = \ominus 5 & x_1^2 = \ominus 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \bullet x_3^3 \nabla \ominus 3x_1^2 \oplus 2x_2^2 \oplus 0 = 3 & x_3^3 = 2 = x_3^2 \\ 3x_2^3 \nabla \ominus 1x_1^2 \oplus 1x_3^3 \oplus 4 = 4 & x_2^3 = 1 = x_2^2 \\ 5x_1^3 \nabla 0x_2^3 \ominus 3x_3^3 \ominus 1 = \ominus 5 & x_1^3 = \ominus 0 = x_1^2 \end{cases}$$

On a retrouvé la solution  $(\ominus 0, 1, 2)^T$ . La solution est atteinte au bout de deux itérations au lieu de 3.

**7.0.3 Lemme** Soit  $N = |\det(A)^{-1}(D \oplus U)^{\text{adj}}|$ . On a

$$N = \bigoplus_{i=0}^{n-1} (|D|^{-1}|U|)^i = (|D|^{-1}|U|)^* . \quad (7.0.a)$$

**Preuve** Il suffit de le vérifier pour  $D = \text{Id}$  et  $\det A = e$ . On a

$$|(\text{Id} \oplus U)_{ij}^{\text{adj}}| = |U^*|_{ij}$$

qui n'est autre que le Théorème de Yoeli 6.3.2 appliqué à  $A = \text{Id} \oplus U$ . ■

#### 7.0.4 Lemme *L'étoile de la matrice $NL$ est finie.*

**Preuve** du Lemme 7.0.4. On se ramène au cas où  $D = \text{Id}$  et  $\det A = e$ . La matrice  $A$  n'admet alors aucun circuit de poids strictement positif, donc  $A^*$  est finie. On a  $(NL)^* = (U^*L)^* \preceq (A^*A)^* \preceq (A^*)^* \preceq A^*$ , d'où le résultat. ■

**Preuve** du Théorème 7.0.1. On montre par une preuve analogue à §6.1 qu'il existe  $x^p$  croissant tel que  $x^0 = \varepsilon$  et

$$\begin{aligned} x_n^p &|\nabla| a_{nn}^{-1}(Lx_{p-1} \oplus b), \\ x_{n-1}^p &|\nabla| a_{n-1n-1}(Lx_{p-1} \oplus b \ominus a_{n-1n}x_n^p) \\ &\dots \end{aligned}$$

La stationnarité s'obtient comme en §6.2 en faisant usage du Lemme 7.0.4.

## 8 Preuve directe du Théorème 5.0.1

### 8.1 Préliminaires

On appelle diagonales de la matrice  $A$  les  $n$ -uplets de la forme  $(a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{n\sigma(n)})$  où  $\sigma$  est une permutation de  $\{1, \dots, n\}$ . On appellera poids de cette diagonale le produit  $w_\sigma = \bigotimes_i a_{i\sigma(i)}$ . Rappelons deux faits bien connus de la théorie des matrices à coefficients positifs ou nuls et de la théorie des graphes:

**8.1.1 Théorème (Frobenius-König)** *A a toutes ses diagonales de poids nul si et seulement si il existe une sous-matrice de A de taille  $s \times t$ , avec  $s + t = n + 1$ .*

**8.1.2 Corollaire (König)** *Soient  $A \in \mathbb{N}^{n \times n}$  et  $p \in \mathbb{N}$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i)  $\forall i, \sum_j a_{ij} = \sum_j a_{ji} = p$ ,
- (ii) *A est somme de p matrices de permutation.*

Nous renvoyons le lecteur à [66] pour la preuve du Théorème de Frobenius-König, Le corollaire 8.1.2 s'en déduit aisément: on montre qu'une matrice vérifiant (i) ne peut vérifier la condition de Frobenius-König, d'où il résulte que l'on peut soustraire à  $A$  une diagonale (c'est à dire, comme  $A$  est à coefficients entiers, une matrice de permutation). La conclusion résulte alors d'une récurrence immédiate sur  $p$ . Nous renvoyons le lecteur non convaincu à la preuve du Théorème de Birkhoff [66], qui est analogue.

De cela, on déduit un résultat qui nous sera utile.

**8.1.3 Lemme** Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice  $n \times n$  dont les coefficients  $a_{ij}$  commutent. Pour tout entier  $p \geq 1$ , considérons un produit de  $np$  termes:

$$P = \prod_{\alpha \in I} a_{\mu_\alpha \nu_\alpha} ,$$

chaque ligne et chaque colonne étant atteintes  $p$  fois, i.e.

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad & \#\{\alpha \mid \mu_\alpha = i\} = p \\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad & \#\{\alpha \mid \nu_\alpha = j\} = p . \end{aligned}$$

Alors,  $|P| \leq |\det A|^p$ .

**Preuve :** On montre qu'il existe  $p$  permutations  $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \mathfrak{S}_n$ , telles que:

$$P = \left( \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_1(i)} \right) \otimes \left( \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_2(i)} \right) \otimes \dots \otimes \left( \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_p(i)} \right)$$

ce qui donnera immédiatement le Lemme. On associe pour cela à  $A$  la matrice  $B = (b_{ij}) \in (\mathbb{N})^{n \times n}$  définie par:

$$b_{ij} = \#\{\alpha \in I \mid \mu_\alpha = i \text{ et } \nu_\alpha = j\} .$$

Il est clair que  $B$  vérifie la condition (i) du Corollaire 8.1.2. On peut donc écrire  $B$  comme somme de  $p$  matrices de permutation, soit  $B = S_1 + \dots + S_p$ . En réordonnant les termes dans le produit  $P$ , on obtient la formule requise. ■

## 8.2 Lemme fondamental

Soit  $A \in (\mathbb{S}_{\max})^{n \times n}$  et  $b \in (\mathbb{R}_{\max})^n$ . On note  $D_i$  le  $i$ -ième déterminant de Cramer. On appelle *poids* de la diagonale associée à la permutation  $\sigma$ , ou plus simplement poids de  $\sigma$  le produit  $w(\sigma) = a_{1\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a_{n\sigma(n)}$ .

**8.2.1 Définition** On note  $\mathfrak{S}_{\max}(A)$  l'ensemble des diagonales de poids maximum:

$$\mathfrak{S}_{\max}(A) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid |w_\sigma(A)| = |\det A|\}$$

Le développement de  $D_{\sigma(i)}$  par rapport à la  $\sigma(i)$ -ième colonne donne

$$D_{\sigma(i)} = \bigoplus_{k=1}^n b_k \text{cof}_{k\sigma(i)}(A) \tag{8.2.a}$$

de sorte qu'on a évidemment pour toute permutation  $\sigma$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $|D_{\sigma(i)}| \geq |b_i \text{cof}_{i\sigma(i)}(A)|$ . Comme  $\mathbb{R}_{\max}$  est totalement ordonné, il existe un indice  $j(i)$  tel que  $|D_{\sigma(i)}| = |b_{j(i)} \text{cof}_{j(i)\sigma(i)}(A)|$ . Lorsque  $\sigma$  est de poids maximal, on montre que la multi-application  $i \mapsto j(i)$  admet un point fixe.

**8.2.2 Lemme** Pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_{\max}(A)$ , il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que:

$$|D_{\sigma(i)}| = |b_i \text{cof}_{i\sigma(i)}(A)| .$$

**Preuve :** Prenons  $\sigma \in \mathfrak{S}_{\max}(A)$ , et supposons par l'absurde que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$|D_{\sigma(i)}| \succ |b_i \text{cof}_{i\sigma(i)}(A)| .$$

Quitte à permuter les lignes de la matrice  $A$ , on peut supposer  $\sigma = \text{Id} \in \mathfrak{S}_{\max}(A)$ . On a donc:

$$\forall i, |b_i \text{cof}_{ii}(A)| \prec |D_i| .$$

Comme  $\text{Id} \in \mathfrak{S}_{\max}(A)$ , on a  $|\det A| = |a_{ii} \text{cof}_{ii}(A)| \neq \varepsilon$ . On peut donc diviser les inégalités précédentes par  $|\text{cof}_{ii}(A)|$ , et alors:

$$\forall i, |b_i| \preceq \frac{|a_{ii} D_i|}{|\det A|}$$

Comme  $\mathbb{R}_{\max}$  est totalement ordonné, on a  $|D_i| = |\bigoplus_{k=1}^n b_k \text{cof}_{ki}(A)| = |b_{\varphi(i)} \text{cof}_{\varphi(i)i}(A)|$ , pour un certain indice  $\varphi(i) \neq i$ . En itérant le procédé:

$$|D_{\varphi(i)}| = |b_{\varphi^2(i)} \text{cof}_{\varphi^2(i)\varphi(i)}(A)|$$

avec  $\varphi^2(i) = \varphi(\varphi(i)) \neq \varphi(i)$ , etc. Comme  $\varphi$  n'a qu'un nombre fini de valeurs, on finit par cycler:

$$\text{il existe } k, p \text{ tels que } \varphi^p(k) = \varphi(k)$$

On pourra supposer par exemple  $\varphi(1) = 2, \varphi(2) = 3, \dots, \varphi(p) = 1$ .

$$\begin{aligned} |b_1| &\prec \frac{|a_{11} \text{cof}_{21}(A)b_2|}{|\det A|} \\ |b_2| &\prec \frac{|a_{22} \text{cof}_{32}(A)b_3|}{|\det A|} \\ &\dots \\ |b_p| &\prec \frac{|a_{pp} \text{cof}_{1p}(A)b_1|}{|\det A|} \end{aligned}$$

En éliminant  $b_2, \dots, b_n$ :

$$|b_1| \prec \frac{|a_{11} \text{cof}_{21}(A)a_{22} \text{cof}_{32}(A) \dots a_{pp} \text{cof}_{1p}(A)b_1|}{|\det A|^p}$$

et en simplifiant par  $|b_1| \neq \varepsilon$ :

$$e \prec \frac{|a_{11} \text{cof}_{21}(A)a_{22} \text{cof}_{32}(A) \dots a_{pp} \text{cof}_{1p}(A)|}{|\det A|^p} .$$

Il est clair que le numérateur  $P$  du second membre satisfait les hypothèses du Lemme 8.1.3, ce qui conduit à une absurdité. ■

### 8.3 Seconde preuve

Nous donnons une preuve directe d'un résultat analogue au Théorème 6.0.2 (quoique un peu plus faible).

**8.3.1 Théorème** Soit  $A \in (\mathbb{S}_{\max})^{n \times n}$  telle que  $\det A \neq \varepsilon$ . Pour tout  $b \in (\mathbb{S}_{\max})^n$ , il existe  $x \in (\mathbb{S}_{\max}^\vee)^n$ , tel que:

- (i)  $Ax \nabla b$
- (ii)  $|x| \preceq \frac{|A^{\text{adj}} b|}{|\det A|}$

*l'égalité étant réalisée pour au moins l'une des composantes de (ii).*

**Preuve :** par récurrence sur la taille de la matrice. Le cas scalaire déjà étudié montre le théorème à l'ordre 1. Supposons le théorème démontré pour des matrices de taille  $n - 1$ . Quitte à permute les lignes de la matrice  $A$ , on peut supposer  $\text{Id} \in \mathbb{S}_{\max}(A)$ . Par application du Lemme de point fixe 8.2.2, il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $|D_i| = |b_i \otimes_{j \neq i} a_{j,j}|$ , par exemple  $i = n$ . On a alors la partition de  $A$  et de  $b$ :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{1n} \\ A_{n1} & a_{1n} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} B_1 \\ b_n \end{bmatrix}$$

avec  $|\det A| = |a_{nn} \det A_{11}|$  et  $|D_n| = |b_n \det A_{11}|$ . De

$$\frac{|a_{nn} D_n|}{|\det A|} = |b_n|$$

il ressort que l'on peut prendre  $x_n = \frac{|D_n|}{|\det A|}$  ou  $x = \ominus \frac{|D_n|}{|\det A|}$  tel que  $a_{nn} x_n \nabla b_n$  et  $|a_{nn} x_n| = |b_n|$  [si  $b_n$  et  $a_{nn} \in \mathbb{S}_{\max}^{\vee}$  prendre  $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ , sinon, un signe arbitraire convient]. On applique l'hypothèse de récurrence à:

$$A_{11} X_1 \nabla B_1 \ominus A_{1n} x_n$$

Il existe donc  $X_1 \in (\mathbb{S}_{\max}^{\vee})^{n-1}$  tel que:

$$A_{11} X_1 \oplus A_{1n} x_n \nabla B_1 \text{ et} \\ |X_1| \preceq \frac{|A_{11}^{\text{adj}}(B_1 \ominus A_{1n} x_n)|}{|\det A_{11}|}$$

Il reste à montrer:

- (a)  $|A_{n1} X_1| \preceq |a_{nn} x_n|$  de sorte que  $A_{n1} X_1 \oplus a_{nn} x_n \nabla b_n$
- (b)  $|X_1| \preceq \frac{|A^{\text{adj}} b|}{|\det A|}$  restreint aux  $n - 1$  premières coordonnées

(a): on a

$$|A_{n1} X_1| \preceq \frac{|A_{n1} A_{11}^{\text{adj}} B_1|}{|\det A_{11}|} \oplus \frac{|A_{n1} A_{11}^{\text{adj}} A_{1n} x_n|}{|\det A_{11}|} \stackrel{\text{def}}{=} [1] \oplus [2]$$

La formule de développement par blocs du déterminant donne:

$$|\det A| = |a_{nn} \det A_{11} \ominus A_{n1} A_{11}^{\text{adj}} A_{1n}| \succeq |A_{n1} A_{11}^{\text{adj}} A_{1n}| , ,$$

d'où

$$[2] \preceq \frac{|(\det A)x_n|}{|\det A_{11}|} = |a_{nn} x_n| = |b_n|$$

D'autre part:

$$|\det \begin{bmatrix} A_{11} & B_1 \\ A_{n1} & b_n \end{bmatrix}| = |b_n \det A_{11}| = |b_n \det A_{11} \ominus A_{n1} A_{11}^{\text{adj}} B_1|$$

montre que  $|A_{n1} A_{11}^{\text{adj}} B_1| \preceq |b_n \det A_{11}|$ , d'où  $[1] \preceq |b_n|$ , ce qui montre (a).

(b): nous le vérifions par exemple pour la première coordonnée de  $X_1$ . On veut montrer

$$|(X_1)_1| \stackrel{\text{def}}{=} |x_1| \preceq \frac{|(A^{\text{adj}} b)_1|}{|\det A|} = \frac{|\det \begin{bmatrix} B_1 & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}|}{|\det A|}$$

avec des notations évidentes. Or

$$|x_1| \preceq \frac{|(A_{11}^{\text{adj}} B_1)_1|}{|\det A_{11}|} \oplus \frac{|(A_{11}^{\text{adj}} A_{1n})_1 x_n|}{|\det A_{11}|} \stackrel{\text{def}}{=} [3] \oplus [4]$$

avec

$$[3] = \frac{|a_{nn}|}{|\det A|} \otimes |\det \begin{bmatrix} B_1 & A_{12} & \dots & A_{1n-1} \end{bmatrix}|$$

et

$$[4] = \frac{|b_n|}{|a_{nn}|} \otimes \frac{|a_{nn}|}{|\det A|} \otimes |\det \begin{bmatrix} A_{1n} & A_{12} & \dots & A_{1n-1} \end{bmatrix}|$$

[3] et [4] sont donc deux des termes correspondant au développement de

$$|\det \begin{bmatrix} B_1 & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}|$$

par rapport à la dernière ligne. On a donc  $|X_1| \preceq \frac{|A^{\text{adj}} b|}{|\det A|}$  (restreint aux  $n-1$  premières coordonnées), ce qui montre le point (b) et achève la récurrence. ■

### 8.3.2 Exemple

Considérons

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\det A = 2.2.3 \oplus 0.2.4 \oplus 1.0.0 \ominus 1.2.4 \oplus 0.0.3 \ominus 2.2.0 = 7 \oplus 6 \oplus 1 \ominus 7 \ominus 3 \ominus 4 = 7 \ominus 7 = 7^\bullet \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet$ . Le second déterminant de Cramer vaut:

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 7^\bullet$$

On a donc  $\frac{|D_2|}{|\det A|} = 0 = \frac{|b_2|}{|a_{22}|} = \frac{2}{2}$ . On pose  $x_2 = 0$  tel que  $a_{22}x_2 = b_2$ , et l'on résout le système de taille 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \oplus 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ce qui donne  $D \stackrel{\text{def}}{=} \det A(2|2) = 5^\bullet$ ,  $D_{x_1} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \ominus 7$ ,  $D_{x_3} = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 5$ . On a

$\frac{D_{x_3}}{|D|} = \frac{5}{5} = 0 = \frac{b_3}{a_{33}}$ . On pose donc  $x_3 = 0$ , et en reportant dans la première équation:  $2x_1 \nabla 1 \ominus 4 = \ominus 4$ . On prend donc  $x_1 = (2)^{-1}(\ominus 4) = \ominus 2$  et l'on vérifie que:

$$\begin{bmatrix} 4^\bullet \\ 2^\bullet \\ 3^\bullet \end{bmatrix} = \ominus 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \oplus 0 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

lequel équilibre donne lieu à l'égalité dans  $\mathbb{R}_{\max}$ :

$$0 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \oplus 0 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \oplus 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## 9 Systèmes homogènes carrés

On étudie maintenant l'existence de solutions signées au système de  $n$  équilibres homogènes à  $n$  inconnues

$$Ax \nabla \varepsilon .$$

**9.0.1 Théorème** Soit  $A \in (\mathbb{S}_{\max})^{n \times n}$ . Les deux propositions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $\det A \nabla \varepsilon$
- (ii) Il existe  $x \in (\mathbb{S}_{\max}^\vee)^n$  tel que  $Ax \nabla \varepsilon$ .

**Preuve :** (ii) $\Rightarrow$ (i) est une conséquence des formules de Cramer déjà établies. Nous montrons (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons  $\det A \nabla \varepsilon$ . Le déterminant peut être équilibré pour l'une des trois raisons suivantes.

### 9.0.2 Cas d'équilibre du déterminant

Cas 9.1:  $\det A = \varepsilon$  (nullité)

Cas 9.2: On a une permutation  $\sigma$  telle que  $\det A = \bigotimes_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet$  (une diagonale maximale est équilibrée)

Cas 9.3: On a deux permutations  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  telles que  $\det A = \text{sgn}\sigma_1 \bigotimes_{i=1}^n a_{i\sigma_1(i)} \oplus \text{sgn}\sigma_2 \bigotimes_{i=1}^n a_{i\sigma_2(i)}$ , avec  $\bigotimes_{i=1}^n a_{i\sigma_1(i)}$  et  $\bigotimes_{i=1}^n a_{i\sigma_2(i)} \in \mathbb{S}_{\max}^\vee \setminus \{\varepsilon\}$  (les poids de deux permutations distinctes de poids maximal  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont de de signe opposé).

### 9.1 Cas de nullité du déterminant

D'après le Théorème de Frobenius-König 8.1.1, on peut mettre  $A$  sous la forme

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon_{p \times q} & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

où  $p + q = n + 1$ ,  $C \in \mathbb{S}_{\max}^{(n-p) \times q}$ . On cherche des solutions telles que  $x_{q+1..n} = \varepsilon$ . On a donc  $n - p = q - 1$ , et il suffit de résoudre le système  $Cy \nabla \varepsilon$  qui a strictement plus d'inconnues que d'équations. Si ce système admet un mineur d'ordre  $n - p$  non équilibré, on applique le Théorème 6.0.2 et l'on obtient une solution signée non nulle de  $Cy \nabla \varepsilon$ . Dans le cas contraire, on applique par récurrence le Théorème 9.0.1 à un sous système carré  $C'y' \nabla \varepsilon$  obtenu en rendant nulles certaines coordonnées de  $y$ .

### 9.2 Cas d'équilibre d'une permutation de poids maximal

Quitte à permuter les lignes et colonnes de  $A$ , on supposera:

$$\det A = \bigotimes_{i=1}^n a_{ii} \neq \varepsilon \quad \text{avec } a_{11} \in \mathbb{S}_{\max}^\bullet$$

On partitionne:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{1n} \\ A_{n1} & A_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{avec } A_{nn} \in (\mathbb{S}_{\max})^{(n-1) \times (n-1)}, A_{n1} \in (\mathbb{S}_{\max})^{(n-1) \times 1}, A_{1n} \in (\mathbb{S}_{\max})^{1 \times (n-1)}.$$

On pose  $x_1 = e$ , et l'on résout,  $A_{nn}X_n \nabla \ominus A_{n1}$  via le Théorème 8.3.1, avec  $X_n \in (\mathbb{S}_{\max}^\vee)^{n-1}$  et

$$|X_n| \leq \frac{|A_{nn}^{\text{adj}} A_{n1}|}{|\det A_{nn}|}$$

On remarque que  $|A_{1n}X_n| \leq \frac{|A_{1n}A_{nn}^{\text{adj}} A_{n1}|}{|\det A_{nn}|} \leq |a_{11}|$ , car  $|\det A| = |\bigotimes_{i=1}^n a_{ii}| = |a_{11} \det A_{nn} \ominus A_{1n}A_{nn}^{\text{adj}} A_{n1}| \geq |A_{n1}A_{11}^{\text{adj}} A_{1n}|$ , ce qui montre que  $A_{1n}X_n \oplus a_{11} \nabla \varepsilon$ . En posant

$$x = \begin{bmatrix} e \\ X_n \end{bmatrix},$$

on obtient une solution signée de  $Ax \nabla \varepsilon$ .

### 9.3 Cas d'opposition des signes de deux permutations

Nous nous inspirons ici d'une idée de Gondran & Minoux [47].

**9.3.1 Normalisation** On suppose que  $A_{ii} = e$ , avec  $\det A = e^\bullet$ . Cette hypothèse entraîne que la matrice  $|A|$  n'a pas de circuits de poids strictement supérieur à  $e$  (sinon, on fabriquerait une permutation de poids supérieur à  $\det A = e^\bullet$ ). Il est clair qu'on peut toujours ce ramener à cette situation, après multiplication éventuelle de  $A$  par des matrices de permutation et des matrices diagonales inversibles.

Avec les notations de 9.0.2, on a moyennant cette normalisation  $\sigma_1 = \text{Id}$ . Nous commençons par un Lemme simplificateur:

**9.3.2 Lemme** Soit  $A \in (\mathbb{S}_{\max})^{n \times n}$  telle que

$$(H) : \det A = e \oplus \text{sgn}\sigma_2 \bigotimes_{i=1}^n a_{i\sigma_2(i)} = e^\bullet$$

avec  $\sigma_2 \neq \text{Id}$ , et  $\bigotimes_{i=1}^n a_{i\sigma_2(i)} \nabla \varepsilon$ . Alors, parmi les cycles figurant dans la décomposition de  $\sigma_2$ , il existe un cycle  $\sigma$  d'orbite  $C \subset \{1, \dots, n\}$  tel que:

$$\det A = e^\bullet = e \oplus \text{sgn}\sigma \bigotimes_{j \in C} a_{j\sigma(j)}. \quad (9.3.a)$$

**Preuve** Décomposons  $\sigma_2$  en produit de  $k$  cycles  $c_1, \dots, c_k$  d'orbites respectives  $C_1, \dots, C_k$ . On a  $\text{sgn}\sigma_2 = \text{sgn}c_1 \circ \dots \circ c_k = \text{sgn}c_1 \text{sgn}c_2 \dots \text{sgn}c_k$ , et donc:

$$\text{sgn}\sigma_2 \bigotimes_{i=1}^n a_{i\sigma_2(i)} = \bigotimes_{l=1}^k (\text{sgn}c_l \bigotimes_{j \in C_l} a_{j\sigma_2(j)}) = \ominus e$$

Comme  $|A|$  n'a pas de circuit de poids supérieur à  $e$ , chaque terme  $u_l = \bigotimes_{j \in C_l} a_{j\sigma_2(j)}$  vérifie  $|u_l| \leq e$ . On a en fait  $|u_l| = e$  (sinon, comme  $\bigotimes_i |u_i| = e$ , on aurait l'un des  $|u_i|$  tel que  $|u_i| > e$ ). Comme le produit des  $u_i$  est égal à  $\ominus e$ , et que d'après ce qui précède, pour tout  $i$ ,  $u_i = e$  ou  $u_i = \ominus e$ , l'un au moins est égal à  $\ominus e$ , ce qui montre le Lemme. ■

**9.3.3 Plan** L'idée est maintenant de partitionner la matrice  $A$  sous la forme

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (9.3.b)$$

où la matrice  $A_{11} \in (\mathbb{S}_{\max})^{p \times p}$  correspond à l'orbite du cycle  $\sigma$ , de longueur  $p$ , mis en évidence par le lemme ci-dessus. (a): on va trouver par un procédé explicite une solution déséquilibrée à  $A_{11}X_1 \nabla \varepsilon$ . (b):  $X_1$  étant fixé, on résoudra ensuite  $A_{2,1}X_1 \oplus A_{22}X_2$  par application du théorème (8.3.1). (c): Il suffira pour conclure de vérifier que  $|A_{1,2}X_2| \preceq |A_{11}X_1|$ , ce qui montrera  $A_{1,2}X_2 \oplus A_{11}X_1 \nabla \varepsilon$  et achèvera la démonstration.

Soit  $B$  une matrice  $p \times p$  et  $c$  un cycle d'ordre  $p$  tels que  $B_{ii} = e$  et

$$\det B = e \oplus \text{sgnc} \bigotimes_{i=1}^p B_{ic(i)} = e^\bullet , \quad (9.3.c)$$

tous les  $B_{ic(i)}$  étant signés non nuls. On peut écrire

$$B = \text{Id} \oplus C \oplus B' ,$$

où

$$C_{ij} = \begin{cases} B_{ij} & \text{si } c(i) = j \\ \varepsilon & \text{sinon,} \end{cases}$$

et où la matrice  $B'$  regroupe les autres termes de  $B$ .

**9.3.4 Lemme** *Sous les hypothèses précédentes, on a  $|B|^* = |C|^*$  .*

**Preuve** On a  $C \preceq B$ , donc  $|C|^* \preceq |B|^*$ . Supposons  $|B^*|_{ij} \succ |C|_{ij}^*$ . Comme  $C$  est un cycle, on a  $|C|_{ij}^*|C|_{ji}^* = e$  (i.e. il existe un circuit passant par  $i$  et  $j$  de poids  $e$ ) et donc  $|B|_{ij}^*|C|_{ji}^* \succ e$ . En prenant des chemins réalisant le max dans cette somme, on trouve un circuit de poids supérieur à  $e$ , ce qui est absurde. ■

**9.3.5 Lemme (solution explicite)** *Tous les coefficients de la matrice*

$$M = \text{Id} \ominus C \oplus \dots \oplus (\ominus C)^{p-1} \quad (9.3.d)$$

sont signés. En outre  $BM = (C^*)^\bullet \nabla \varepsilon$ .

**Preuve** Le coefficient  $M_{ij}$  n'est atteint qu'une seule fois dans la somme (9.3.d), il est donc signé. Comme d'après (9.3.c),

$$\bigotimes_i B_{ic(i)} = \ominus \text{sgnc} \bigotimes_i B_{ii} = \ominus \text{sgn}(c) = (\ominus e)^p ,$$

on a  $C^p = (\ominus e)^p \text{Id}$ . Cela entraîne immédiatement que

$$(\text{Id} \oplus C)M = \text{Id}^\bullet \oplus \dots \oplus (C^{p-1})^\bullet = (|C|^*)^\bullet . \quad (9.3.e)$$

D'autre part, Le Lemme 9.3.4 montre que

$$|BM| = |B||C^*| = |B||B|^* \preceq |C|^* . \quad (9.3.f)$$

En additionnant (9.3.e) et (9.3.f), on obtient  $BM \preceq (|C|^*)^\bullet$ . L'autre inégalité est triviale. ■

**9.3.6 Conclusion** Revenons au corps de la démonstration du Cas 9.3. Il résulte du Lemme 9.3.5 que toute colonne  $u$  extraite de la matrice  $M$  vérifie  $A_{11}u \nabla \varepsilon$ . Soit  $u = M_{:,i}$  une telle colonne. D'après le Théorème relatif aux systèmes avec second membre, on peut trouver  $y$  tel que  $A_{21}u \oplus A_{22}y \nabla \varepsilon$ , avec

$$|y| = |\det A_{22}y| \preceq |A_{22}^{\text{adj}} A_{21}u| . \quad (9.3.g)$$

Il suffit de montrer que  $|A_{12}y| \preceq |A_{11}u| = |A_{11}|_{:,i}^*$  (cf. 9.3.5), ce qui, compte tenu de  $A_{11}u = (|A_{11}|_{:,i}^*)^\bullet$ , garantit que  $A_{11}u \oplus A_{12}y \nabla \varepsilon$  et donc que  $x = [u, y]$  est solution de  $Ax \nabla \varepsilon$ . Moyennant la normalisation 9.3.1 et le Théorème de Yoeli, on a  $|A_{22}^{\text{adj}}| = |A_{22}|^*$ . Supposons par l'absurde un indice  $j$  tel que

$$|A_{12}y|_j \succ |A_{11}u| = |A_{11}|_{j,i}^* .$$

Il résulte alors de (9.3.g) que

$$|A_{12}A_{22}^*A_{21}A_{11}^*|_{ji} \succ |A_{11}u| = |A_{11}|_{ji}^* .$$

C'est absurde car le terme à gauche est égal au poids  $w_{|A|}(p)$  d'un chemin  $p$  de  $i$  à  $j$ . Compte tenu de  $|A_{11}|_{ji}^* |A_{11}|_{ij}^* = e$ , on a  $w_{|A|}(p) |A_{11}|_{ij}^* \succ e$ , et en prenant un chemin  $p'$  de  $j$  à  $i$  réalisant le max dans  $|A_{11}|_{ij}^*$ , on obtient un circuit de poids strictement supérieur à  $e$ . ■

## 10 Rangs dans $\mathbb{S}_{\max}$

Nous pensons utile de conclure la partie de cette thèse consacrée à la symétrisation en comparant les diverses notions de rang pertinentes dans le dioïde  $\mathbb{S}_{\max}$ . Dans ce qui suit, nous appellerons *rang à gauche* une application  $\rho$  qui à une matrice  $A$  associe un entier naturel  $\rho(A)$ , tel que pour toute matrice  $U$  de taille admissible, on ait:

$$\rho(UA) \leq \rho(A) . \quad (10.0.a)$$

Un *rang à droite* vérifiera la propriété duale et si  $\rho$  est à la fois un rang à gauche et un rang à droite, on le qualifiera de rang bilatère. L'intérêt de la propriété (10.0.a) est de faire du rang à gauche un invariant de la classe de Green à gauche<sup>3</sup> de la matrice  $A$ . De manière analogue, le rang bilatère est un invariant des classes Green bilatères.

**10.0.1 Définitions et Théorème** Soit une matrice  $A$  à coefficients dans  $\mathbb{S}_{\max}$ . On définit:

- (i)  $n$ , le *rang trivial droit*:  $\underline{n}(A)$  est égal au nombre de lignes non nulles de la matrice  $A$ . C'est un rang à droite.
- (ii)  $p$ , le *rang trivial gauche*:  $\underline{p}(A)$  est égal au nombre de colonnes non nulles de  $A$ . C'est un rang à gauche.
- (iii) rg, le *rang*, rg( $A$ ) est égal à la taille de la plus grande matrice inversible extraite de  $A$ . Il s'agit d'un rang bilatère.
- (iv) rg<sub>Schein</sub>, le *rang de Schein*: rg<sub>Schein</sub>( $A$ ) est égal au plus petit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $A = BC$ , avec  $B \in \mathcal{D}^{n \times k}$  et  $B \in \mathcal{D}^{k \times p}$ . Il s'agit d'un rang bilatère.

<sup>3</sup>On rappelle que la relation de Green à gauche, notée  $\mathcal{L}$ , est définie par  $A\mathcal{L}B$  s'il existe des matrices  $U$  et  $V$  telles que  $A = UB$  et  $B = VA$ . La relation de Green à droite,  $\mathcal{R}$ , est définie dualement. La relation de Green bilatère  $\mathcal{J}$  est définie par  $A\mathcal{J}B$  s'il existe des matrices  $U, V, S, T$  telles que  $A = UBV$  et  $B = SAT$ . Ces notations sont standard en théorie des demi-groupes, voir par exemple [60].

- (v)  $\text{rg}_C$ , le *rang faible par colonne*:  $\text{rg}_C(A)$  est égal à la taille d'une famille génératrice minimale extraite des colonnes de  $A$ . Il s'agit d'un rang à gauche.
- (vi)  $\text{rg}_L$ , le *rang faible par ligne*, défini dualement.
- (vii)  $\text{rg}_m$ , le *rang mineur*:  $\text{rg}_m(A)$  est égal à la dimension maximale d'un mineur inversible de  $A$ . Il s'agit d'un rang bilatère.
- (viii)  $\text{rg}_{sc}$ , le *rang symétrisé par colonne*:  $\text{rg}_{sc}(A)$  est égal au cardinal maximal d'un ensemble de colonnes  $\{A_{\cdot, i_1}, \dots, A_{\cdot, i_k}\}$  tel que  $\bigoplus \lambda_j A_{\cdot, i_j} \nabla \varepsilon$  entraîne que l'un des  $\lambda_j$  n'est pas inversible. Il s'agit d'un rang à gauche.
- (ix)  $\text{rg}_{sl}$ , le *rang symétrisé par ligne*: définition et propriété duales.
- (x)  $\text{rg}_{CG}$ , le *rang de Cunningham-Green*<sup>4</sup>, défini pour une matrice à coefficients dans  $\mathbb{R}_{\max}$ . Il est égal à la taille maximale d'une sous matrice carrée  $B$  extraite de  $A$  telle qu'il existe une unique permutation  $\sigma$  telle que  $|\det B| = \bigotimes_i B_{i\sigma(i)} \neq \varepsilon$ . C'est un rang bilatère.

En outre, ces rangs vérifient les inégalités portées sur la Figure III.2: un arc relie un rang  $\rho'$  (en bas) à un rang  $\rho$  (en haut) si pour toute<sup>5</sup> matrice  $A$ , on a  $\rho(A) \geq \rho'(A)$ .

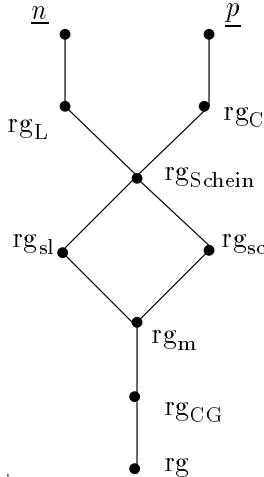


Figure III.2: Rangs dans  $\mathbb{S}_{\max}$

### Preuve de 10.0.1.

- (i),(ii): immédiat.
- (iii): Supposons  $(AB)_{[I][J]} = C$ , avec  $C$  inversible et  $I, J$  de cardinal égal à  $\text{rg}(AB)$ . Quitte à ignorer certaines lignes de  $A$  et colonnes de  $B$ , on peut supposer  $A = A_{[I]}$  et  $B = B_{[J]}$ . On a alors  $AB = C$ , donc  $A$  est inversible à droite, et par 0.2.2.5, il existe une matrice monomiale inversible de taille  $\text{rg}(AB)$  extraite de  $A$ . On en déduit  $\text{rg}(A) \geq \text{rg}(AB)$  et de même  $\text{rg}(B) \geq \text{rg}(AB)$  ce qui montre que  $\text{rg}$  est un rang bilatère.
- (iv),(v),(vi): trivial.
- (vii): cela résulte de la Formule de Binet-Cauchy.

<sup>4</sup>Ce rang est induit par la notion de “forte indépendance” étudiée dans [24].

<sup>5</sup>pour le rang de Cunningham-Green, on suppose que  $A$  est à coefficients dans  $\mathbb{R}_{\max}$

(viii): si l'on a une combinaison linéaire des colonnes de  $A$  équilibrée, soit  $Ax \nabla \varepsilon$ , on a  $B Ax \nabla \varepsilon$ , d'où il résulte de  $\text{rg}_{\text{sc}}$  est un rang à gauche. Preuve duale pour (ix).

(x): Soit une sous matrice  $H$  extraite de  $AB$  et vérifiant la condition (x). On traite le cas où  $H = AB$ , le cas général se traitant de manière analogue. La condition (x) entraîne  $\det AB \notin \mathbb{S}_{\max}^{\bullet}$ . Dans Binet-Cauchy,

$$\det AB = \bigoplus_K \det A_{[K]} \det B_{[K]} \oplus T^{\bullet}$$

on a nécessairement  $|T| \prec |\det AB|$ , et donc il existe  $K_0$  tel que:

$$\det AB = \det A_{[K_0]} \det B_{[K_0]} .$$

Posons  $A' = A_{[K_0]}$  et  $B' = B_{[K_0]}$ . Quitte à multiplier à droite et à gauche par des matrices inversibles, on pourra supposer  $B'_{ii} = e$  pour tout  $i$  et  $\det B' = e = \bigotimes_i B'_{ii}$ , et de même pour  $A'$ . Supposons qu'il existe une permutation  $\sigma \neq \text{Id}$  telle que  $\det B' = \bigotimes_i B'_{i\sigma(i)}$ . La permutation  $\sigma$  est de poids  $e = \det A'B'$  pour la matrice  $A'B'$ , la permutation  $\text{Id}$  également, ce qui contredirait (x) pour  $A'B'$ . On a donc  $\text{rg}_{\text{CG}}(AB) \leq \text{rg}_{\text{CG}}(B') \leq \text{rg}_{\text{CG}}(B)$ , et de même  $\text{rg}_{\text{CG}}(AB) \leq \text{rg}_{\text{CG}}(A)$ , ce qui montre que  $\text{rg}_{\text{CG}}$  est un rang bilatère.

Les inégalités de la Figure III.2 s'obtiennent aisément. ■

**10.0.2 Remarque** La notion de rang symétrisé (par ligne ou par colonne) définie ci-dessus revient à étendre à  $\mathbb{S}_{\max}$  la notion suivante de dépendance linéaire introduite par Gondran et Minoux (cf. [47, 49]):

$$\{u_i\}_{i \in I} \text{ dépendante} \Leftrightarrow \exists J, K \subset I, \lambda \in \mathbb{R}_{\max}^n \setminus \{\varepsilon\}, \quad J \cap K = \emptyset \text{ et } \bigoplus_{j \in J} \lambda_j u_j = \bigoplus_{k \in K} \lambda_k u_k .$$



## Chapitre IV

# Résultats supplémentaires de théorie spectrale des matrices

## Introduction

Ce chapitre généralise les résultats de théorie spectrale des matrices irréductibles ( $\max, +$ ) établis dans [23] aux matrices non irréductibles. On caractérise complètement le spectre de ces matrices. Les preuves reposent sur le remplacement de la notion de valeur propre par celles de sous et de sur-valeurs propres (vérifiant  $Au \preceq \lambda u$  ou  $Au \succeq \lambda u$  au lieu de l'égalité). Nous donnons enfin une application de ces techniques à l'estimation du rayon spectral usuel. Soit  $\rho(A)$  le rayon spectral usuel d'une matrice carrée de taille  $n$  à coefficients positifs ou nuls et  $\rho_{\max,\times}(A)$  le rayon spectral dans le demi-corps idempotent  $\mathbb{R}_{\max,\times}^+$ . Nous montrons les inégalités

$$\rho_{\max,\times}(A) \leq \rho(A) \leq n\rho_{\max,\times}(A) . \quad (0.0.a)$$

Ces bornes ne sont cependant pas originales:  $\rho_{\max,\times}(A)$  est par ailleurs caractérisé comme la moyenne géométrique maximale des circuits de la matrice  $A$ . Friedland [39] a montré ces mêmes inégalités à partir de certaines propriétés des puissances de  $A$  pour le produit de Hadamard faisant intervenir cette moyenne géométrique.

## 1 Préliminaires

Nous rappelons d'abord quelques notions classiques.

### 1.1 Graphe associé à une matrice

**1.1.1 Définition** *On appelle graphe associé à la matrice  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  le graphe  $G(A)$  formé d'un ensemble  $S = \{1, \dots, n\}$  de sommets et des arcs  $(j, i) \in S^2$  tels que  $a_{ij} \neq \varepsilon$ .*

**1.1.2 Remarque** Noter l'inversion entre  $(j, i)$  et  $a_{ij}$  dans la définition du graphe. Sans cette inversion, il faudrait étudier les vecteurs propres à gauche, comme dans la littérature sur les chaînes de Markov.

**1.1.3 Exemple** Voir Figure IV.1. On a représenté le coefficient  $a_{ij}$  sur l'arc  $j \mapsto i$ .

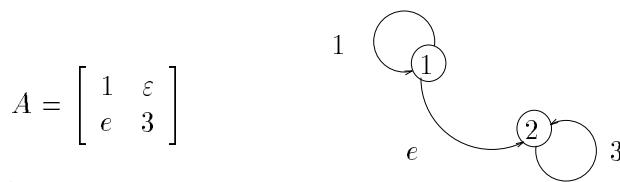


Figure IV.1: Une matrice et son graphe

## 1.1.4 Exemple Cf. Figure IV.2.

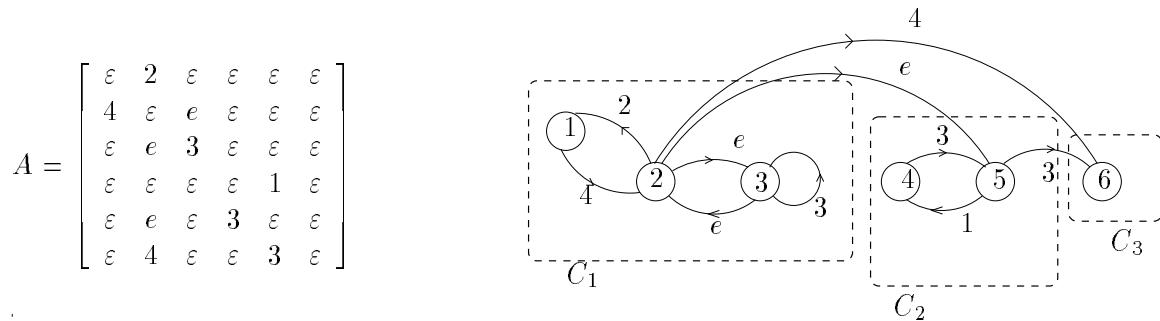


Figure IV.2: Une matrice et son graphe

Si  $a_{ij} \neq \varepsilon$ , on dit que  $j$  *communique avec*  $i$ , ce que l'on note  $j \rightarrow i$ . Etant donné un ensemble de sommets  $I \subset S$ , on définit l'ensemble  $\Gamma(I)$  des successeurs de  $I$  comme suit :

$$\Gamma(I) = \{j \in S \mid \exists i \in I \quad i \rightarrow j\}$$

On notera  $\xrightarrow{*}$  la clôture transitive réflexive de la relation  $\rightarrow$ . On aura donc  $i \xrightarrow{*} j$  si et seulement si il existe dans le graphe un chemin allant de  $i$  à  $j$  (chemin éventuellement trivial si  $j = i$ ).

On notera  $\Gamma^* = \text{Id} \cup \Gamma \cup \Gamma^2 \cup \dots$  On a clairement

$$\Gamma^*(I) = \{j \in S \mid \exists i \in I \quad i \xrightarrow{*} j\} .$$

1.1.5 Définition (Ensemble clos) . On dit qu'un ensemble  $K \subset S$  est clos si  $\Gamma(K) \subset K$ .

On a  $\Gamma(K) \subset K$  si et seulement si  $\Gamma^*(K) = K$ , comme il résulte d'une vérification élémentaire.

## 1.2 Classes

1.2.1 Définition On définit une relation d'équivalence sur  $S$  par :

$$i \mathcal{R} j \Leftrightarrow i \xrightarrow{*} j \text{ et } j \xrightarrow{*} i .$$

Les classes d'équivalence pour  $\mathcal{R}$  seront appelées classes (de connexité) ou encore composantes fortement connexes du graphe.

On notera  $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_p)$  l'ensemble des classes. La relation  $\xrightarrow{*}$  induit une relation d'ordre entre les classes, définie comme suit

$$C_i \preceq C_j \Leftrightarrow C_i \xrightarrow{*} C_j .$$

On constate que

$$\Gamma^*(C_k) = \{C_i \in \mathcal{C} \mid C_k \xrightarrow{*} C_i\}$$

est le *filtre principal*<sup>1</sup> engendré par  $C_k$  pour l'ordre  $\xrightarrow{*}$  (i.e. l'ensemble des classes supérieure à  $C_k$ ). On dira que la classe  $C_k$  est *finale* si elle est maximale pour l'ordre  $\xrightarrow{*}$ . On dira enfin que  $A$  est *irréductible* s'il y a une seule classe ( $p = 1$ ). Un ensemble clos est clairement une union de classes. Nous noterons  $\bar{K}$  le quotient de  $K$  par la relation  $\mathcal{R}$ , i.e. l'ensemble des classes contenues dans  $K$ . Nous dirons qu'un ensemble clos  $K$  est *principal* si  $K$  est de la forme  $\Gamma^*(C_k)$ . Il y a donc précisément  $p$  ensembles clos principaux (autant qu'il y a de classes). L'intérêt des ensembles clos principaux est qu'un ensemble clos quelconque se décompose comme union de tels ensembles. Posons en effet

$$\text{Min } \bar{K} = \{C_i \in \bar{K} \mid C_j \xrightarrow{*} C_i \Rightarrow C_j = C_i\} , \quad (1.2.a)$$

soit l'ensemble des classes minimales dans  $\bar{K}$ .

**1.2.2 Proposition** Pour tout ensemble clos  $K$ , on a

$$K = \bigcup_{C_i \in \text{Min } \bar{K}} \Gamma^*(C_i) .$$

En outre, cette écriture est l'unique décomposition non redondante (i.e. telle qu'on ne puisse ôter aucun terme) de  $K$  en union d'ensemble clos principaux.

**1.2.3 Exemple** Pour la matrice de la Figure IV.2, on a trois classes:

$$C_1 = \{1, 2, 3\}, \quad C_2 = \{4, 5\}, \quad C_3 = \{6\},$$

la dernière étant seule finale.  $\{C_1, C_2, C_3\} = \Gamma^*(C_1)$  est un ensemble clos principal, tout comme le sont  $\{C_2, C_3\} = \Gamma^*(C_2)$  et  $C_3 = \Gamma^*(C_3)$ . Il résulte de 1.2.2 que ce sont les seuls ensembles clos. On a représenté sur la Figure IV.3 le graphe de la matrice et l'ensemble des classes associées, ordonnées par  $\xrightarrow{*}$ .

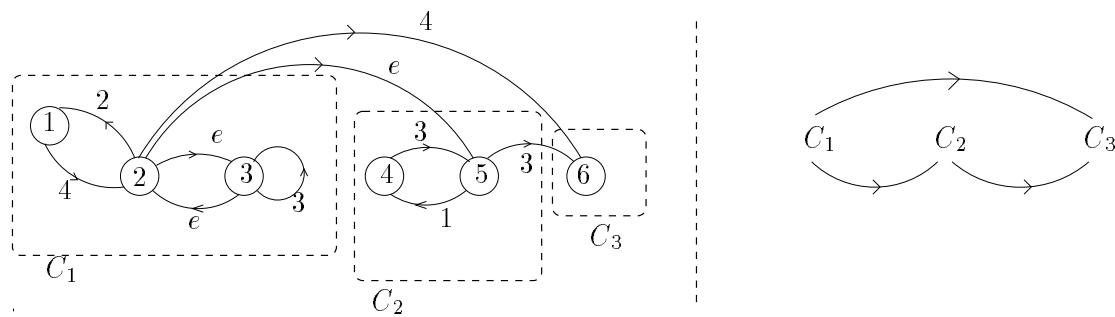


Figure IV.3: Graphe et classes de la matrice IV.2

<sup>1</sup>terminologie empruntée aux treillis, voir à ce propos la Définition 2.1.4 du chapitre préliminaire

### 1.3 Rappels de théorie spectrale des matrices irréductibles

Nous rappelons ici les résultats de Cohen, Dubois, Quadrat et Viot [17]. Nous donnons une preuve essentiellement équivalente à celle de [17], à ceci près que les résultats sont exprimés en termes de sous et de sur-valeurs propres, ce qui nous permettra de les généraliser aux matrices réductibles, et qui servira d'autre part pour le problème d'optimisation des ressources. On étudie les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice  $A$ , i.e. les vecteurs  $u \in \mathbb{R}_{\max}^n \setminus \{\varepsilon\}$  et scalaires  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$  tels que

$$Au = \lambda u . \quad (1.3.a)$$

Le résultat suivant constitue l'analogie dans l'algèbre  $(\max, +)$  du classique théorème de Perron-Frobenius, qui affirme que le rayon spectral d'une matrice irréductible à coefficients dans  $\mathbb{R}^+$  est sa seule valeur propre dans  $\mathbb{R}^+$ .

**1.3.1 Théorème** (Gondran, Minoux [46]) *Une matrice  $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$  irréductible admet une unique valeur propre, notée  $\rho(A)$ , donnée par*

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^n (\operatorname{tr} A^k)^{1/k} . \quad (1.3.b)$$

La quantité  $\rho(A)$  définie en (1.3.b) mérite quelques remarques<sup>2</sup>. Tout d'abord, en termes de circuits du graphe,  $\rho(A)$  se réécrit:

$$\rho(A) = \bigoplus_c w(c)^{\frac{1}{l(c)}} \quad (1.3.c)$$

où le *poids*  $w_A(c)$  d'un circuit  $(i_1, \dots, i_k)$  de *longueur*  $l(c) = k$  est défini par

$$w_A(c) = A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \dots A_{i_k i_1} . \quad (1.3.d)$$

$\rho(A)$  s'interprète donc comme le poids moyen maximum des circuits du graphe.

**1.3.2 Exemple** Pour la matrice  $A$  donnée en 1.1.4, on a

$$\rho(A) = 3 .$$

On a les propriétés suivantes:

$$\rho_{\max,\times}(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot \rho_{\max,\times}(A) \quad \text{pour tout scalaire,} \quad (1.3.e)$$

$$\rho_{\max,\times}(Q^{-1}AQ) = \rho_{\max,\times}(A) \quad \text{pour toute matrice } Q \text{ inversible.} \quad (1.3.f)$$

La propriété (1.3.e) est évidente. On obtient (1.3.f) en le vérifiant pour les matrices diagonales inversibles et pour les matrices de permutation qui engendrent le groupe linéaire. En fait, on a un résultat un peu plus précis:

**1.3.3 Lemme** *Pour toute matrice  $Q$  inversible, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , les ensembles des poids des circuits de longueur  $k$  pour les matrices  $A$  et  $Q^{-1}AQ$  sont identiques.*

---

<sup>2</sup>Nous renvoyons à Lawler [61], Karp [54] ainsi qu'à Gondran et Minoux [48] (annexe) pour les algorithmes de calcul de  $\rho(A)$ . Voir aussi l'implémentation de l'algorithme de Karp au 2.2.2 du Chapitre VIII

**Preuve** Si  $Q$  est une matrice de permutation, les circuits de  $Q^{-1}AQ$  se déduisent de ceux de  $A$  par renumérotation des sommets, et le résultat est clair. Si  $Q$  est une matrice diagonale inversible, on a pour  $c = (i_1, \dots, i_k)$ , avec la convention  $i_{k+1} = i_1$ ,

$$w_{Q^{-1}AQ}(c) = \bigotimes_{1 \leq r \leq k} Q_{i_r i_r}^{-1} A_{i_r i_{r+1}} Q_{i_{r+1} i_{r+1}} = \bigotimes_{1 \leq r \leq k} A_{i_r i_{r+1}} = w_A(c).$$

■

Nous attaquons maintenant la preuve de 1.3.1. D'abord, une remarque structurelle élémentaire.

**1.3.4 Définition** On appelle support d'un vecteur  $u$  l'ensemble suivant:

$$\text{supp}(u) = \{i \mid u_i \neq \varepsilon\}.$$

**1.3.5 Lemme** Si  $u$  est vecteur propre, alors  $\text{supp}(u)$  est un ensemble clos.

**Preuve** Si  $j \in \text{supp}(u)$ , on a pour  $i \in \Gamma(\{j\})$ ,  $\varepsilon \prec a_{ij}u_j \preceq u_i\lambda$ . Si  $\lambda = \varepsilon$ , on en déduit  $\Gamma(\{j\}) = \emptyset$  et le résultat est trivial. Sinon, on a  $u_i \neq \varepsilon$ , d'où  $i \in \text{supp}(u)$ , ce qui montre que  $\Gamma(\text{supp}(u)) \subset \text{supp}(u)$ .

■

On en déduit alors:

**1.3.6 Corollaire** Si  $A$  est irréductible, un vecteur propre  $u$  a toutes ses composantes différentes de  $\varepsilon$  (i.e.  $\text{supp}(u) = \{1, \dots, n\}$ ).

Rappelons un fait bien connu à propos de  $\rho(A)$ .

**1.3.7 Lemme** La matrice  $A^*$  est finie<sup>3</sup> si et seulement si  $\rho(A) \preceq e$ .

**Preuve du Lemme 1.3.7.** Via 0.4.2.7, on peut décomposer  $A_{ij}^*$  comme somme de termes de la forme  $p_{ij}c_1^{\alpha_1} \dots c_k^{\alpha_k}$  où  $p_{ij}$  est un chemin élémentaire de  $j$  à  $i$  et les  $c_{ij}$  sont des circuits élémentaires. Si  $\rho(A) \preceq e$ , le poids des circuits  $c_1, \dots, c_k$  est majoré par  $e$ , d'où il résulte que le sup dans l'expression  $A_{ij}^* = (\text{Id} \oplus A \oplus \dots \oplus A^n \oplus \dots)_{ij}$  est atteint pour des chemins élémentaires. On a donc que  $A^* = \text{Id} \oplus \dots \oplus A^{n-1}$  est fini. Réciproquement, si l'on a un circuit  $c$  tel que  $w(c) > e$ , on a supposant que  $c$  est de longueur  $k$  et que  $c$  passe par  $i$ , on peut écrire:

$$(A^*)_{ii} \succeq A_{ii}^{lk} \succeq (w(c))^l \rightarrow +\infty$$

lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , d'où il résulte que  $(A^*)_{ii} = +\infty$ .

■

**1.3.8 Lemme (“sur-valeur propre”)** Soit  $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$  irréductible,  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$  et  $\rho(A)$  défini comme en (1.3.b). Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) Il existe  $u \in \mathbb{R}_{\max}^n \setminus \{\varepsilon\}$  tel que  $Au \preceq \lambda u$ ,
- (ii)  $\rho(A) \preceq \lambda$ .

Le vecteur  $u$  associé sera qualifié de “sous-vecteur propre”.

**1.3.9 Lemme (“sous-valeur propre”)** Soit  $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$  et  $\rho(A)$  défini comme en (1.3.b). Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

---

<sup>3</sup>i.e. tous ses coefficients sont finis ou égaux à  $\varepsilon$

- (i) Il existe  $u \in \mathbb{R}_{\max}^n \setminus \{\varepsilon\}$  tel que  $Au \succeq \lambda u$ ,
- (ii)  $\rho(A) \succeq \lambda$ .

Le vecteur  $u$  sera qualifié de sur-vecteur propre. Le procédé suivant permet de construire des sous-vecteurs propres.

**1.3.10 Notation (Matrices  $A_\lambda$ ,  $\tilde{A}$ )** Soit  $\lambda$  un scalaire non nul. On définit  $A_\lambda = \lambda^{-1}A$ . Lorsque  $\rho(A)$  n'est pas nul, on pose  $\tilde{A} = A_{\rho(A)} = (\rho(A))^{-1}A$ .

**1.3.11 Lemme** Si  $\lambda \succeq \rho(A)$ , alors toute colonne non nulle de la matrice  $(A_\lambda)^*$  est sous-vecteur propre pour  $\lambda$ . En particulier, tout colonne non nulle de  $\tilde{A}^*$  est sous-vecteur propre pour  $\rho(A)$ .

**Preuve** On a par homogénéité  $\rho(A_\lambda) = \lambda^{-1}\rho(A)$ . La convergence de la matrice  $(A_\lambda)^*$  résulte du Lemme 1.3.7. L'assertion découle de l'observation suivante:

$$A_\lambda(A_\lambda)^* = (A_\lambda)^+ = \bigoplus_{n \geq 1} (A_\lambda)^n \preceq (A_\lambda)^*. \quad (1.3.g)$$

■

**Preuve** du Lemme 1.3.8. (i) $\Rightarrow$ (ii). On peut écrire:

$$\forall k, \quad A^k u \preceq \lambda^k u,$$

d'où

$$\forall i, k \quad A_{ii}^k u_i \preceq \lambda^k u_i$$

et comme tous les  $u_i$  sont non nuls (via 1.3.6), on a en simplifiant

$$\forall i, k \quad (A_{ii}^k)^{\frac{1}{k}} \preceq \lambda, \quad (1.3.h)$$

soit en sommant:

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^n (\text{tr } A^k)^{\frac{1}{k}} = \bigoplus_{i=1}^n (A_{ii}^k)^{\frac{1}{k}} \preceq \lambda. \quad (1.3.i)$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Réciproquement, le Lemme 1.3.11 garantit l'existence d'un sous vecteur propre lorsque  $\lambda \neq \varepsilon$ . Si  $\lambda = \varepsilon$ , on a  $\rho(A) = \varepsilon$ , la matrice  $A$  est sans circuits, donc nilpotente. Soit  $p$  le plus grand  $p$  tel que  $A^p \neq \varepsilon$ . On aura  $Au \preceq \varepsilon u$  en prenant  $u$  égal à une colonne non nulle de  $(A^p)$ . Cela montre le Lemme 1.3.8. ■

**Preuve** du Lemme 1.3.9. (i) $\Rightarrow$ (ii). Choisissant  $u_i \neq 0$ :

$$\lambda u_i \preceq (Au)_i = A_{i,i_2} u_{i_2} \quad (1.3.j)$$

pour un certain  $i_2$  réalisant le max dans  $(Au)_i$ . En appliquant le même argument à  $i_2$ , et en continuant de même, on obtient une suite  $\{i_p\}_{p \geq 1}$  à valeurs dans  $\{1, \dots, n\}$ , et donc on a des indices  $q$  et  $k \leq n$  tels que  $i_{q+k} = i_q$ . On peut supposer  $q = i$ . On a alors:

$$\lambda u_i \preceq [A \otimes u]_i = A_{i,i_2} u_{i_2}, \quad \lambda u_{i_2} \preceq A_{i_2,i_3} u_{i_3}, \quad \dots \quad \lambda u_{i_k} \preceq A_{i_k,i} u_i, \quad (1.3.k)$$

ce qui, après des substitutions répétées, donne:

$$\lambda^k u_i \preceq A_{i,i_2} A_{i_2,i_3} \dots A_{i_k,i} u_i. \quad (1.3.l)$$

Comme  $u_i \neq 0$ , la moyenne géométrique du circuit  $(i, i_2, \dots, i_k)$  est minorée par  $\lambda$ , d'où  $\lambda \preceq \rho(A)$ .

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons tout d'abord  $\rho(A) \neq \varepsilon$ , et introduisons la notation suivante:

**1.3.12 Notation (Graphe critique)** Les circuits réalisent le max dans (1.3.c) sont qualifiés de *critiques*. On appelle *graphe critique*, noté  $\text{GC}(A)$ , le sous graphe de  $\text{G}(A)$  formé des sommets et arêtes appartenant à un circuit critique. On notera  $\mathcal{C}^c = (C_1^c, \dots, C_q^c)$  l'ensemble des  $q$  composantes fortement connexes du graphe critique.

Soit  $i$  un indice appartenant à un circuit critique de  $A$ . Ce circuit a un poids  $e$  pour la matrice  $\tilde{A}$ . On a alors  $(\tilde{A})_{ii}^+ = e$ , et donc les colonnes

$$(\tilde{A}^*)_{\cdot,i} = \bigoplus_{n \geq 0} (\tilde{A}^n)_{\cdot,i}, \quad (\tilde{A}^+)_{\cdot,i} = \bigoplus_{n \geq 1} (\tilde{A}^n)_{\cdot,i},$$

qui ne diffèrent éventuellement que sur la diagonale en raison du premier terme de la somme ( $\tilde{A}^0 = \text{Id}$ ) sont égales. Il résulte de

$$\tilde{A}(\tilde{A}^*)_{\cdot,i} = (\tilde{A}^+)_{\cdot,i} = (\tilde{A}^*)_{\cdot,i}$$

que le vecteur  $u = (\tilde{A}^*)_{\cdot,i}$  est vecteur propre de  $A$ . Le cas  $\rho(A) = \varepsilon$  se traite de manière analogue à 1.3.8.(ii) $\Rightarrow$ (i). Cela achève la preuve du Lemme 1.3.9. Le Théorème 1.3.1 résulte immédiatement des Lemmes 1.3.8 et 1.3.9. ■

Le résultat suivant, du à Gondran et Minoux [45, 46] (cf. aussi Cunningham-Green [24] et Cohen, Dubois, Quadrat et Viot [23]) caractérise totalement le moduloïde des vecteurs propres de  $A$ .

**1.3.13 Théorème** Soit  $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$  irréductible. Choisissons  $i_1 \in C_1^c, \dots, i_q \in C_q^c$ . La famille formée des colonnes suivantes de  $\tilde{A}^+$ :

$$\{\tilde{A}_{\cdot,i_1}^+, \dots, \tilde{A}_{\cdot,i_q}^+\}$$

est une famille génératrice minimale du moduloïde propre de  $A$  pour la valeur propre  $\rho(A)$ .

C'est ce genre de résultat qu'il s'agissait de généraliser aux matrices réductibles.

## 2 Théorie spectrale des matrices réductibles

### 2.1 Préliminaires

**2.1.1 Notation** Etant donnés deux ensembles d'indices  $I$  et  $J$ , on notera  $A_{[I|J]}$  la matrice extraite de  $A$  formée des lignes d'indice  $i \in I$  et des colonnes d'indice  $j \in J$ , et  $u_{[I]}$  le vecteur formé des coefficients d'indice  $i \in I$  de  $u$ .

On rappelle que toute matrice non irréductible  $B$  peut s'écrire sous la forme:

$$B = P^{-1}AP, \quad \text{avec } A = \begin{bmatrix} A_{[C_1|C_1]} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ * & A_{[C_2|C_2]} & \dots & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & A_{[C_p|C_p]} \end{bmatrix} \quad (2.1.a)$$

où  $P$  est une matrice de permutation, la matrice  $A$  est une matrice bloc triangulaire, les blocs étant associés aux classes de  $A$ .

## 2.2 Etude du spectre

**2.2.1 Proposition** Soit  $u$  un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$ . On a pour toute classe minimale dans  $\text{supp}(u)$ , soit  $C_i \in \text{Min} \overline{\text{supp}(u)}$  (cf. (1.2.a)),  $\lambda = \rho(A_{[C_i|C_i]})$ .

**Preuve** Si la classe  $C_i$  n'a pas de successeur, l'équation  $Au = \lambda u$  se projette en

$$A_{[C_i|C_i]}u_{[C_i]} = \lambda u_{[C_i]}.$$

La conclusion résulte du Théorème dans le cas irréductible (Théorème 1.3.1) appliqué à  $A_{[C_i|C_i]}$ . ■

**2.2.2 Notation** Dans la suite, nous noterons plus simplement  $\rho(C_i)$  pour  $\rho(A_{[C_i|C_i]})$ .

On traite séparément le cas de la valeur propre nulle, qui est élémentaire.

**2.2.3 Proposition**  $\varepsilon$  est valeur propre si et seulement si il existe des classes  $C_i$  sans successeur réduites à un sommet, avec  $A_{[C_i|C_i]} = \varepsilon$ .

**Preuve** Soit  $C_i = \{r\}$  et  $u^i$  le vecteur tel que  $u_r^i = e$  et  $u_k^i = \varepsilon$  sinon. Comme  $\{r\}$  est sans successeur,  $Au^i = \varepsilon$ . Réciproquement, soit  $u$  un vecteur propre pour la valeur propre  $\varepsilon$ . On tire de  $uA = \varepsilon$  que tous les  $r \in \text{supp}(u)$  sont sans successeurs. ■

La preuve de la Proposition 2.2.3 montre en sus que les  $u^i$  forment une famille génératrice minimale du moduloïde propre pour la valeur propre nulle.

**2.2.4 Théorème** Soit  $K$  un ensemble clos. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) Il existe un vecteur propre de support  $K$
- (ii) Pour tout  $C_i \in \text{Min } \bar{K}$ , on a  $\rho(C_i) = \bigoplus_{C_k \in \bar{K}} \rho(C_k)$ .

**Preuve** (ii)  $\Rightarrow$  (i). Le cas  $\rho(C_i) = \varepsilon$  résultant immédiatement de 2.2.3, nous supposerons  $\rho(C_i) \neq \varepsilon$ .

On forme la matrice  $\tilde{A} = \rho(C_i)^{-1}A_{[K|K]}$ . Par 1.3.7,  $\tilde{A}^+$  converge. On a

$$\tilde{A}\tilde{A}_{:,i}^* = \tilde{A}_{:,i}^+,$$

qui diffère de  $\tilde{A}_{:,i}^*$  seulement peut-être par le coefficient  $\tilde{A}_{i,i}^* = e$ . Si  $i$  appartient à un circuit critique de  $A_{[K|K]}$ , on a  $\tilde{A}_{i,i}^+ = e$ , ce qui montre que la colonne  $\tilde{A}_{:,i}^+ = \tilde{A}_{:,i}^*$  est vecteur propre de  $\tilde{A}$  pour la valeur propre  $e$ . Définissons le vecteur  $v_i$  de taille  $n$  comme suit:

$$(v_i)_k = \begin{cases} \tilde{A}_{k,i}^+ & \text{si } k \in K \\ \varepsilon & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.2.a)$$

(on complète une colonne de  $\tilde{A}^+$  par des  $\varepsilon$ ). Le vecteur  $v_i$  est vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\rho(C_i)$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Il résulte de la Proposition 2.2.1 que  $\lambda = \rho(C_i)$  ne dépend pas de la classe  $C_i \in \text{Min} \overline{\text{supp}(u)}$ . Nous supposerons  $\lambda \neq \varepsilon$ , l'autre cas étant trivial. On a alors, pour toute classe  $C_k \notin \text{Min} \overline{\text{supp}(u)}$

$$\bigoplus_{j \neq k} A_{[C_k|C_j]} u_{[C_j]} \oplus A_{[C_k|C_k]} u_{[C_k]} = \rho(C_i) u_{[C_k]},$$

donc

$$A_{[C_k|C_k]} u_{[C_k]} \preceq \rho(C_i) u_{[C_k]}$$

et par application du lemme 1.3.8:

$$\rho(C_k) \preceq \rho(C_i) .$$

■

**2.2.5 Corollaire** L'ensemble  $\text{spec}(A)$  des valeurs propres de  $A$  est caractérisé par la condition suivante:

$$\lambda \in \text{spec}(A) \Leftrightarrow \lambda = \rho(C_i) \text{ et } \forall C_j \subset \Gamma^*(C_i), \rho(C_j) \preceq \rho(C_i) . \quad (2.2.b)$$

Une classe  $C_i$  de rayon spectral maximal (i.e.  $\rho(C_i) = \rho(A)$ ) vérifie trivialement la condition (2.2.b), ce qui montre que  $\rho(A)$  est toujours valeur propre. Les classes finales vérifient aussi cette condition (il n'y a pas de successeurs autres que la classe elle-même). En outre, le nombre de valeurs propres est borné supérieurement par  $p$  (i.e. le nombre de classes), ce qui est cohérent avec l'unicité de la valeur propre dans le cas irréductible (une seule classe,  $p = 1$ ).

**2.2.6 Exemple** On a représenté la matrice  $A$  de la Figure IV.1 et sa transposée sur la Figure IV.4. On a pour  $A$  deux classes  $C_1 = \{1\}$ ,  $C_2 = \{2\}$ , avec  $C_2 \subset \Gamma^*(C_1)$ . Le support de  $u$  étant clos, on a  $\text{supp}u = \{1, 2\}$  ou  $\text{supp}u = \{2\}$ . Comme  $\rho(C_1) = 1 \not\leq \rho(C_2)$ , la condition du théorème 2.2.4 est violée pour  $K = \{1, 2\}$ . On a donc l'unique valeur propre  $\rho(C_2) = 3$  associée à un vecteur propre de support  $\{2\}$ . Par contre, cette condition est vérifiée pour  $A^T$ , et donc  $\text{spec}A^T = \{\rho(C_1), \rho(C_2)\} = \{1, 3\}$ . Pour unique valeur propre. Contrairement au cas usuel, on a ici:

$$\text{spec}A \neq \text{spec}A^T .$$

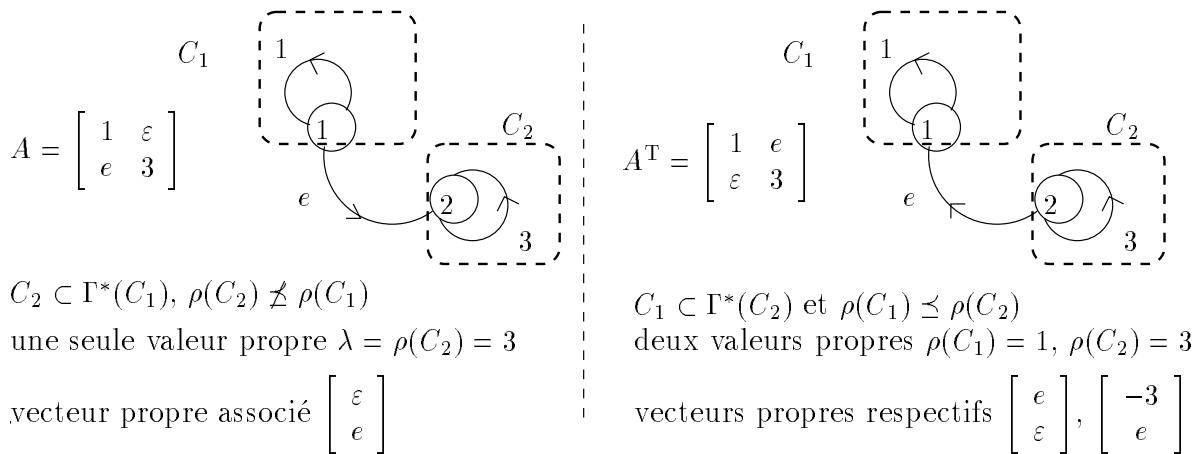


Figure IV.4: Condition de placement des valeurs propres

---

**2.2.7 Exemple** Pour la matrice  $A$  de l'exemple 1.1.4, on a

$$\rho(A[123|123]) = 3, \quad \rho(A[45|45]) = 2, \quad \rho(A[6|6]) = \varepsilon .$$

A l'ensemble clos  $\Gamma^*(C_1)$  (cf. 1.2.3) est associée la valeur propre  $\rho(C_1) = 3$ , à  $\Gamma^*(C_2)$  la valeur propre  $\rho(C_2) = 2$ , et à  $\Gamma^*(C_3)$  la valeur propre  $\rho(C_3) = \varepsilon$ . On a donc

$$\text{spec}(a) = \{3, 2, \varepsilon\} .$$

### 2.3 Vecteurs propres des matrices réductibles

Etant donnée une valeur propre  $\lambda$ , on notera  $\mathcal{K}(\lambda)$  l'ensemble des classes  $C_i$  vérifiant la condition (2.2.b). On appellera graphe critique  $\text{GC}_\lambda$  pour la valeur propre  $\lambda$  l'union de tous les graphes critiques des  $C_i \in \mathcal{K}(\lambda)$ . Pour chaque classe  $C_k \in \mathcal{K}(\lambda)$ , on note  $C_1^c, \dots, C_{r_k}^c$  les  $r_k$  composantes fortement connexes du graphe critique de  $C_k$ . A chaque  $C_k$  on associe une famille de vecteurs  $\mathcal{W}(C_k)$  définie comme suit. On choisit un indice dans chaque composante connexe du graphe critique, soit

$$i_1 \in C_1^c, \dots, i_{r_k} \in C_{r_k}^c .$$

On pose  $K = \Gamma^*(\mathcal{K}(\lambda))$ ,  $\tilde{A} = \lambda^{-1} A_{[K|K]}$  et l'on définit les vecteurs  $v_{i_1}^k, \dots, v_{i_{r_k}}^k$  comme dans la première partie de la preuve du Théorème 2.2.4 (cf. (2.2.a)), i.e.

$$(v_{i_l}^k)_m = \begin{cases} \tilde{A}_{mi_l}^+ & \text{si } m \in K \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.3.a)$$

On pose

$$\mathcal{W}(C_k) = \{v_{i_1}^k, \dots, v_{i_{r_k}}^k\}, \quad \mathcal{V}(\lambda) = \bigcup_{C_k \in \mathcal{K}(\lambda)} \mathcal{W}(C_k) . \quad (2.3.b)$$

Le lemme suivant montre que la famille  $\mathcal{W}(C_k)$  ne dépend essentiellement pas du choix des indices  $i_1, \dots, i_{r_k}$ .

**2.3.1 Lemme** *Si  $i_s$  et  $i_t$  appartiennent à la même composante fortement connexe du graphe critique, alors les vecteurs  $v_{i_s}^k$  et  $v_{i_t}^k$  sont proportionnels.*

**Preuve** Montrons que les deux colonnes  $\tilde{A}_{:,i_s}^+$  et  $\tilde{A}_{:,i_t}^+$  sont proportionnelles. Comme  $i_s$  et  $i_t$  appartiennent à la même composante fortement connexe du graphe critique, on a  $\tilde{A}_{i_t i_s}^+ \tilde{A}_{i_s i_t}^+ = e$ , et donc, pour tout  $r$ :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{r,i_s}^+ &\succeq \tilde{A}_{r,i_t}^+ \tilde{A}_{i_t i_s}^+ \\ &\succeq \tilde{A}_{r,i_s}^+ \tilde{A}_{i_s,i_t}^+ \tilde{A}_{i_t,i_s}^+ \\ &\succeq \tilde{A}_{r,i_s}^+ \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que

$$\tilde{A}_{:,i_s}^+ = \tilde{A}_{:,i_t}^+ \tilde{A}_{i_t,i_s}^+ .$$

■

**2.3.2 Proposition** *La famille  $\mathcal{V}(\lambda)$  définie en (2.3.b) est non redondante (cf. 0.3.2.1).*

**Preuve** Comme le rang faible est minoré par le rang mineur, il suffit de voir que cette famille est de rang mineur maximal. Nous montrons que le déterminant extrait de la matrice  $\{v_{i_\ell}^k\}_{k,\ell}$  correspondant aux lignes et colonnes d'indices  $i_\ell$ , pour  $1 \leq \ell \leq r_k$  et  $C_k \in \mathcal{K}(\lambda)$ , est non équilibré. Comme ce déterminant est bloc-triangulaire, il suffit de montrer que le déterminant de chaque bloc (correspondant à une valeur de  $k$  donnée) est non équilibré. Il faut donc voir que:

$$\det \tilde{A}_{[i_1 \dots i_{r_k}] | [i_1 \dots i_{r_k}]}^+ \not\not \varepsilon . \quad (2.3.c)$$

Tout les circuits de la matrice  $\tilde{A}_{[C_k] | [C_k]}^+$  étant de poids inférieur à  $e$ , il s'ensuit que pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{i_1 \dots i_{r_k}\}$ ,  $\prod_s \tilde{A}_{s\sigma(s)}^+ \preceq e$  (décomposer  $\sigma$  en produit de cycles). En outre, l'égalité est atteinte seulement pour la permutation identité (sinon, le poids d'un cycle non trivial serait égal à  $e$ , contredisant le fait que  $i_s$  et  $i_t$  appartiennent à des composantes fortement connexes différentes du graphe critique). Ainsi, le déterminant (2.3.c) est égal à  $e$ , et n'est donc pas équilibré. ■

**2.3.3 Remarque** Le non équilibre du déterminant dans la preuve ci-dessus montre non seulement qu'aucun vecteur de la famille  $\mathcal{V}(\lambda)$  n'est combinaison linéaire des autres, mais aussi que cette famille est indépendante au sens des combinaisons linéaires symétrisées.

**2.3.4 Théorème** *La famille  $\mathcal{V}(\lambda)$  forme une famille génératrice minimale du moduloïde propre pour la valeur propre  $\lambda$ .*

**Preuve** Quitte à se restreindre à la sous matrice correspondant à  $\Gamma^*(\mathcal{K}(\lambda))$ , on peut supposer que  $\rho(A) = \lambda$ . On prétend qu'un vecteur propre  $u$  pour la valeur propre  $\lambda$  vérifie

$$u = \tilde{A}^+ u = \bigoplus_{k \in \mathcal{K}(\lambda), j_s \in G^c(\lambda)} v_{j_s}^k u_{j_s} \quad (2.3.d)$$

ce qui montrera que la famille est génératrice, et donnera le résultat par 2.3.2. On a, comme les  $v_{j_s}^k$  correspondent à des colonnes de  $\tilde{A}^+$ :

$$\tilde{A}^+ u = \bigoplus_k \tilde{A}_{\cdot,k}^+ u_k \succeq \bigoplus_{k \in \mathcal{K}(\lambda), j_s \in G^c(\lambda)} v_{j_s}^k u_{j_s} . \quad (2.3.e)$$

On a d'autre part en choisissant des indices réalisant le max dans  $u = \tilde{A}u$ :

$$\begin{aligned} u_i &= \tilde{A}_{ii_2} u_{i_2} \\ u_{i_2} &= \tilde{A}_{i_2 i_3} u_{i_3} \dots \end{aligned}$$

En poursuivant de la sorte, on finit par obtenir un indice  $i_k$  appartenant à un circuit  $c$  tel que  $w_{\tilde{A}}(c) = e$ , i.e. un circuit critique. On a alors:

$$\tilde{A}_{r,i}^+ u_i = \tilde{A}_{ri} \tilde{A}_{i_2} \dots \tilde{A}_{i_{k-1} i_k} u_{i_k} \preceq \tilde{A}_{ri_k}^+ u_{i_k}$$

ce qui montre l'inégalité opposée à (2.3.e). ■

Avant de traiter des exemples, nous rappelons deux formules (cf. 0.4.2.6) qui nous permettront de calculer les étoiles de matrices de la forme (2.1.a).

$$\begin{bmatrix} A & \varepsilon \\ B & D \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} A^* & \varepsilon \\ D^* B A^* & D^* \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & \varepsilon \\ B & D \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} A^+ & \varepsilon \\ D^* B A^* & D^+ \end{bmatrix} .$$

**2.3.5 Exemple** Revenons à la matrice  $A$  de l'exemple 1.1.4. On a noté en 1.3.2 que  $\rho(A) = 3$ . Pour  $\Gamma^*(C_1)$ , on a:

$$\tilde{A} = \rho(A)^{-1} A = \begin{bmatrix} \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & -3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -3 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & -3 & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Après calcul:

$$\tilde{A}^+ = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 0 & -3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & -3 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -4 & -5 & -8 & -2 & -2 & \varepsilon \\ -2 & -3 & -6 & 0 & -2 & \varepsilon \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Le graphe critique est réduit aux deux composantes fortement connexes  $\{1, 2\}$  et  $\{3\}$ , ce qui donne la famille génératrice minimale du moduloïde propre pour la valeur propre 3, formée des deux vecteurs suivants:

$$v_1^1 = \tilde{A}_{\cdot,1}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2^1 = \tilde{A}_{\cdot,1}^+ = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ -8 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Pour le second ensemble clos  $\Gamma^*(C_2)$ ,

$$A' = A_{[456|456]} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

On a  $\rho(a') = 2$  et

$$\tilde{A}' = \rho(A')^{-1} A' = \begin{bmatrix} \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}'^+ = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \varepsilon \\ 1 & 0 & \varepsilon \\ 2 & 1 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Il y a une seule composante fortement connexe du graphe critique, donc une famille génératrice minimale pour le moduloïde propre réduite au vecteur suivant:

$$v_1^2 = [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \tilde{A}'_{1,\cdot}] = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Enfin, associé à la valeur propre nulle, on a le vecteur propre suivant:

$$v_1^3 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 2.3.6 Exemple

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix} \tag{2.3.f}$$

On a trois classes  $C_1 = \{1\}$ ,  $\rho(C_1) = 1$ ,  $C_2 = \{2, 3\}$ ,  $\rho(C_2) = 5$ ,  $C_3 = \{4\}$ ,  $\rho(C_3) = 4$ . En outre,  $C_1 \xrightarrow{*} C_2$  et  $C_1 \xrightarrow{*} C_3$ , ce qui donne le graphe représenté sur la Figure IV.5. Il résulte de 2.2.4 que

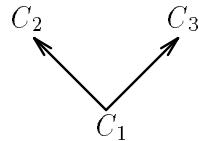


Figure IV.5: Classes de la matrice (2.3.f)

seules  $\rho(C_2)$  et  $\rho(C_3)$  sont valeurs propres, associées aux ensembles clos respectifs  $C_2 = \Gamma^*(C_2)$  et  $C_3 = \Gamma^*(C_3)$ . On a

$$\tilde{A}' = \rho(C_2)^{-1} A_{[C_2|C_2]} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$(\tilde{A}')^+ = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 6 & \varepsilon \end{bmatrix},$$

soit le vecteur propre

$$v_1^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Semblablement,

$$v_1^3 = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}$$

est vecteur propre pour  $\rho(C_3) = 4$ .

### 3 Lien avec le rayon spectral usuel

#### 3.1 Rayon spectral usuel et $(\max, \times)$

##### 3.1.1 Notation (demi-corps $\mathbb{R}_{\max, \times}^+$ )

Dans cette section, nous considérons l'ensemble  $\mathbb{R}^+$  équipé du max et du produit usuel. On obtient de la sorte un demi-corps idempotent, que nous noterons  $\mathbb{R}_{\max, \times}^+$ . On a l'isomorphisme  $\mathbb{R}_{\max, \times}^+ \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ ,  $x \mapsto \log x$ . Nous noterons  $\rho_{\max, \times}(A)$  le rayon spectral d'une matrice  $A$  dans  $\mathbb{R}_{\max, \times}^+$ . Le rayon spectral  $\rho_{\max, \times}(A)$  est caractérisé par la formule (1.3.b), qui se réécrit ici:

$$\rho_{\max, \times}(A) = \max_{1 \leq k \leq n} \max_{i_1, \dots, i_k} \sqrt[k]{A_{i_1, i_2} A_{i_2, i_3} \dots A_{i_k, i_1}}. \quad (3.1.a)$$

Ainsi,  $\rho_{\max, \times}(A)$  est égal à la moyenne géométrique maximale des circuits de  $A$ , au sens de l'algèbre usuelle. Nous noterons

$$A \otimes B : (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_k A_{ik} \otimes B_{kj} = \max_k (A_{ik} B_{kj})$$

le produit de matrice dans  $\mathbb{R}_{\max, \times}^+$ .

**3.1.2 Notation (Rayon spectral usuel)** Dans cette section, nous noterons  $\rho(A)$  le rayon spectral usuel de  $A$  (i.e. le module de la plus grande valeur propre de  $A$ ).

On a l'encadrement suivant du rayon spectral usuel en fonction du rayon spectral ( $\max, \times$ ):

**3.1.3 Théorème** Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}^+$ . On a:

$$\rho_{\max, \times}(A) \leq \rho(A) \leq n\rho_{\max, \times}(A) . \quad (3.1.b)$$

**Preuve** Si  $A$  admet les composantes irréductibles  $A_1, \dots, A_k$ , on a

$$\rho(A) = \max_i \rho(A_i) \quad \text{et} \quad \rho_{\max, \times}(A) = \max_i \rho_{\max, \times}(A_i) .$$

Il suffit donc de prouver le résultat pour une matrice irréductible. D'après un résultat classique de la Théorie de Perron-Frobenius,  $\rho(A)$  est une valeur propre de  $A$ , et le vecteur propre  $u$  associé à ses composantes positives. La démonstration se résume aux deux inégalités suivantes,

$$A \otimes u \leq Au = \rho(A)u \leq nA \otimes u , \quad (3.1.c)$$

soit

$$\forall i, \max_k A_{ik} u_k \leq \sum_k A_{ik} u_k \leq n \max_k A_{ik} u_k$$

qui résultent de la positivité de  $A$  et de  $u$ : Le Théorème 3.1.3 s'obtient en appliquant les Lemmes 1.3.9 et 1.3.8 aux matrices  $A$  et  $nA$  respectivement, avec  $\lambda$  égal au rayon spectral usuel et  $\rho_{\max, \times}$  à la place de  $\rho$ . ■

Les conditions d'égalité pour les bornes sont assez naturelles.

**3.1.4 Proposition** la borne inférieure est atteinte dans le Théorème 3.1.3ssi l'une des composantes irréductibles de  $A$ , disons de taille  $k$ , est égale au produit  $DC$  d'une matrice diagonale  $D$  telle que  $\prod_{j=1}^k D_{j,j} = (\rho(A))^k$  avec une matrice  $C$  associée à un cycle d'ordre  $k$ .

Notons  $J_n$  la matrice  $n \times n$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a:

**3.1.5 Proposition** La borne supérieure est atteinte dans le Théorème 3.1.3ssi  $A$  est sans cycle, ou bien si  $A$  est de la forme

$$A = \alpha D J_n D^{-1} , \quad (3.1.d)$$

où  $D$  est une matrice de permutation à coefficients diagonaux positifs et  $\alpha$  un scalaire positif.

**Preuve** de la Proposition 3.1.4. Quitte à remplacer  $A$  par l'une de ses composantes irréductibles de rayon spectral maximal, on peut supposer  $A$  irréductible. Soit  $c$  un circuit critique de longueur  $k$ . Après réordonnement éventuel des colonnes, on peut supposer  $c = (1, 2, \dots, k)$ . La sous-matrice  $A'$  de taille  $k \times k$  définie pas  $A'_{1,2} = A_{1,2}, \dots, A'_{k,1} = A_{k,1}$  et  $A'_{i,j} = 0$  sinon s'écrit clairement sous la forme  $DC$ , où  $D$  est diagonale, de coefficients diagonaux  $A_{1,2}, \dots, A_{k,1}$  et  $C$  est la matrice associée au cycle  $c$ . Comme  $c$  est critique,  $\rho_{\max, \times}(A)^k = w(c) = \prod_i D_{ii}$ . Si l'on a des coefficients non nuls autres que ceux de  $c$  dans les  $k$  premières lignes de  $A$ , on obtient des inégalités strictes à gauche de (3.1.c), ainsi qu'en (1.3.h) pour  $i$  appartenant au circuit critique, et donc en (1.3.i). Ainsi, les  $k$  premières lignes de  $A$  se réduisent à la composante irréductible  $DC$ . ■

**Preuve** de la Proposition 3.1.5. Le cas où  $A$  est sans circuits est immédiat, et nous supposerons  $\rho_{\max, \times}(A) \neq 0$ . Il suffit de considérer le cas d'une matrice  $A$  irréductible, sinon, on appliquerait

3.1.3 à l'une des composantes irréductibles de  $A$  et l'on obtiendrait un facteur meilleur que  $n$ . En introduisant la matrice diagonale  $D = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$ , on obtient à partir de (3.1.c):

$$D^{-1} A D e_n = n \rho_{\max, \times}(A) \cdot e_n \leq (n D^{-1} A D) \otimes e_n \quad (3.1.e)$$

où  $e_n$  dénote le vecteur dont les  $n$  coefficients sont égaux à 1. Quitte à remplacer  $A$  par

$$A' = \rho_{\max, \times}(A)^{-1} D^{-1} A D ,$$

on supposera  $\rho_{\max, \times}(A) = 1$  et  $\rho(A) = n$ ,  $A$  ayant  $e_n$  pour vecteur propre. Nous montrons par récurrence sur  $n$  la propriété suivante:

$$A \in (\mathbb{R}^+)^{n \times n}, \quad A e_n \geq n e_n \quad \text{et} \quad \rho_{\max, \times}(A) \leq 1 \Rightarrow A = J_n . \quad (3.1.f)$$

On a d'après (1.3.l):

$$n^k \leq (nA)_{i,i_2} \dots (nA)_{i_k,i} \leq \rho_{\max, \times}(nA)^k \leq n^k .$$

On a donc forcément l'égalité dans 1.3.j), i.e.

$$n = n(e_n)_i \leq (Ae_n)_i \leq (nA \otimes e_n)_i = n ,$$

ce qui n'est possible que si  $A_{i,1} = A_{i,2} = \dots = A_{i,n} = 1$ . On a également  $A_{l,i} = A_{l,i}A_{i,l} \leq \rho_{\max, \times}(A)^2 \leq 1$ , et donc:

$$A(i|i)e_{n-1} = A(i|e_n - A(i|i).1) \geq (n-1)e_{n-1} .$$

Comme trivialement,  $\rho_{\max, \times}(A(i|i)) \leq \rho_{\max, \times}(A) \leq 1$ , on applique l'hypothèse de récurrence à  $A(i|i)$ , d'où  $A(i|i) = J_{n-1}$ , ce qui avec  $Ae_n = ne_n$  entraîne  $A_{l,i} = 1$  pour tout  $l \neq i$ . Cela montre  $A = J_n$ . ■

**3.1.6 Remarque** On peut caractériser les matrices de la forme  $A = \alpha DJD^{-1}$  par la propriété suivante: *pour tout circuit c de longueur k, on a*

$$w_A(c) = \alpha^k . \quad (3.1.g)$$

Le Lemme 1.3.3 montre en effet que  $\alpha DJD^{-1}$  satisfait (3.1.g). Réciproquement, supposons (3.1.g) et considérons  $A' = \alpha^{-1} D^{-1} AD$  où  $D = \text{diag}(A_{1,1}, \dots, A_{n,1})$ . On  $w_{A'}(c) = e$  pour tout circuit  $c$ . Comme par construction  $A'_{i1} = e$  pour tout  $i$ , on tire de  $A'_{i1}A'_{1i} = w(1i) = e$   $A'_{1i} = e$ . Ainsi, la première colonne et la première ligne de  $A'$  ne sont formées que de 1. La conclusion résulte d'une récurrence immédiate.

**3.1.7 Remarque** En définissant la matrice  $|A|$ :  $(|A|)_{ij} = |A_{ij}|$ , et de même  $(|u|)_i = |u_i|$ , on obtient la borne  $\rho(A) \leq n \rho_{\max, \times}(|A|)$  pour une matrice quelconque à coefficients complexes. On écrit en effet  $|\lambda u| \preceq |A||u| \preceq n|A| \otimes |u|$  et l'on applique le Lemme 1.3.9.

**3.1.8 Exemple** Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \eta \\ \eta^{-1} & 0 \end{bmatrix} .$$

On est dans le cas d'égalité de la Proposition 3.1.4. Comme le seul circuit de  $G(A)$  est  $(1, 2)$ , on a  $\rho_{\max, \times}(A) = \sqrt{(A_{1,2}A_{2,1})} = \sqrt{(\eta\eta^{-1})} = 1$ . D'autre part,  $\rho(A) = 1$ . Pour  $\eta$  petit, la borne  $\rho_{\max, \times}(A)$  est meilleure que les bornes plus classiques:

$$\|A\|_\infty = \|A\|_2 = \eta^{-1}, \quad \|A\|_1 = \eta + \eta^{-1} .$$

### 3.1.9 Exemple

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} i & -\eta \\ \eta^{-1} & i \end{bmatrix}$$

( $i^2 = -1$ ). On a  $w_A(1) = w_A(2) = i$  et  $w_A(1,2) = -1 = i^2$ , et donc  $A$  vérifie la condition de la Remarque 3.1.6. Ainsi,  $\rho_{\max,\times}(|A|) = 1$ . La borne  $\rho(A) = n\rho_{\max,\times}(|A|)$  est atteinte, puisque la valeur propre de module maximal de  $A$  est  $2i$ .

## 3.2 Applications

On retrouve de la sorte un résultat de Friedland [39] (voir aussi Elsner, Johnson et Dias da Silva's [33]). Rappelons que le produit de Hadamard de deux matrices est défini par:  $(A \odot B)_{i,j} = A_{i,j}B_{i,j}$ . On notera  $A^{\odot k}$  le produit  $A \odot A \odot \dots \odot A$  ( $k$ -fois). En observant que  $\rho_{\max,\times}(A^{\odot k}) = (\rho_{\max,\times}(A))^k$  et en appliquant le Théorème 3.1.3, on obtient

$$\rho_{\max,\times}(A)^k = \rho_{\max,\times}(A^{\odot k}) \leq \rho(A^{\odot k}) \leq n\rho_{\max,\times}(A^{\odot k}) = n\rho_{\max,\times}(A)^k ,$$

et donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(A^{\odot k})^{\frac{1}{k}} = \rho_{\max,\times}(A),$$

ce qui n'est autre que le Théorème 1 de Friedland [39].

On peut donner une autre application à l'estimation asymptotique du rayon spectral de certaines matrices. Ventcel [93] considère des matrices de Markov dont les coefficients non-diagonaux sont de la forme

$$(A_\epsilon)_{i,j} = \exp(-a_{i,j}/\epsilon^2) , \quad (3.2.a)$$

où  $\epsilon$  est un petit paramètre et  $a_{i,j} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Nous considérons ici le cas où les coefficients diagonaux sont aussi de la forme (3.2.a). Notons  $\asymp$  l'équivalence logarithmique, i.e.  $u \asymp v \Leftrightarrow \log u \simeq \log v$ . En posant  $a = (a_{i,j})$  où  $a_{i,j} = -\log A_{i,j}$  et en introduisant

$$\rho_{\min,+}(a) = -\log \rho_{\max,\times}(A) , \quad (3.2.b)$$

notation justifiée par le fait que  $\rho_{\min,+}(a)$  est égal au rayon spectral de  $a$  dans le demi-corps  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ , on obtient:

**3.2.1 Corollaire** *On a  $\rho(A_\epsilon) \asymp \exp(-\rho_{\min,+}(a)/\epsilon^2)$  pour  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .*

**Preuve** On applique le Théorème 3.1.3 et la Formule (3.2.b) à  $A$ . ■

**3.2.2 Remarque (cas symétrique)** Notons que dans le cas symétrique,  $\rho(A)$  se calcule trivialement:

$$\rho_{\max,\times}(A) = \max_{i,j} A_{i,j} . \quad (3.2.c)$$

On observe en effet que le max est atteint dans (3.1.a) pour des poids de la forme  $A_{ii}$  ou  $(A_{ij}A_{ji})^{\frac{1}{2}} = A_{ij}$ .

# **Partie B**

# **Théorie des Systèmes**



# Chapitre V

## Systèmes dynamiques linéaires sur un dioïde

### Introduction

Ici commence la partie relative à la “Théorie des Systèmes” proprement dite. On donne tout d’abord des exemples de systèmes simples linéaires sur certaines structures de dioïdes déjà étudiés. On établit ensuite des résultats de représentation pour ces systèmes. On montre qu’un système linéaire continu se représente par un opérateur à noyau. Dans le cas stationnaire, cet opérateur se réduit à un opérateur de convolution par la réponse impulsionnelle. On caractérise la causalité de manière naturelle. On montre que le rôle de la transformée de Laplace pour les systèmes classiques est ici joué par une transformée de type Fenchel (ou conjugaison convexe). On met en évidence une notion de fonction de transfert, qui représente physiquement le gain du système. Les développements de ce chapitre correspondent essentiellement aux deux papiers publiés en commun avec G.Cohen, R. Nikoukhah, J.P. Quadrat et M. Plus [19, 81]. Le lecteur trouvera des résultats analogues de représentation des endomorphismes continus de moduloides, établis antérieurement par Dudnikov et Samborskii[31, 89]. On trouvera par ailleurs des idées analogues chez Maslov [67]. Les résultats de Dudnikov et Samborskii sont équivalents à notre Théorème 3.1.2.

### 1 Exemples

#### 1.1 Un système continu et son analogue discret

Considérons le système mono-entrée mono-sortie  $\mathcal{S} : u \mapsto y$  représenté à gauche de la Figure V.1. Un fluide circule à travers un long tuyau vers un premier réservoir (vide à la date 0). L’entrée  $u(t)$  représente la quantité *cumulée* de liquide entrée dans le tuyau jusqu’à l’instant  $t$  (la fonction  $t \mapsto u(t)$  est donc croissante, et l’on a  $u(t) = 0$  pour  $t \leq 0$ ). Le liquide met un temps  $t$  à parcourir le tuyau. Le liquide passe du premier au second réservoir à travers une ouverture qui limite le débit instantané à la valeur maximale de  $\beta > 0$ . On note  $y(t)$  le volume de fluide dans le second réservoir à l’instant  $t$ . On a une quantité initiale  $y(0) = c$ .

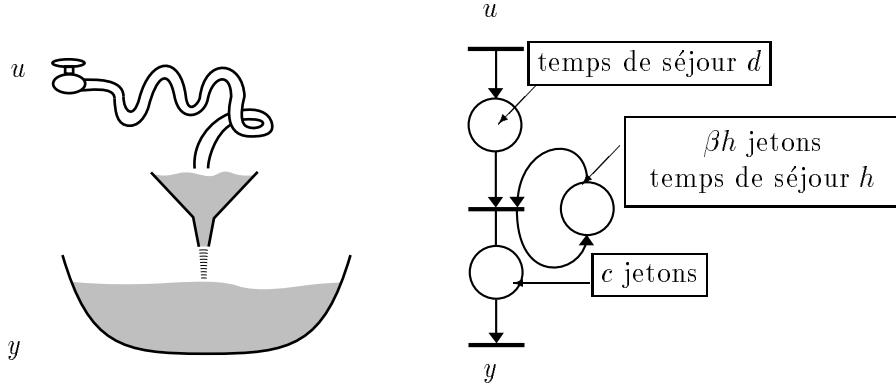


Figure V.1: Système continu et analogue discret

## 1.2 Equations dynamiques

Le débit d'entrée dans le second réservoir étant limité à  $\beta$ , on a:

$$\forall t, \forall \theta \geq 0, \quad y(t + \theta) \leq y(t) + \beta\theta . \quad (1.2.a)$$

D'autre part,

$$\forall t, \quad y(t) \leq u(t - d) + c . \quad (1.2.b)$$

Il en résulte immédiatement que  $\forall t$  et  $\forall \theta \geq 0$ ,

$$y(t) \leq y(t - \theta) + \beta\theta \leq u(t - d - \theta) + c + \beta\theta ,$$

d'où pour tout  $t$ ,

$$y(t) \leq \inf_{\theta \geq 0} [u(t - d - \theta) + c + \beta\theta] = \inf_{\tau \geq d} [u(t - \tau) + c + \beta(\tau - d)] . \quad (1.2.c)$$

Posons

$$k(t) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } t \leq d \\ c + \beta(t - d) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.2.d)$$

et définissons  $\bar{y}$  par:

$$\bar{y}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\tau \in \mathbb{R}} [u(t - \tau) + k(\tau)] . \quad (1.2.e)$$

Toute sortie  $y$  vérifie  $y \leq \bar{y}$ . En outre:

$$\begin{aligned} \bar{y}(t + \theta) &= \inf_{\tau \in \mathbb{R}} [u(t + \theta - \tau) + k(\tau)] \\ &= \inf_{s \in \mathbb{R}} [u(t - s) + k(s + \theta)] \\ &\leq \inf_{s \in \mathbb{R}} [u(t - s) + k(s)] + \beta\theta \\ &= \bar{y}(t) + \beta\theta . \end{aligned}$$

d'où il résulte que  $\bar{y}$  est la solution maximale de (1.2.a). C'est cette solution  $\bar{y}$  qui décrira le comportement physique du système si l'on suppose que le liquide s'écoule aussi rapidement que possible. On a ainsi montré que la sortie au plus tôt du système est représentée par une *inf-convolution* de l'entrée avec la fonction  $k$ . De cela, il résulte immédiatement que le système  $u \mapsto \mathcal{S}(u)$  est  $(\min, +)$  linéaire, i.e. vérifie les deux propriétés suivantes:

$$\begin{array}{lll} \text{min-superposition} & \forall u, u' \in \overline{\mathbb{R}}^+ & \mathcal{S}(\min(u, v)) = \min(\mathcal{S}(u), \mathcal{S}(v)) \\ \text{invariance additive} & \forall \lambda \in \overline{\mathbb{R}} & \mathcal{S}(\lambda + u) = \lambda + \mathcal{S}(u). \end{array}$$

**1.2.1 Remarque** On peut voir le calcul qui précède comme la résolution (en fait le calcul de la solution maximale) de l'équation fonctionnelle  $(\min, +)$ :

$$y(t) = \min\left(\inf_{\theta \geq 0}[y(t - \theta) + \beta\theta], u(t - d) + c\right).$$

### 1.3 Analogue discret

On peut voir le système précédent comme la version continue d'un système à événements discrets. Considérons la version discrétisée suivante de  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{S}_h : \sup y \text{ t.q. } \begin{cases} y(t + h) - y(t) \leq \beta h, \\ y(t) \leq c + u(t - d), \end{cases} \quad (1.3.a)$$

où le temps varie dans  $h\mathbb{Z}$ . La solution maximale de (1.3.a) vérifie clairement la récurrence suivante:

$$\bar{y}(t) = \min(\bar{y}(t - h) + \beta h, c + u(t - d)). \quad (1.3.b)$$

Si  $c$  et  $\beta h$  sont entiers, (1.3.b) n'est autre que l'équation dynamique du graphe d'événements temporisé à droite de la Figure V.1. Un tel graphe correspondrait par exemple au système de production suivant: les pièces rentrent dans un atelier, au bout d'un temps de préparation de  $d$  unités de temps, on les place dans un stock en attente devant un groupe de  $\beta h$  machines identiques travaillant en parallèle. Chaque pièce reste  $h$  unités de temps sur une machine.

On montre en raisonnant comme précédemment que la sortie est donnée par l'inf-convolution discrète:

$$\forall t \in h\mathbb{Z}, \quad \bar{y}(t) = \inf_{\tau \in h\mathbb{Z}}[k(\tau) + u(t - \tau)] \quad (1.3.c)$$

où la fonction  $k$  est la même que dans le cas continu.

### 1.4 Mélangeur

Soient maintenant deux systèmes du type de celui de la Figure V.1, le premier traitant du liquide de couleur rouge, le second du liquide blanc, et un mélangeur produisant du rose à partir de ces deux liquides en proportions égales. Soient  $u_r$  la quantité cumulée de rouge entrée jusqu'à l'instant  $t$ ,  $u_b$  idem pour le blanc. Si le mélange est instantané, la quantité de rose produit est

$$y(t) = \min(u_r(t), u_b(t)).$$

Le système  $(u_r, u_b) \mapsto y$  est clairement  $(\min, +)$ -linéaire. L'analogue discret du mélange est l'opération d'assemblage de deux types de pièces. Dans le langage des graphes d'événements temporisés, on la représenterait par une transition confluente, soit le dessin de la Figure V.2:

### 1.5 Exemple de système $(\max, +)$ linéaire

Nous reprenons l'exemple du limiteur de débit, mais au lieu d'introduire les quantités cumulées  $u(t)$  et  $y(t)$ , nous définissons les deux fonctions suivantes, dites fonctions dateur:

$$u(n) = \text{"première date où la quantité cumulée de liquide entré est au moins égale à } n \text{"} \quad (1.5.a)$$

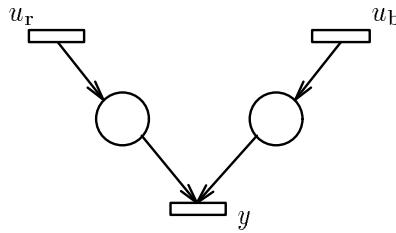


Figure V.2: Mélangeur

La fonction  $n \mapsto y(n)$  est définie de manière analogue pour les quantités sorties. Pour simplifier l'exposé, nous supposons la quantité cumulée entrée croissante (ce qui revient à interdire de retirer du liquide dans les réservoirs d'entrée). La fonction  $u$  définie par (1.5.a) est alors croissante. En raisonnant comme en §1.1, on obtient l'inéquation suivante

$$y(n) \geq \sup_{\nu \geq 0} [\beta^{-1}\nu + u(t - \nu)] . \quad (1.5.b)$$

Si l'on suppose que le liquide s'écoule au plus tôt, la sortie du système est donnée par:

$$\bar{y}(n) = \sup_{\nu \geq 0} [\beta^{-1}\nu + u(t - \nu)] = \sup_{\nu \in \mathbb{R}} [k(\nu) + u(t - \nu)] , \quad (1.5.c)$$

où la fonction  $k$  est donnée par

$$k(\nu) = \begin{cases} \beta^{-1}\nu & \text{si } \nu \geq 0 \\ -\infty & \text{si } \nu < 0 . \end{cases} \quad (1.5.d)$$

La fonction  $\mathcal{S}$  qui à la fonction dateur d'entrée  $u$  associe la fonction dateur au plus tôt de la sortie vérifie les deux propriétés suivantes:

$$\begin{array}{ll} \text{max-superposition} & \forall u, u' \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} \quad \mathcal{S}(\max(u, v)) = \max(\mathcal{S}(u), \mathcal{S}(v)) \\ \text{invariance additive} & \forall \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \quad \mathcal{S}(\lambda + u) = \lambda + \mathcal{S}(u) . \end{array}$$

Le système  $\mathcal{S}$  peut donc être qualifié de  $(\max, +)$ -linéaire.

## 2 Systèmes linéaires

Nous donnons maintenant une théorie générale couvrant en particulier les systèmes décrits en §1.

**2.0.1 Définition (Signaux)** Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde. On appelle ensemble de signaux un sous-moduloïde  $\Sigma$  de  $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$  (cf. 0,3.1.1).

Un signal est donc une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{D}$ . L'ensemble  $\Sigma$  est tel que la somme de deux signaux soit un signal, et le produit d'un signal par un scalaire soit un signal.

**2.0.2 Exemple** L'ensemble des applications croissantes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_{\max}$  est un ensemble de signaux.

**2.0.3 Définition (Système linéaire)** On appelle système linéaire une application  $\mathcal{S} \in \mathbf{L}(\Sigma)$  (cf. 0,3.1.4).

La somme et le produit de systèmes correspondent respectivement à la mise en parallèle et à la mise en série. On notera

$$\mathcal{S}u := \mathcal{S}(u) \quad (2.0.a)$$

de sorte que quand on écrit  $\mathcal{S}u(t)$ , il faut comprendre la valeur de la sortie à l'instant  $t$ , soit  $(\mathcal{S}(u))(t)$ . Un système linéaire vérifie donc les propriétés caractéristiques suivantes:

- (i) Pour toutes entrées  $u, v \in \Sigma$ , on a  $\mathcal{S}(u \oplus v) = \mathcal{S}u \oplus \mathcal{S}v$
- (ii) Pour toute entrée  $u \in \Sigma$  et pour tout scalaire  $\lambda \in \mathcal{S}$ , on a  $\mathcal{S}\lambda u = \lambda \mathcal{S}u$ .

La propriété (i) n'est autre que le “principe de superposition” classique.

**2.0.4 Remarque**  $\Sigma$ , équipé de la loi externe  $\mathsf{L}(\Sigma) \times \Sigma \rightarrow \Sigma, (\mathcal{S}, u) \mapsto \mathcal{S}(u)$ , est un  $\mathsf{L}(\Sigma)$  moduloïde, ce qui justifie la notation (2.0.a).

**2.0.5 Définition (Continuité)** *Le système  $\mathcal{S}$  est dit continu s'il préserve les bornes-sup (cf. 0.2.3.1).*

Dans la suite, nous supposerons l'ensemble  $\Sigma$  des signaux admissibles complet, de sorte qu'un système continu est caractérisé par la propriété suivante: pour toute famille de signaux admissibles  $\{u_i\}_{i \in I} \in \Sigma^I$ , on a

$$\mathcal{S} \oint_{i \in I} u_i = \oint_{i \in I} \mathcal{S}u_i . \quad (2.0.b)$$

On notera  $\mathcal{L}(\Sigma)$  le dioïde complet des systèmes linéaires continus sur  $\mathcal{D}$ , en conformité avec 0.3.1.4.

A titre de curiosité, nous exhibons un système linéaire non continu.

**2.0.6 Contre exemple** Soit le système linéaire sur le dioïde  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ :

$$\overline{\mathbb{R}}_{\min} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\min}, \quad u \mapsto \mathcal{S}u : \quad \mathcal{S}u(t) = \liminf_{s \rightarrow t} u(s) .$$

Ce système vérifie (i) et (ii), il n'est cependant pas continu. Posons en effet

$$u_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 ; \\ -nt & \text{si } 0 < t < \frac{1}{n} ; \\ -1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t . \end{cases}$$

On a pour tout tout  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{S}u_n(0) = 0$ , et

$$\oint_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} u_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 ; \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,  $\mathcal{S} \oint_n u_n(0) = -1 \neq \oint_n \mathcal{S}u_n(0) = 0$ .

Dans la suite, nous considérerons exclusivement des systèmes continus

**2.0.7 Mise en Feedback** On considère le système représenté sur la Figure V.3,(iii). On peut écrire:

$$y = \mathcal{S}_1 x, \quad x = u \oplus \mathcal{S}_2 y \quad (2.0.c)$$

Dans le cas des graphes d'événements temporisés, on a vu qu'à une certaine entrée peuvent correspondre plusieurs comportements du système, et l'on a considéré uniquement le comportement au

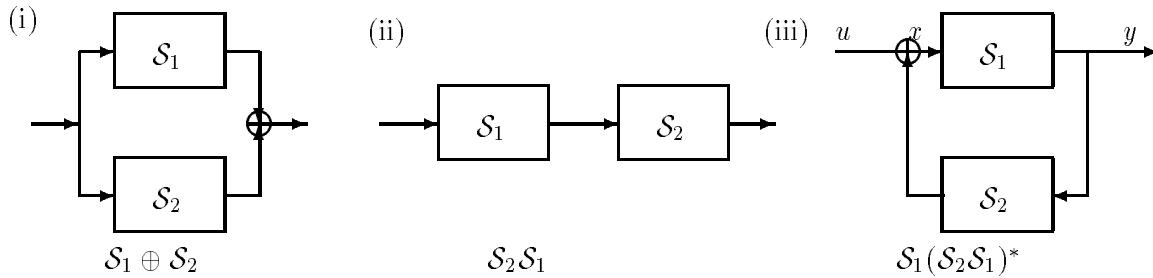


Figure V.3: Mise en parallèle, série, feedback

plus tôt. C'est pourquoi nous appelons mise en feedback de  $\mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{S}_1$  le système associant à  $u$  le *plus petit*  $y$  vérifiant (2.0.c). On a en substituant  $x$

$$y = \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 y \oplus \mathcal{S}_1 u$$

et en appliquant 0.4.1.2, on trouve la solution minimale:

$$y = (\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2)^* \mathcal{S}_1 u .$$

Le système résultant est donc linéaire continu.

## 2.1 Systèmes élémentaires ( $\min, +$ ) linéaires

Nous étudions maintenant les systèmes élémentaires linéaires sur le dioïde  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ . Nous considérons trois ensembles de signaux:

- 1/  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ , moduloïde complet des signaux à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ ,
- 2/  $\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$ , sous-moduloïde complet des signaux croissants.
- 3/  $\text{Croiss.scs}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$ , sous-moduloïde complet<sup>1</sup> des signaux croissants semi-continus supérieurement.

**2.1.1 Stock  $\gamma^c$**  Il s'agit du système  $\gamma^c$  défini par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma^c u(t) := c \otimes u(t) (= c + u(t)) . \quad (2.1.a)$$

L'interprétation de l'opérateur  $\gamma^c$  est claire au vu des exemples précédents: un stock initial de  $c$  unités (mètres cubes dans un réservoir, nombres de places de stocks dans un atelier) induit un décalage sur les quantités en entrée et en sortie. La notation  $\gamma^c$  est justifiée si l'on remarque que  $\gamma^c \gamma^{c'} = \gamma^{c+c'}$ . En particulier,  $\gamma^0 = \text{Id}$  et on notera  $\gamma := \gamma^1$ . On a en outre

$$(\gamma^c \oplus \gamma^{c'}) u(t) = \min(\gamma^c u(t), \gamma^{c'} u(t)) = \min(c + u(t), c' + u(t)) = \min(c, c') + u(t) = \gamma^{\min(c, c')} u(t)$$

d'où la règle essentielle:

$$\gamma^c \oplus \gamma^{c'} = \gamma^{\min(c, c')} \quad \text{dans } \mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_{\min}) . \quad (2.1.b)$$

<sup>1</sup>On rappelle que l'inf d'une famille quelconque de fonctions scs est scs

**2.1.2 Opérateur de retard  $\delta^d$**  Il s'agit du système  $\delta^d$  défini par

$$\forall t, \quad \delta^d u(t) := u(t - d) .$$

L'opérateur  $\delta^d$  représente un retard pur. Pour les graphes d'événements temporisés,  $\delta^d$  est l'opérateur associé à une place avec un temps de séjour de  $d$ . Ici encore, la notation  $\delta^d$  est justifiée par

$$\delta^d \otimes \delta^{d'} = \delta^{d+d'}$$

On notera donc  $\delta$  pour  $\delta^1$ . Pour la somme  $\delta^d \oplus \delta^{d'}$ , il n'y a en général pas de règle de simplification analogue à (2.1.b). Cependant, si l'on se restreint aux signaux croissants, on a

$$(\delta^d \oplus \delta^{d'})u(t) = \min(u(t - d), (t - d')) = u(t - \max(d, d')),$$

d'où la règle

$$\delta^d \oplus \delta^{d'} = \delta^{\max(d, d')} \quad \text{dans } \mathcal{L}(\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})). \quad (2.1.c)$$

**2.1.3 Limitateur de débit  $\omega_\beta$**  Le système représenté sur la Figure V.1 est constitué de trois blocs élémentaires, deux d'entre eux étant étant les opérateurs “stock”  $\gamma^c$  et “retard”  $\delta^d$ . Nous reprenons cet exemple avec  $c = 0$  et  $d = 0$ . On obtient alors le “limitateur de débit”,  $y = \omega_\beta(u)$ , qui à l'entrée  $u(\cdot)$ , associe la solution maximale (au sens usuel)  $y(\cdot)$  solution du système (1.2.a)–(1.2.b) avec  $c = d = 0$  (et  $\beta \geq 0$ ). En § 1.1, on a montré que  $\omega_\beta$  se représente comme suit:

$$\omega_\beta u(t) = \inf_{\tau} [k(t - \tau) + u(\tau)]$$

où  $k(s)$  est donné par

$$k(s) = \begin{cases} \beta s & \text{si } s \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

(i.e. (1.2.c) avec  $c = d = 0$ ). A la différence de  $\gamma^c$  et  $\delta^d$ , nous notons  $\omega_\beta$  avec  $\beta$  en indice, parce que  $\beta$  ne se comporte pas comme un exposant. On a en fait:

$$\omega_\beta \otimes \omega_{\beta'} = \omega_{\min(\beta, \beta')} , \quad (2.1.d)$$

comme il résulte d'une vérification élémentaire. Physiquement, deux limitateurs de débit placés en série se comportent comme un seul (le plus contraignant des deux). De même, pour la mise en parallèle, on a:

$$\omega_\beta \oplus \omega_{\beta'} = \omega_{\min(\beta, \beta')} . \quad (2.1.e)$$

Il faut bien voir ici que la mise en parallèle correspond au *mélange* des flux en proportion égale, et non à leur l'addition au sens usuel.

## 2.2 Systèmes élémentaires ( $\max, +$ ) linéaires

On considère les trois ensemble de signaux:

1/  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ , moduloïde complet des fonctions à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ ,

2/  $\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\max})$ , sous-moduloïde complet des fonctions dateur croissantes.

3/  $\text{Croiss.sci}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\max})$ , sous-moduloïde complet<sup>2</sup> des signaux croissants sci (semi-continus inférieurement).

---

<sup>2</sup>On rappelle que l'inf d'une famille quelconque de fonctions scs est scs

Nous examinons maintenant la version  $(\max, +)$  linéaires des systèmes traités en §2.1

**2.2.1 Opérateur de stock  $\gamma^c$**  Nous notons  $\gamma^c$  l'opérateur qui à un dateur  $u \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^\mathbb{R}$  associe le dateur suivant:

$$\gamma^c u(t) = u(t - c) . \quad (2.2.a)$$

On a toujours  $\gamma^c \gamma^{c'} = \gamma^{c+c'}$ . Cependant, la règle  $\gamma^c \oplus \gamma^{c'} = \gamma^{\min(c,c')}$  est *fausse* dans  $\mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_{\min}^\mathbb{R})$ . Si l'on suppose  $u$  croissante, on a

$$(\gamma^c \oplus \gamma^{c'})u(n) = \max(u(n - c), u(n - c')) = u(n - \min(c, c')) = \gamma^{\min(c,c')}u(n),$$

d'où:

$$\gamma^c \oplus \gamma^{c'} = \gamma^{\min(c,c')} \quad \text{dans } \mathcal{L}(\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\max})). \quad (2.2.b)$$

**2.2.2 Remarque** Il peut sembler désinvolte d'utiliser la même notation  $\gamma^c$  pour l'opérateur appartenant à  $\mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_{\min}^\mathbb{R})$  défini en 2.1.1 et pour l'opérateur appartenant à  $\mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_{\max}^\mathbb{R})$  défini ci dessus. Nous montrerons dans la suite que (2.2.a) est duale en un sens précis de (2.1.a), et représente physiquement le même système.

**2.2.3 Opérateur de retard  $\delta^d$**  Il s'agit de l'opérateur qui à  $u \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^\mathbb{R}$  associe le dateur:

$$\delta^d u(n) = d + u(n) . \quad (2.2.c)$$

On a toujours  $\delta^d \delta^{d'} = \delta^{d+d'}$ . Mais maintenant:

$$\delta^d \oplus \delta^{d'} = \delta^{\max(d,d')} \quad \text{dans } \mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}}_{\max}^\mathbb{R}). \quad (2.2.d)$$

Le lecteur aura noté l'inversion entre (2.1.b),(2.1.c) et (2.2.b),(2.2.d) quant aux domaines où les sommes d'opérateurs  $\gamma$  et les sommes d'opérateurs  $\delta$  se simplifient.

### 3 Représentation des systèmes linéaires

#### 3.1 Systèmes linéaires sur $\mathcal{D}^\mathbb{R}$

Dans cette section, nous étendons les résultats classiques de représentation des systèmes linéaires au systèmes linéaires continus sur un dioïde complet  $\mathcal{D}$ . Nous commençons par traiter le cas où le moduloïde des signaux admissibles  $\Sigma$  est de la forme  $\mathcal{D}^\mathbb{R}$ , puis étendrons simplement les résultats à des signaux plus généraux. On définit la fonction  $e$ , qui jouera le rôle du Dirac usuel.

**3.1.1 Définition (Impulsion)** *On appelle impulsion le signal  $e$  défini par*

$$e(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e_{\mathcal{D}} & \text{si } t = 0 ; \\ \varepsilon_{\mathcal{D}} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1.a)$$

On a trivialement

$$\forall u, \forall t, \quad u(t) = \oint_s u(s) e(t-s) , \quad (3.1.b)$$

i.e.

$$u = \oint_s u(s) \delta^s e \quad (3.1.c)$$

ce qui est la décomposition d'un signal sur la "base canonique"  $\{\delta^s e\}_{s \in \mathbb{R}}$ . Une telle décomposition est unique, puisque si  $u = \oint_s v_s \delta^s e$ , on applique (3.1.b) à  $s \mapsto v_s$ , d'où  $v_t = u(t)$  pour tout  $t$ . Le théorème suivant montre que les systèmes linéaires continus sur  $\mathcal{D}^\mathbb{R}$  se représentent par un opérateur à noyau:

**3.1.2 Théorème** *Le système  $\mathcal{S}$  est linéaire continu sur  $\mathcal{D}^\mathbb{R}$ ssi il existe une application  $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{D}$ , appelée réponse impulsionale telle que:*

$$\forall u \in \mathcal{D}^\mathbb{R}, \forall t, \quad \mathcal{S}u(t) = \oint_s u(s)k(t, s) . \quad (3.1.d)$$

En outre, un tel  $k$  est unique.

**Preuve** Le sens "si" est immédiat. Réciproquement, on a

$$y(t) = \mathcal{S}u(t) = \mathcal{S}\oint_s u(s)\delta^s e(t) ,$$

ce qui en raison des hypothèses de linéarité et continuité, entraîne,

$$y(t) = \oint_s u(s)\mathcal{S}\delta^s e(t) = \oint_s u(s)k(t, s) ,$$

où l'on a posé

$$k(t, s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}\delta^s e(t) .$$

Pour l'unicité, supposons une autre fonction  $\kappa$  vérifiant (3.1.d). En prenant  $u = \delta^s e$ , on obtient

$$\begin{aligned} k(t, s) &= \mathcal{S}\delta^s e(t) \\ &= \oint_\tau \delta^s e(\tau) \kappa(t, \tau) \\ &= \kappa(t, s) . \end{aligned}$$

■

**3.1.3 Définition (stationnarité)** *Le système linéaire  $\mathcal{S}$  est dit stationnaire s'il commute avec l'opérateur retard, i.e.*

$$\text{pour tout } d \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{S}\delta^d = \delta^d \mathcal{S} .$$

On notera  $\mathcal{L}_{\text{stat}}(\mathcal{D}^\mathbb{R})$  le sous-dioïde de  $\mathcal{L}(\mathcal{D}^\mathbb{R})$ , formé des systèmes continus stationnaires.

**3.1.4 Théorème** *Le système continu  $\mathcal{S}$  est stationnairessi sa réponse impulsionale  $k(t, s)$  dépend seulement de la différence  $t - s$ , i.e., avec l'abus de notation coutumier:*

$$k(t, s) = k(t - s) ,$$

et  $k = \mathcal{S}e$ .

**Preuve** Si  $\mathcal{S}$  est stationnaire, on a

$$k(t, s) = \mathcal{S}\delta^s e(t) = \delta^s \mathcal{S}e(t) = \mathcal{S}e(t - s) .$$

Réiproquement, soit  $\mathcal{S} : \mathcal{S}u(t) = \oint u(s)k(t-s)$ . On a

$$\mathcal{S}\delta^\tau u(t) = \oint \delta^\tau u(s)k(t-s),$$

et en posant  $s' = s - \tau$ ,

$$\mathcal{S}\delta^\tau u(t) = \oint u(s')\delta^\tau k(t-s') = \delta^\tau \mathcal{S}u(t).$$

■

**3.1.5 Définition (Produit de convolution)** *On appelle convolée de  $u$  et  $v \in \mathcal{D}^{\mathbb{R}}$  l’application  $u * v \in \mathcal{D}^{\mathbb{R}}$  définie comme suit:*

$$u * v(t) = \oint_{\tau \in \mathbb{R}} u(\tau)v(t-\tau).$$

$\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ , muni de la somme point par point et du produit de convolution est un dioïde complet. L’unité de  $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$  est l’impulsion  $e$ , ce qui légitime a posteriori la notation “ $e$ ”. On a montré que dans le cas stationnaire, la relation entrée-sortie s’exprime par

$$y(t) = \oint_s u(s)k(t-s).$$

Autrement dit, la sortie n’est autre que la convolée de l’entrée par la réponse impulsionale  $k$  du système. Dans le cas de  $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{R}}_{\min}$ , la  $\mathcal{D}$ -convolution coïncide avec le produit d’inf-convolution bien connu en analyse convexe [87].

**3.1.6 Corollaire** *L’application qui à un système associe sa réponse impulsionale est un isomorphisme continu du dioïde des systèmes linéaires continus stationnaires sur  $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ , muni de la somme point par point et du produit de convolution, i.e.*

$$(\mathcal{L}_{\text{stat}}(\mathcal{D}^{\mathbb{R}}), \oplus, \circ) \simeq (\mathcal{D}^{\mathbb{R}}, \oplus, *) .$$

**3.1.7 Corollaire** *Si  $\mathcal{D}$  est commutatif, les systèmes linéaires continus stationnaires mono-entrée mono-sortie forment un dioïde commutatif.*

**3.1.8 Définition (Causalité)** *Le système linéaire  $\mathcal{S}$  est dit causal si pour toutes entrées  $u_1$  et  $u_2$ ,*

$$u_1(t) = u_2(t) \text{ pour } t \leq \tau \Rightarrow \mathcal{S}u_1(t) = \mathcal{S}u_2(t) \text{ pour } t \leq \tau .$$

**3.1.9 Théorème** *Le système  $\mathcal{S}$  est causalssi sa réponse impulsionale est telle que  $k(t,s) = \varepsilon$  pour  $s > t$ .*

**Preuve** On a  $k(t,s) = \mathcal{S}\delta^s e(t)$ . Pour  $t < s$ ,  $\delta^s e$  coïncide avec la fonction nulle  $\varepsilon$  sur  $]-\infty, t]$ . ■

**3.1.10 Corollaire** *Un système stationnaire de réponse impulsionale  $k$  est causalssi  $k(t) = \varepsilon$  pour  $t < 0$ .*

**3.1.11 Exemple** Considérons les trois systèmes élémentaires introduits en § 2.1: ce sont des systèmes linéaires stationnaires continus sur  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$  dont les réponses impulsionnelles sont respectivement

$$\gamma^c e(t) = \begin{cases} c & \text{si } t = 0 ; \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1.e)$$

$$\delta^d e(t) = \begin{cases} e & \text{si } t = d ; \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1.f)$$

$$\omega_\beta e(t) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } t < 0 ; \\ \beta \times t & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1.g)$$

## 3.2 Système linéaires continus sur des bons ensembles de signaux

**3.2.1 Définition** On dit que  $\Sigma$  est un bon ensemble de signaux si

- (i)  $\Sigma$  est un sous moduloïde complet de  $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ ,
- (ii)  $\forall s \in \mathbb{R}, \delta^s \Sigma \subset \Sigma$ ,
- (iii) Il existe  $e' \in \Sigma$  telle que  $\forall u \in \Sigma, e' * u = u * e' = u$ .

La condition (ii) exige que si  $\Sigma$  contient un signal  $u$ , alors il contient tous les translatés de  $u$ . La dernière exprime que  $\Sigma$  admet un élément unité  $e'$  pour le produit de convolution.  $(\Sigma, \oplus, *)$  est alors un dioïde complet, qui n'est cependant pas un sous-dioïde de  $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$  dans la mesure où l'élément neutre  $e'$  ne coïncide pas en général avec  $e$ .

**3.2.2 Proposition** Si  $\Sigma$  vérifie 3.2.1,(i) et (ii), alors  $\mathcal{D}^{\mathbb{R}} * \Sigma \subset \Sigma$  et  $\Sigma * \mathcal{D}^{\mathbb{R}} \subset \Sigma$ .

**Preuve** Soit  $u \in \mathcal{D}^{\mathbb{R}}$  et  $v \in \Sigma$ , montrons que  $u * v \in \Sigma$ . On a

$$u * v = \oint_{\tau} u(\tau) \delta^{\tau} v$$

qui via (ii) et le fait que  $\Sigma$  est complet, appartient à  $\Sigma$ . ■

La proposition exprime que  $\Sigma$  est l'analogue d'un *idéal* dans  $(\mathcal{D}^{\mathbb{R}}, \oplus, *)$ . On a ici l'analogue des propriétés de *régularisation* de la convolution usuelle.

**3.2.3 Prolongement à  $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$**  Il résulte de l'existence d'un opérateur linéaire de projection sur  $\Sigma$  qu'un système  $\mathcal{S}$  linéaire défini a priori sur  $\Sigma$  se prolonge trivialement à  $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ , en l'occurrence par le système  $\tilde{\mathcal{S}}$  suivant:

$$\tilde{\mathcal{S}}u = \mathcal{S}(u * e') , \quad (3.2.a)$$

ce qui se représente par le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{\mathbb{R}} & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{S}}} & \mathcal{D}^{\mathbb{R}} \\ \uparrow i & & \uparrow i \\ \Sigma & \xrightarrow{\mathcal{S}} & \Sigma \end{array}$$

où  $i$  dénote l'injection canonique.

Appelons  $-\Sigma$  l'ensemble des  $u \in \mathcal{D}^{\mathbb{R}}$  tels que  $t \mapsto u(-t)$  appartienne à  $\Sigma$ . On a le résultat d'unicité suivant.

**3.2.4 Théorème** Pour tout système  $\mathcal{S}$  linéaire sur  $\Sigma$ , il existe une unique application  $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{D}$ , telle que:

- (i)  $\forall s \in \mathbb{R}, t \mapsto k(t, s) \in \Sigma$
- (ii)  $\forall t \in \mathbb{R}, s \mapsto k(t, s) \in -\Sigma$
- (iii) Le système de noyau  $k$  prolonge  $\mathcal{S}$  à  $\mathcal{D}^\mathbb{R}$ .

**Preuve** Soit  $\tilde{k}$  le noyau associé au prolongement (3.2.a). On a:

$$\tilde{k}(t, s) := \mathcal{S}\delta^s e'(t) . \quad (3.2.b)$$

En outre, pour tout  $u \in \Sigma$ :

$$\mathcal{S}u(t) = \mathcal{S}(u * e')(t) = \oint_{s \in \mathbb{R}} \oint_{\tau \in \mathbb{R}} u(\tau) e'(\tau - s) \tilde{k}(t, s).$$

Il résulte de cette dernière formule et de (3.2.b) que le noyau

$$k(t, \tau) := \oint_{s \in \mathbb{R}} e'(\tau - s) \tilde{k}(t, s)$$

répond à la question. Réciproquement soit  $k$  une application vérifiant les conditions du Théorème. Posons  $\hat{k}(t, s) := k(t, -s)$ . On a, pour tous  $t, \tau \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\delta^\tau e'(t) &= \oint_{s \in \mathbb{R}} \delta^\tau e'(s) k(t, s) = \oint_{s \in \mathbb{R}} e'(s - \tau) k(t, s) \\ &= \oint_{s' \in \mathbb{R}} e'(-s' - \tau) \hat{k}(t, s') = \hat{k}(t, -\tau) = k(t, \tau) , \end{aligned}$$

ce qui montre l'unicité d'une telle application. ■

On en déduit sans difficulté les deux corollaires suivants:

**3.2.5 Corollaire** Soit  $\mathcal{S}$  un système linéaire stationnaire sur un bon ensemble de signaux  $\Sigma$ . Il existe un unique  $k \in \Sigma$  tel que

$$\forall u \in \Sigma, \quad \mathcal{S}u = u * k .$$

**3.2.6 Corollaire** On a l'isomorphisme de dioïdes:

$$(\mathcal{L}_{\text{stat}}(\Sigma), \oplus, \circ) \simeq (\Sigma, \oplus, *) .$$

Nous appliquons maintenant ce résultat aux fonctions croissantes, qui seront d'un usage constant dans la suite.

### 3.3 Application aux fonctions croissantes

Soit  $\Sigma = \text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$ , sous-moduloïde de  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}^\mathbb{R}$  formé des applications croissantes pour l'ordre usuel, i.e. décroissantes pour l'ordre  $\preceq$ . On va montrer que  $\Sigma$  est un bon ensemble de signaux, et en particulier que l'unité de  $\Sigma$  pour le produit de convolution est la fonction suivante:

$$e_{\text{cr}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} , \quad (3.3.a)$$

ou de manière équivalente

$$e_{\text{cr}} = \oint_{\tau \geq 0} \delta^{-\tau} e .$$

**3.3.1 Proposition** Un signal  $s \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}$  est décroissant (pour l'ordre naturel  $\preceq$ ), i.e. croissant au sens usuel, ssi  $e_{\text{cr}} * s = s$ .

**Preuve** Les propositions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{aligned} & u \text{ croissante} \\ & \forall \tau \leq 0, \quad u(t - \tau) \geq u(t) \\ & \forall \tau \leq 0, \quad u(t - \tau) \preceq u(t) \\ & \oint_{\tau \leq 0} \delta^\tau u(t) \preceq u(t) \\ & e_{\text{cr}} * u \preceq u \\ & e_{\text{cr}} * u = u , \end{aligned}$$

la dernière équivalence résultant de  $e_{\text{cr}} \succeq e$ . ■

On réécrit  $e_{\text{cr}} * s = s$  comme suit:

$$u(t) = \inf_{\tau \geq 0} u(\tau) .$$

Sous cette forme, la proposition 3.3.1 devient immédiate.

On avait a priori via le lemme de projection 0.5.1.15 l'existence d'une application  $\text{pr}_{\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}})}$ . Ce qui est non banal, c'est la réalisation de  $\text{pr}_{\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}})}$  par une convolution, i.e.  $\text{pr}_{\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}})}(x) = e_{\text{cr}} * x$ . On a en traduisant l'idempotence de  $\text{pr}_{\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}})}$ :

$$e_{\text{cr}} * e_{\text{cr}} = e_{\text{cr}} \tag{3.3.b}$$

(on peut aussi appliquer 3.3.1 à  $s = e_{\text{cr}}$ ). Cela montre que le moduloïde complet  $\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$  vérifie les propriétés 3.2.1.(ii) et (iii), et est donc un bon ensemble de signaux. Les systèmes  $\gamma^c$ ,  $\delta^d$  et  $\omega_\beta$  admettent des restrictions à  $\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$ . Les réponses impulsionales de ces systèmes sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \gamma^c e_{\text{cr}} : \quad \gamma^c e_{\text{cr}}(t) &= \begin{cases} c & \text{si } t \leq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \delta^d e_{\text{cr}} : \quad \delta^d e_{\text{cr}}(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq d \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \omega_\beta e_{\text{cr}} : \quad \omega_\beta e_{\text{cr}}(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \beta \times t & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.3.c}$$

On constate que la réponse impulsionnelle  $\gamma^c e$  définit le même système sur  $\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$  que la réponse impulsionnelle  $\gamma^c e_{\text{cr}}$ , à savoir le système  $\gamma^c$ . En d'autres termes, quant on restreint l'ensemble des signaux, la correspondance système → réponse impulsionnelle cesse d'être injective.

**3.3.2 Corollaire** Soit  $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min}))$ . Il existe une unique fonction  $k \in \text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$  (réponse impulsionnelle) telle que

$$\mathcal{S} = \oint_{t \in \mathbb{R}} \gamma^{k(t)} \delta^t . \tag{3.3.d}$$

Résultat dual pour  $\mathcal{L}(\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\max}))$ .

**3.3.3 Corollaire (Causalité pour les fonctions croissantes)**

Le système  $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min}))$  est causalssi sa réponse impulsionnelle  $k$  vérifie

$$\forall t < 0, \quad k(t) = k(0) .$$

**Preuve** Le relèvement canonique de  $\tilde{\mathcal{S}}$  à  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{\mathbb{R}}$  est causal. On a donc via 3.1.10  $\tilde{\mathcal{S}}u = k_0 * u$  avec  $k_0(t) = +\infty$  pour  $t < 0$ . On a  $k = k_0 * e_{\text{cr}}$ , d'où

$$k(t) = \inf_{\tau \geq 0} [k_0(\tau) + e_{\text{cr}}(t - \tau)] = \inf_{\tau \geq 0} [k_0(\tau) + 0] = k_0(0) .$$

On a la version duale de 3.3.3 suivante:

**3.3.4 Corollaire** *Le système  $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\max}))$  est causal ssi sa réponse impulsionale  $k$  vérifie*

$$\forall t < 0, \quad k(t) = -\infty .$$

**3.3.5 Proposition** *On a la règle de simplification suivante:*

$$\text{pour } n, t, \beta \geq 0, \quad n \geq t\beta \Rightarrow \gamma^n \delta^t \oplus \omega_{\beta} = \omega_{\beta} \text{ dans } \mathcal{L}(\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})) .$$

**Preuve** On obtient la somme des opérateurs en prenant l'enveloppe inférieure des réponses impulsionales données en (3.3.c). ■

**3.3.6 Exemple (Fonctions croissantes scs)** L'ensemble des fonctions croissantes scs  $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\min}$  semi-continues supérieurement est complet (un inf de fonctions scs est scs). Il admet l'unité suivante:

$$e_{\text{scs}} : \quad e_{\text{scs}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ +\infty & \text{si } t \geq 0, \end{cases} \quad (3.3.e)$$

qui ne diffère de l'unité  $e_{\text{cr}}$  des fonctions croissantes définie en (3.3.a) que par la valeur 0. On notera en effet qu'une fonction croissante est scs si et seulement si elle est continue à droite. On a donc nécessairement  $e_{\text{scs}}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} e_{\text{scs}}(t)$ , ce qui est bien le cas pour (3.3.e). On vérifie qu'une fonction est scs croissante (au sens usuel) ssi  $e_{\text{scs}} * u = u$ .

**3.3.7 Contre exemple** L'ensemble des fonctions concaves scs de  $\mathbb{R}$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$  n'est pas un bon ensemble de signaux. Il est en effet stable par somme et produit d'inf-convolution, mais n'admet pas d'unité.

**3.3.8 Systèmes en temps discret** Pour la simplicité de l'exposé, nous avons pris le temps à valeur réelle et on a pris des signaux définis sur tout  $\mathbb{R}$ . La théorie est identique pour des signaux définis pour un temps discret, ce qui revient à considérer des sous-moduloïdes de  $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$  au lieu de  $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$ . Nous donnons à titre d'exemple un énoncé utile pour les opérateurs linéaires dans  $\text{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$ :

**3.3.9 Proposition** *Soit  $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\text{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{R}}_{\min}))$ . Il existe une unique fonction  $k \in \text{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$ , dite réponse impulsionale de  $\mathcal{S}$ , telle que*

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \gamma^{k(t)} \delta^t . \quad (3.3.f)$$

## 3.4 Systèmes vectoriels sur les bons ensembles de signaux

Soit  $\Sigma$  un bon ensemble de signaux. On a pour les matrices à coefficients dans  $\Sigma$  le produit induit par la structure de dioïde  $(\Sigma, \oplus, *)$ :

$$(AB)_{ij} = \bigoplus_k A_{ik} * B_{kj} . \quad (3.4.a)$$

Le résultat suivant est une généralisation immédiate de 3.2.5.

**3.4.1 Proposition** Soit  $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\Sigma^p, \Sigma^n)$  stationnaire. Il existe une unique matrice  $K \in \Sigma^{p \times n}$ , dite réponse impulsionale, telle que:

$$\mathcal{S}u = Ku ,$$

où le produit de matrice du second membre s'entend au sens de (3.4.a).

Un système général obtenu par mise en série, parallèle et feedback d'opérateurs linéaires stationnaires s'écrira comme la plus petite solution d'un système du type:

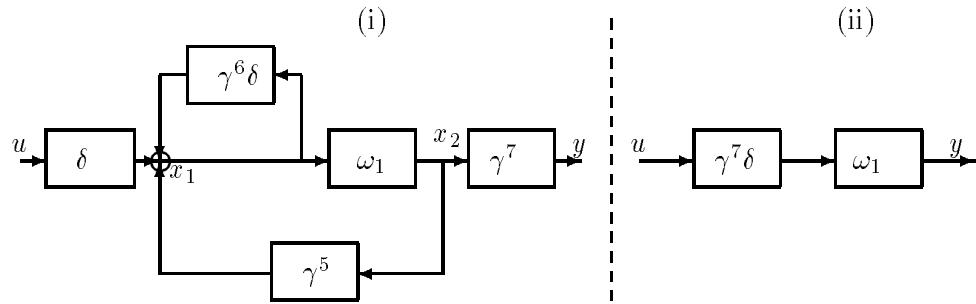
$$X = AX \oplus BU, Y = CX . \quad (3.4.b)$$

On solution minimale s'obtient immédiatement par:

$$Y = CA^*Bu =: HU$$

où l'étoile de la matrice  $A$  peut être calculée à l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan 0,4.2.1.  $H$  est appelée matrice de transfert.

**3.4.2 Exemple** Soit le système linéaire sur  $\text{Croiss}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_{\min})$  représenté sur la Figure V.4,(i). On



peut écrire:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma^6 \delta & \gamma^5 \\ \omega_1 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{bmatrix} u = Ax \oplus B \\ y &= \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} u = Cu . \end{aligned} \quad (3.4.c)$$

Au lieu de calculer  $y = CA^*Bu$ , l'étoile de  $A$  s'obtenant par exemple par 0, 4.2.1, nous préférons éliminer à la main  $x_1$  et  $x_2$ . En éliminant  $x_2$ , il vient:

$$x_1 = \gamma^6 \delta x_1 \oplus \gamma^5 \omega_1 x_1 \oplus \delta u . \quad (3.4.d)$$

On a par 3.3.5  $\gamma^6 \delta \preceq \gamma^5 \omega_1$ . En outre, via (2.1.d), on a  $\omega_1^* = \omega_1$ , et par 0,4.1.6,(vii)

$$(\gamma^5 \omega_1)^* = (\gamma^5 \omega_1^*)^* = e \oplus \gamma^5 (\gamma^5 \oplus \omega_1)^* = e \oplus \gamma^5 \omega_1 .$$

La plus petite solution de (3.4.d) est donc

$$x_1 = (e \oplus \gamma^5 \omega_1) \delta u ,$$

d'où

$$x_2 = \omega_1 x_1 = (\omega_1 \oplus \gamma^5 \omega_1) \delta u = \omega_1 \delta u .$$

On a finalement la relation entrée sortie fort simple:

$$y = h u = \gamma^7 \delta \omega_1 u .$$

Cela montre en particulier que le système plus simple représenté à droite sur la figure V.4,(ii), est équivalent du point de vue de la relation entrée-sortie au système V.4,(i).

## 4 Fonction de transfert des systèmes $(\min, +)$ linéaires stationnaires

### 4.1 Transformation de Fenchel

Nous introduisons ici la notion de fonction *numérique* de transfert. On obtient ces fonctions par une opération analogue à la transformation de Laplace en théorie classique. Dans notre cas, ce rôle sera joué par une transformation de type Fenchel [87].

Il résulte de 3.2.5 qu'un système linéaire stationnaire sur  $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$  de réponse impulsionnelle  $k$  admet la représentation suivante (unique):

$$\mathcal{S} = \oint_{s \in \mathbb{R}} k(s) \delta^s , \quad (4.1.a)$$

laquelle somme s'entend dans  $\mathcal{L}(\mathcal{D}^{\mathbb{R}})$ . On a aussi la forme équivalente:

$$\mathcal{S} = \oint_{s \in \mathbb{R}} \gamma^{k(s)} \delta^s .$$

**4.1.1 Définition (Fonction de transfert)** *On appelle fonction de transfert associée à la réponse impulsionnelle  $k$  la fonction  $\mathcal{F}k$ ,  $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  définie par*

$$\mathcal{F}k(p) = \oint_{x \in \mathbb{R}} k(x) p^{-x} = \inf_{x \in \mathbb{R}} [k(x) - px] .$$

**4.1.2 Remarque**  $\mathcal{F}k(p)$  peut s'interpréter comme l'évaluation de l'expression formelle (4.1.a) dans le dioïde  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ , obtenue en donnant à la lettre  $\delta$  la valeur  $-p$ . On notera en effet que  $p^{-x} = -p^x$  (en fait, les expressions  $x^p$ ,  $p^x$  et  $1^{p \otimes x}$  dans le dioïde  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$  désignent le même élément, à savoir  $p \times x$  dans l'algèbre usuelle).

**4.1.3 Proposition** *L'application  $\mathcal{F}$  est un morphisme continu de  $(\Sigma, \oplus, *)$  dans  $(\overline{\mathbb{R}}_{\min}, \min, +)$ .*<sup>3</sup>

**Preuve** La seul point non trivial est le suivant, qui est bien classique:

**4.1.4 Lemme (Trivialisation du produit d'inf-convolution)** *On a pour tout  $(u, v) \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^2$ :*

$$\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}u + \mathcal{F}v .$$

---

<sup>3</sup>+ désigne la somme point par point.

**Preuve** du lemme:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u * v)(p) &= \oint_{t \in \mathbb{R}} \oint_{\tau \in \mathbb{R}} u(t - \tau)v(\tau)p^{-t} = \oint_{t \in \mathbb{R}} \oint_{\tau \in \mathbb{R}} u(t - \tau)v(\tau)p^{-(t-\tau)}p^{-\tau} \\ &= \left( \oint_{t' \in \mathbb{R}} u(t')p^{-t'} \right) \left( \oint_{\tau \in \mathbb{R}} v(\tau)p^{-\tau} \right) = (\mathcal{F}u(p))(\mathcal{F}v(p)) .\end{aligned}$$

où l'on a fait le changement de variables  $t' = t - \tau$ . ■

**4.1.5 Exemple** on vérifie immédiatement les formules suivantes, pour les opérateurs  $\gamma^c$ ,  $\delta^d$  et  $\omega_\beta$  définis sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_{\min}}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\gamma^c e(p) &= c, \quad \forall p ; \\ \mathcal{F}\delta^d e(p) &= -d \times p, \quad \forall p ; \\ \mathcal{F}\omega_\beta e(p) &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \leq \beta \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.1.b)\end{aligned}$$

**4.1.6 Remarque (Lien avec la transformée de Fenchel classique)** On a:

$$\mathcal{F}k(p) = \inf_{x \in \mathbb{R}} [f(x) - px] = -\sup_{x \in \mathbb{R}} [px - fx] = -\mathcal{F}_e k(p) , \quad (4.1.c)$$

où l'on a noté  $\mathcal{F}_e$  la transformée de Fenchel classique[87]. Autrement dit,  $\mathcal{F}$  n'est autre que la transformation de Fenchel changée de signe.

**4.1.7 Remarque (Cas des systèmes définis sur  $\text{Croiss}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\min})$ )** Soit  $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\text{Croiss}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\min}))$ , de réponse impulsionale croissante  $k$ . On a

$$p < 0 \Rightarrow \mathcal{F}k(p) = -\infty ,$$

comme il résulte de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (k(x) - px) = \infty$ .

**4.1.8 Exemple** L'opérateur  $\delta \oplus \delta^2$  a la même fonction de transfert que  $\oint_1^2 \delta^t$ , à savoir la fonction numérique  $x \mapsto x \oplus x^2$ .

La transformation  $\mathcal{F}$  n'est donc pas un isomorphisme. On a cependant le résultat suivant:

**4.1.9 Proposition** *L'application  $\mathcal{F} : \mathbb{R}_{\min}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}_{\min}^{\mathbb{R}}$  est résiduable. Les fermés (cf. 0.5.1.13) sont les fonctions convexes sci ne valant jamais  $-\infty$  ou le valant identiquement. Les fermés duals sont les fonctions concaves scs ne valant jamais  $+\infty$  ou le valant identiquement. En outre, l'application résiduée de  $\mathcal{F}$  est donnée par la formule suivante:*

$$[\mathcal{F}^\dagger(g)](t) = \bigwedge_{p \in \mathbb{R}} g(p)t^p = \sup_{p \in \mathbb{R}} [g(p) + pt] . \quad (4.1.d)$$

Le lecteur aura noté l'analogie avec la transformation de Fourier inverse.

**Preuve** La formule pour la résiduée de  $\mathcal{F}$  est conséquence immédiate de 0.5.4.7. La caractérisation des fermés n'est autre que la traduction des propriétés classiques de la transformée de Fenchel [87]. ■

On considère la fonction linéaire de pente  $p$ ,  $\ell_p \in \mathbb{R}_{\min}^{\mathbb{R}}$ , i.e.

$$\ell_p(x) = px .$$

**4.1.10 Théorème** Soit  $\mathcal{S}$  un système linéaire continu stationnaire sur  $\mathbb{R}_{\min}^{\mathbb{R}}$ , de réponse impulsionnelle  $k$ . La droite  $\ell_p$  est un vecteur propre du système  $\mathcal{S}$  pour la valeur propre  $\lambda_p = \mathcal{F}k(p)$ , i.e.

$$\mathcal{S}\ell_p = \lambda_p \ell_p .$$

### Preuve

$$k * \ell_p(t) = \oint_{\tau \in \mathbb{R}} k(\tau) p^{t-\tau} = \oint_{\tau \in \mathbb{R}} k(\tau) p^{-\tau} p^t = \left( \oint_{\tau \in \mathbb{R}} k(\tau) p^{-\tau} \right) p^t = (\mathcal{F}k(p)) \ell_p(t) .$$

■

**4.1.11 Interprétation: fonction de gain** De même que d'ordinaire, la valeur du transfert au point  $j\omega$  s'interprète comme le gain du système pour la fréquence  $\omega$ , de même ici,  $\mathcal{F}k(p)$  apparaît comme le décalage (additif) du système associé à la pente  $p$ .

**4.1.12 Remarque (Décomposition spectrale de  $\mathcal{S}$ )** Les fonctions concaves scs apparaissent comme les sommes infinies de droites. Ce sont précisément les signaux qui se décomposent sur la base  $\{\ell_p\}_{p \in \mathbb{R}}$ . Soit

$$u = \oint_{p \in \mathbb{R}} u_p \ell_p \quad (4.1.e)$$

une telle décomposition. On a

$$\mathcal{S}u = \oint_{p \in \mathbb{R}} \mathcal{F}k(p) u_p \ell_p , \quad (4.1.f)$$

laquelle fonction est clairement concave scs. La formule (4.1.f) est l'équivalent d'une décomposition spectrale de l'opérateur  $\mathcal{S}$  restreint au sous moduloïde complet des fonctions concaves. On observe que les coordonnées  $u_p$  s'obtiennent au moyen de la formule de résiduation suivante:

$$u_p = \bigwedge_t u(t) \otimes p^{-t} .$$

**4.1.13 Diagramme de Bode** La graphe de l'application  $p \mapsto \mathcal{F}k(p)$  est l'analogue du diagramme de Bode. Soit par exemple le système

$$\mathcal{S} = \gamma \delta^2 \oplus \omega_2 .$$

On a représenté la réponse impulsionnelle, donnée par:

$$h(t) = \min(\gamma \delta^2 e_{\text{cr}}(t), \omega_2 e_{\text{cr}}(t))$$

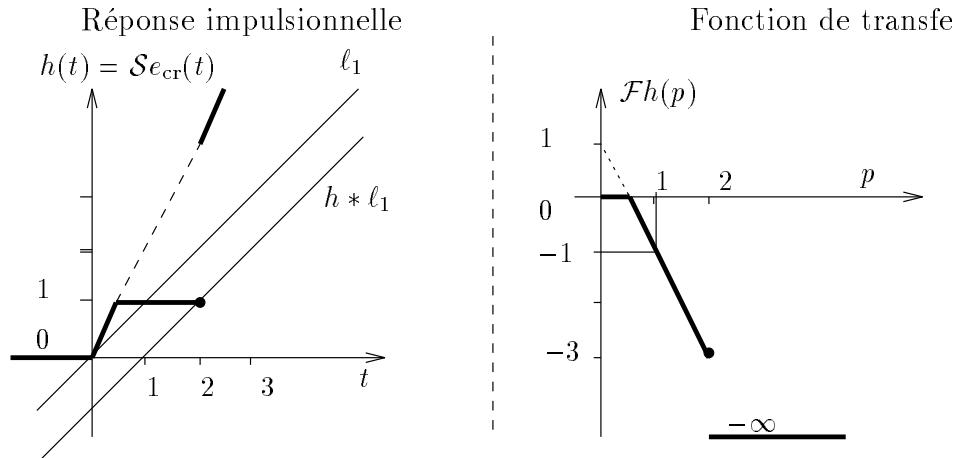
(les réponses impulsionales élémentaires  $\gamma \delta^2 e_{\text{cr}}$  et  $\omega_2 e_{\text{cr}}$  sont données par les formules (3.3.c)). On a en appliquant (4.1.5), pour  $p \geq 0$ :

$$\mathcal{F}h(p) = \min(1 - 2p, \chi_{]-\infty, 2]}(p)),$$

où la fonction indicatrice  $\chi$  est donnée par

$$\chi_A(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in A \\ -\infty & \text{si } p \notin A. \end{cases}$$

On a représenté  $\mathcal{F}h$  sur la Figure V.5, ainsi que l'entrée  $\ell_1$  (droite de pente 1 passant par l'origine). La sortie  $h * \ell_1$  est égale à  $(-1) \otimes \ell_1 = -1 + \ell_1$ , où le gain  $-1$  est égal à  $\mathcal{F}h(1)$  en accord avec le Théorème 4.1.10.

Figure V.5: Diagramme de Bode de  $\mathcal{S} = \gamma \delta^2 \oplus \omega_2$ 

## 4.2 Résumé

Nous concluons cette section par un tableau faisant le parallèle entre les systèmes classiques et les systèmes (min, +) linéaires.

Systèmes (min, +) linéaires	Systèmes linéaires usuels.
min, +	+, $\times$
inf-convolution $k * k'(t) = \oint_{\tau \in \mathbb{R}} k(\tau)k'(t - \tau) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}} [k(\tau) + k'(t - \tau)]$	convolution $k * k'(t) = \int_{\tau \in \mathbb{R}} k(\tau)k'(t - \tau)$
Systèmes min-linéaires continus $y(t) = \oint_{\tau \in \mathbb{R}} k(t, \tau)u(\tau) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}} [k(t, \tau) + u(\tau)]$	Opérateurs à noyau $y(t) = \int_{\tau \in \mathbb{R}} k(t, \tau)u(\tau)$
Systèmes stationnaires $y(t) = \oint_{\tau \in \mathbb{R}} k(\tau)u(t - \tau) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}} [k(\tau) + u(t - \tau)]$	Systèmes stationnaires $y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t - \tau)u(\tau) d\tau$
Transformée de type Fenchel $\mathcal{F}k(p) = \oint_{x \in \mathbb{R}} k(x)p^{-x} = \inf_{x \in \mathbb{R}} [k(x) - px]$	Transformée de Fourier $\mathcal{F}k(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-j\omega t} dt$
Trivialisation de l'inf-convolution $\mathcal{F}(k * k') = (\mathcal{F}k) \otimes (\mathcal{F}k') = (\mathcal{F}k) + (\mathcal{F}k')$	Trivialisation de la convolution $\mathcal{F}(k * k') = (\mathcal{F}k)(\mathcal{F}k')$
Droites $\ell_p(x) = p^x = p \times x$	Fonctions exponentielles $e_{\omega}(t) = e^{j\omega t}$
$k * \ell_p = (\mathcal{F}k(p))\ell_p$	$k * e_{\omega} = (\mathcal{F}k(\omega))e_{\omega}$



## Chapitre VI

# Quelques remarques sur la réalisation minimale

### Introduction

On étudie ici les séries rationnelles (ou réalisables) en une indéterminée et à coefficients dans  $\mathbb{R}_{\max}$ . On caractérise tout d'abord les séries rationnelles par une certaine propriété de périodicité: les séries obtenues en ne prenant qu'un terme tous les  $c$ , où  $c$  est la période, se comportent comme des séries "géométriques" à partir d'un certain rang. Lorsque la série se réalise à l'aide d'une matrice irréductible, la situation est fort simple: tous les séries géométriques ainsi extraites ont alors même raison. On applique ensuite les notions de rang étudiées précédemment au problème de réalisation minimale. Le rang faible (i.e. la taille minimale d'une famille génératrice du moduloïde des colonnes) de la matrice de Hankel est fini sauf toutes les séries "géométriques" extraites ont même raison, auquel cas on peut appliquer les algorithmes standards de réalisation. Ce dernier résultat a été obtenu antérieurement par Cuninghame-Green [26] (avec un algorithme un peu différent et à l'omission près de la condition d'irréductibilité). Nous donnons un exemple où le rang faible donne des réalisations arbitrairement grossières. Nous montrons que la dimension minimale de réalisation est minorée par le rang mineur de la matrice de Hankel (taille du plus grand mineur inversible dans le dioïde symétrisé). Cette minoration peut être stricte: nous exhibons un système non réalisable de rang mineur fini. La situation est assez analogue au problème classique de réalisation positive d'une série rationnelle à coefficients dans  $\mathbb{R}^+$  [7, 37]. Signalons par ailleurs l'approche d'Olsder [73], qui obtient dans certains cas des réalisations minimales en réalisant dans l'algèbre habituelle la matrice  $H_{ij} = \exp(h_{ij}t)$  et en passant à la limite.

### 1 Séries $(\max, +)$ rationnelles

#### 1.1 Réalisabilité, rationalité, périodicité

On étudie ici les séries  $s \in \mathbb{R}_{\max}[[\gamma]]$  à coefficients dans  $\mathbb{R}_{\max}$  et en une unique indéterminée  $\gamma$ . Les deux notions suivantes sont classiques.

**1.1.1 Définition (rationalité)** *Une série  $s \in \mathbb{R}_{\max}[[\gamma]]$  est dite rationnelle si elle s'obtient par un nombre fini de sommes, produits, étoiles de polynômes.*

**1.1.2 Définition (réalisabilité)** *La série  $s \in \mathbb{R}_{\max}[[\gamma]]$  est réalisablessi il existe un entier  $n$ , des matrices  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}_{\max}^{1 \times n}$ , telles que*

$$s = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} CA^k B \gamma^k .$$

Un tel triplet  $(A, B, C)$  sera dit *réalisation* de  $s$ . Un triplet tel que  $n = \dim A$  soit minimal sera qualifiée de réalisation minimale. La définition 1.1.2 est motivée comme suit. Considérons le système récurrent dans  $\mathbb{R}_{\max}$ :

$$x_{k+1} = Ax_k \oplus Bu_{k+1}, \quad y_k = Cx_k , \quad (1.1.a)$$

avec  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}_{\max}^{1 \times n}$ . L'équation (1.1.a) se réécrit à l'aide de l'opérateur de décalage  $\gamma$ , tel que  $x_k = \gamma x_{k+1}$ :

$$x = A\gamma x \oplus Bu ,$$

d'où

$$y = C(A\gamma)^*Bu = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} CA^k B\gamma^k u . \quad (1.1.b)$$

Autrement dit, une série réalisable n'est autre que la série de transfert d'un système linéaire récurrent. D'après le Théorème de Kleene [7], une série est rationnellessi elle est réalisable. Afin de caractériser les séries rationnelles, nous introduisons une nouvelle notion de périodicité. Cette notion apparaît naturellement lors de l'étude des puissances des matrices (cf. remarque 1.1.10 supra).

**1.1.3 Définition (périodicité)** *Soit  $c$  un naturel non nul,  $\lambda$  une application  $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ ,  $u \mapsto \lambda_u$ . La suite  $s \in \mathbb{R}_{\max}^{\mathbb{N}}$  est dite  $c, \lambda$ -périodique (ou plus simplement périodique) s'il existe un naturel  $N$  tel que<sup>1</sup>:*

$$n \geq N \Rightarrow s_{n+c} = (\lambda_{\bar{n}})^c s_n . \quad (1.1.c)$$

La plus petite valeur de  $c$  sera qualifiée de *période*. L'application  $\lambda$  sera qualifiée de *taux*. Dans la suite, on notera plus simplement  $\lambda_n$  au lieu de  $\lambda_{\bar{n}}$ . Introduisons la suite extraite  $s^i = \{s_{kc+i}\}_{k \in \mathbb{N}}$ . La définition est équivalente à affirmer que pour  $i = 0, \dots, c-1$ ,

$$kc + i \geq N \Rightarrow s_{k+1}^i = \alpha s_k^i . \quad (1.1.d)$$

où  $\alpha = (\lambda_i)^c$ , i.e. que les suites extraites coïncident à partir d'un certain rang avec des suites géométriques (c'est à dire arithmétiques dans l'algèbre usuelle).

**1.1.4 Exemple** La suite

$$s_n = \begin{cases} 2 \times n & \text{si } n \text{ pair} \\ 3 \times n + 1 & \text{si } b \text{ impair} \end{cases}$$

est  $2, \lambda$ -périodique, avec  $\lambda_0 = 2$  et  $\lambda_1 = 3$ .

La série  $s = \bigoplus_n s_n \gamma^n$  sera dite périodique lorsque la suite  $\{s_n\}$  l'est.

**1.1.5 Théorème** *Une série  $s \in \mathbb{R}_{\max}[[\gamma]]$  est rationnellessi elle est périodique.*

---

<sup>1</sup> $\bar{n}$  désigne la classe de  $n$  dans  $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$

**Preuve Périodique  $\Rightarrow$  rationnel.** D'après (1.1.c):

$$s = \bigoplus_{n=0}^{N-1} s_n \gamma^n \oplus s_N \gamma^N ((\lambda_N \gamma)^c)^* \oplus \dots \oplus s_{N+c-1} \gamma^{N+c-1} ((\lambda_{N+c-1} \gamma)^c)^*. \quad (1.1.e)$$

La rationalité de  $s$  en résulte.

**Rationnel  $\Rightarrow$  périodique.** Soient  $\mathcal{P}$  (resp.  $\mathcal{R}$ ) l'ensemble des séries périodiques (resp. rationnelles).  $\mathcal{R}$  est par définition le plus petit ensemble rationnellement clos tel que  $\mathcal{R} \supset \mathbb{R}_{\max}[\gamma]$ . Comme trivialement,  $\mathcal{P} \supset \mathbb{R}_{\max}[\gamma]$ , il suffit de montrer que  $\mathcal{P}$  est rationnellement clos. On établit pour cela quelques lemmes.

**1.1.6 Propriétés** Soit  $s$  (resp.  $s'$ ) une série  $c, \lambda$  (resp.  $c', \lambda'$ )-périodique.

- (i) Si  $c$  divise  $c''$ , alors  $s$  est  $c'', \lambda$  périodique.
- (ii)  $s \oplus s'$  est périodique et sa période divise  $\text{ppcm}(c, c')$ .

**1.1.7 Lemme** Une série est périodiquessi elle est somme finie de séries de la forme

$$p((a\gamma)^n)^*,$$

où  $p$  est un polynôme,  $a$  un scalaire et  $n \in \mathbb{N}$ .

**1.1.8 Lemme** Soient  $s = ((a\gamma)^\alpha)^*$  et  $s' = ((b\gamma)^\beta)^*$ ,  $a$  et  $b$  étant des scalaires. Si  $a > b$ , on a une écriture de la forme:

$$ss' = q((a\gamma)^\alpha)^*, \quad (1.1.f)$$

où  $q$  est un polynôme. Si  $a = b$ , on a

$$ss' = p \oplus q((a\gamma)^{\gcd(\alpha, \beta)})^*, \quad (1.1.g)$$

où  $p$  et  $q$  sont des polynômes.

Les deux Lemmes 1.1.8 et 1.1.7 entraînent que le produit de deux séries périodiques est périodique. En outre, moyennant les deux règles

$$\left( \bigoplus_{i=1}^k s_i \right)^* = \bigotimes_{i=1}^k s_i^*, \quad (p((a\gamma)^n)^*)^* = e \oplus p(p \oplus (a\gamma)^n)^*,$$

on a que l'étoile d'une série périodique est périodique, donc que  $\mathcal{P}$  est rationnellement clos, et donc d'après ce qui précède,  $\mathcal{P} = \mathcal{R}$ . Il reste à vérifier les Lemmes.

**Preuve** des propriétés 1.1.6. (i) est immédiate. Montrons (ii). D'après (i), quitte à remplacer  $c$  et  $c'$  par leur  $\text{ppcm}$ , on peut supposer  $c = c' = \text{ppcm}(c, c')$ . D'après une remarque précédente, il suffit de vérifier que les suites extraites  $\{s_{n+kc}\}_k, \dots, \{s_{n+c-1+kc}\}_k$  sont périodiques de période 1. On peut donc supposer  $c = c' = 1$ . On a alors pour  $n$  assez grand:

$$s_{n+1} = \lambda s_n, \quad s'_{n+1} = \lambda' s'_n. \quad (1.1.h)$$

Si  $\lambda = \lambda'$ , la périodicité de  $s \oplus s'$  est claire. Dans le cas contraire, on a par exemple  $s_n \neq \varepsilon$  et  $\lambda > \lambda'$ . La suite  $s_n$  croissant plus vite que  $s'_n$ , on a à partir d'un certain rang  $(s \oplus s')_n = s'_n$  et la périodicité de  $s \oplus s'$  en résulte. ■

**Preuve** du Lemme 1.1.7. D'après (1.1.e), une série périodique s'écrit comme somme de séries de la forme  $p((a\gamma)^n)^*$ . Réciproquement, la somme de séries périodiques étant périodique, il suffit de voir que  $m((a\gamma)^n)^*$ ,  $m$  étant un monôme, est périodique, ce qui est immédiat. ■

**Preuve** du Lemme 1.1.8. 1/ Cas  $a > b$ . On a

$$ss' = ((a\gamma)^\alpha)^*((b\gamma)^\beta)^* = \bigoplus_{x,y \in \mathbb{N}} (a\gamma)^{x \times \alpha} (b\gamma)^{y \times \beta}. \quad (1.1.i)$$

Le coefficient de  $\gamma^n$  est égal à:

$$(ss')_n = \bigoplus_{\alpha x + \beta y = n} a^{x \times \alpha} b^{y \times \beta} = \sup_{\alpha x + \beta y = n} a\alpha x + b\beta y. \quad (1.1.j)$$

Si  $\alpha x + \beta y = n$  et  $y \geq \alpha$ , on a  $\alpha x' + \beta y' = n$ , avec  $x' = (x + \beta)$ ,  $y' = (y - \alpha)$ . Comme  $a > b$ , on a  $a\alpha x' + b\beta y' > a\alpha x + b\beta y$ , ce qui montre que le sup à droite de (1.1.j) est atteint pour  $y < \alpha$ . On a donc:

$$ss' = (e \oplus (b\gamma)^\beta \oplus \dots \oplus (b\gamma)^{(\alpha-1) \times \beta})((a\gamma)^\alpha)^*$$

ce qui est bien de la forme (1.1.f).

2/ Cas  $a = b$ . On a

$$ss' = ((a\gamma)^\alpha)^*((a\gamma)^\beta)^* = \bigoplus_{n \in \alpha\mathbb{N} + \beta\mathbb{N}} (a\gamma)^n$$

et la périodicité de cette série résulte du Lemme diophantien 3.3.6 du Chapitre VII. ■

**1.1.9 Corollaire** Soit  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times p}$ . Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, p\}$ , la suite  $\{A_{ij}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est périodique.

**Preuve** Cela résulte de la rationalité de  $(\gamma A)^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \gamma^n A^n$  et du fait que les coefficients d'une matrice rationnelle sont rationnels. ■

**1.1.10 Remarque** Cohen, Dubois, Quadrat et Viot [17] ont montré que lorsque  $A$  est *irréductible*, on a à partir d'un certain rang  $A^{n+c} = \lambda^c A^n$ , ce qui est un cas particulier de périodicité où  $\lambda_n$  est constant (i.e. ne dépend pas du reste de  $n$  modulo  $c$ ).  $\lambda$  est égal aux rayon spectral de la matrice  $A$  et la période  $c$  est caractérisée de manière très analogue à la théorie de Perron-Frobenius (voir à ce propos la section 6.4 du chapitre VII). Lorsque la matrice  $A$  n'est plus irréductible, la situation est plus délicate. Il est possible, mais fastidieux, de borner la période  $c$  et de caractériser l'application  $\lambda$  à partir du graphe de la matrice. Nous ne le ferons pas ici, et considérons simplement l'exemple suivant. Soient les matrices

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ e \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \quad (1.1.k)$$

Soit  $s_n = CA^nB$ . On trouve

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$s_n$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$e$	1	-4	3	-8	5	-12	7	-16	...

soit une série  $2, \lambda$  périodique, d'où  $\lambda_0 = -2$  et  $\lambda_1 = 1$ . Graphiquement,  $s_n$  est égal au chemin de poids maximal de 5 à 1 dans le graphe de la Figure VI.1. Il est clair que si  $n$  est pair, un tel chemin passe nécessairement par la composante connexe  $\{4\}$  de rayon spectral égal à  $-2$  et pas par la composante connexe  $\{2, 3\}$  de rayons spectral égal à  $1$ , et donc que le comportement de  $A_{15}^{2n}$  sera analogue à celui de  $A_{44}^{2n}$ . Au contraire, les chemins de longueur impaire passent par la composante connexe de rayon spectral  $1$ , ce qui rend compte de  $\lambda_1 = 1$ .

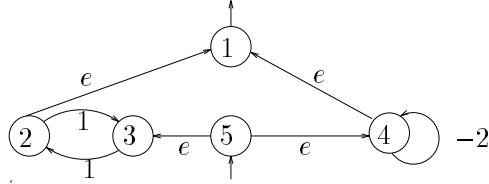


Figure VI.1: Graphe associé à (1.1.k): le comportement de  $A_{15}^n$  dépend de la parité de  $n$

## 1.2 Réalisation faible

Classiquement, on forme la *matrice de Hankel* associée à  $s = \bigoplus_k s_k \gamma^k$ , soit la matrice infinie suivante:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots \\ s_2 & s_3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

On a défini en III, §10 le rang faible par colonne d'une matrice comme le cardinal d'une famille génératrice minimale du moduloïde engendré par les colonnes. La matrice de Hankel étant symétrique, on appellera rang faible de  $\mathcal{H}$  son rang faible par colonnes (égal à son rang faible par ligne).

**1.2.1 Proposition** *Si le rang faible de la matrice de Hankel d'une série est fini, alors il existe une réalisation de dimension ce rang faible.*

La preuve est classique (cf. par exemple [53]). En identifiant une colonne infinie à une suite, étant donné une  $\mathbb{N} \times p$  matrice  $A$ , on définit naturellement:

$$\gamma^{-1} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots \\ a_{20} & a_{21} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} .$$

On note les deux propriétés:

$$\gamma^{-1} \mathcal{H}_{\cdot, i} = \mathcal{H}_{\cdot, i+1} \quad (1.2.a)$$

$$\forall U \in \mathbb{R}_{\max}^{\mathbb{N} \times k}, V \in \mathbb{R}_{\max}^{k \times l}, (\gamma^{-1} U) V = \gamma^{-1} (U V) . \quad (1.2.b)$$

La première résulte de la structure de la matrice de Hankel, la seconde est triviale. En numérotant à partir de 0 les lignes et les colonnes de la matrice de Hankel, on peut écrire:

$$\forall i \in \mathbb{N}, s_i = C A^i B = \mathcal{H}_{0i} = \mathcal{H}_{i0} .$$

Soit  $\{i_1, \dots, i_r\}$  une famille génératrice minimale du moduloïde engendré par les colonnes de  $\mathcal{H}$  (d'après la remarque 5.5.7 du Chapitre 0, on peut toujours supposer une telle famille formée de colonnes de  $\mathcal{H}$ ). On a pour toute colonne  $\mathcal{H}_{\cdot, q}$  une relation de dépendance de la forme

$$\mathcal{H}_{\cdot, q} = \bigoplus_{l=1}^r \mathcal{H}_{\cdot, i_l} \lambda_{lq} ,$$

laquelle se réécrit matriciellement

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{[i_1 \dots i_r]} L$$

avec  $L = (\lambda_{lq}) \in \mathbb{R}_{\max}^{r \times \mathbb{N}}$ . On peut écrire

$$\gamma^{-1} \mathcal{H}_{\cdot, i_l} = \mathcal{H}_{\cdot, i_l+1} = \mathcal{H}_{[i_1 \dots i_r]} L_{[i_l+1]} ,$$

d'où en posant  $A = L_{[i_1+1, \dots, i_r+1]} \in \mathbb{R}_{\max}^{r \times r}$ :

$$\gamma^{-1} \mathcal{H}_{[i_1 \dots i_r]} = \mathcal{H}_{[i_1 \dots i_r]} A .$$

Via (1.2.b), on induit:

$$\gamma^{-i} \mathcal{H}_{[i_1 \dots i_r]} = \mathcal{H}_{[i_1 \dots i_r]} A^i .$$

On a alors

$$s_i = (\gamma^{-i} \mathcal{H}_{\cdot, 0})_0 = (\gamma^{-i} \mathcal{H}_{[i_1 \dots i_r]} L_{[1, \dots, r|0]})_0 = (\mathcal{H}_{[i_1 \dots i_r]} A^i L_{[1, \dots, r|0]})_0 = \mathcal{H}_{[0|i_1 \dots i_r]} A^i L_{[1, \dots, r|0]} .$$

En posant  $B$  égal à la colonne d'indice 0 de  $L$  et  $C = \mathcal{H}_{[0|i_1 \dots i_r]}$ , on obtient une réalisation de dimension  $r$ . ■

### 1.2.2 Exemple

Soit le système:

$$a = \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

On a la matrice de Hankel tronquée:

$$h_{[0..6|0..6]} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 25 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 25 & 30 \\ 8 & 12 & 16 & 20 & 25 & 30 & 35 \\ 12 & 16 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 \\ 16 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 \\ 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 \\ 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 & 55 \end{bmatrix} .$$

On constate que les colonnes de la matrice de Hankel sont égales (à une constante près) à partir de la colonne numérotée 5. En appliquant l'algorithme donné en 0.5.5.5, on détermine aisément une famille génératrice minimale de la matrice de Hankel tronquée, soit la famille formée des deux colonnes 0 et 5. On appliquant l'algorithme donné dans la preuve de la Proposition ci-dessus, on a

$$\mathcal{H}_{\cdot, 1} = 4\mathcal{H}_{\cdot, 0} \oplus (-20)\mathcal{H}_{\cdot, 5}, \quad \mathcal{H}_{\cdot, 6} = 4\mathcal{H}_{\cdot, 0} \oplus 25\mathcal{H}_{\cdot, 5}, \quad \mathcal{H}_{\cdot, 0} = 0\mathcal{H}_{\cdot, 0} \oplus (\varepsilon)\mathcal{H}_{\cdot, 5},$$

d'où la réalisation de dimension 2:

$$a' = \begin{bmatrix} 4 & 25 \\ -20 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b' = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$c' = \begin{bmatrix} 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Comme on a aussi la dépendance linéaire  $\mathcal{H}_{\cdot,0} = 0\mathcal{H}_{\cdot,0} \oplus (-25)\mathcal{H}_{\cdot,5}$ , on aurait pu prendre  $b'' = \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \end{bmatrix}$ .

**1.2.3 Remarque** Les réalisations ci-dessus ne se déduisent pas les unes des autres par des changements de base. D'après 0.6.2.2, les matrice inversibles sont de la forme  $DP$  ( $D$  diagonale,  $P$  matrice de permutation). On n'aura jamais  $b'' = DPb'$  dans l'exemple ci-dessus. Nous montrons dans la section suivante que les réalisations faibles de dimension 2 ci-dessus sont des réalisations minimales.

La réciproque de la Proposition 1.2.1 est fausse: la matrice de Hankel d'une série rationnelle n'est pas en général de rang faible fini.

**1.2.4 Contre exemple** Soit la série rationnelle

$$s = (\gamma^2)^* \oplus 1\gamma((1\gamma)^2)^* ,$$

soit en identifiant le coefficient de  $\gamma^i$

$$s_i = \begin{cases} e & \text{si } i \text{ pair} \\ 1^i & \text{si } i \text{ impair.} \end{cases}$$

Le moduloïde engendré par les colonnes de la matrice de Hankel de  $s$  n'est pas de type fini. Supposons par l'absurde ce moduloïde de type fini. D'après la remarque 5.5.7 du chapitre 0, il existe une famille finie  $\{\mathcal{H}_{\cdot,i_1}, \dots, \mathcal{H}_{\cdot,i_k}\}$  de colonnes de  $\mathcal{H}$  engendant le moduloïde des colonnes, soit pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , une combinaison linéaire de la forme

$$\mathcal{H}_{\cdot,i} = \bigoplus_{l=1}^k \lambda_{il} \mathcal{H}_{\cdot,i_l} . \quad (1.2.c)$$

(i) Si  $i$  et  $i_l$  n'ont pas même parité, alors  $\lambda_{il} = \varepsilon$ . Sous cette hypothèse, on a en effet:

$$\lambda_{il} \leq \bigwedge_{j \in \mathbb{N}} \frac{\mathcal{H}_{j,i}}{\mathcal{H}_{j,i_l}} = \left( \bigwedge_{j \in \mathbb{N} \cap (i+2\mathbb{Z})} \frac{e}{1^{j+i}} \right) \wedge \left( \bigwedge_{j \in \mathbb{N} \cap (i+2\mathbb{Z}+1)} \frac{1^{j+i}}{e} \right) = \varepsilon .$$

(ii) On a  $\lambda_{il} \leq e$ . Via (i), on peut supposer  $i$  et  $i_l$  de même parité. On a alors:

$$\lambda_{il} \leq \frac{\mathcal{H}_{ii}}{\mathcal{H}_{ii_k}} = \frac{e}{e} = e .$$

(iii) Il n'y a pas de famille génératrice finie formée de colonnes de  $\mathcal{H}$ . Sinon, compte tenu de (ii), le premier coefficient de toute colonne de  $\mathcal{H}$  serait majoré: contradiction.

Ce contre exemple contredit le résultat de Cunningham-Green ([26], Proposition 4 et assertion suivante), qui ne tient pas compte de la condition de coïncidence des taux des suites extraites. De manière plus précise, on peut caractériser les séries dont la matrice de Hankel est de rang faible fini. On dira que la série périodique  $s$  admet *un seul taux* s'il existe un scalaire  $\bar{\lambda}$  tel que  $s_{n+c} = \bar{\lambda}^c s_n$  (ou de manière équivalente, si l'application  $\lambda$  ne prend que les valeurs  $\varepsilon$  et  $\bar{\lambda}$  dans la définition générale de la périodicité 1.1.3). En particulier, d'après le théorème de cyclicité des puissances de  $A$ , lorsque  $A$  est *irréductible*, la suite  $s_n = CA^nB$  admet un seul taux (avec  $\bar{\lambda} = \rho(A)$ ).

### 1.2.5 Proposition

*La matrice de Hankel de  $s$  est de rang fini si et seulement si  $s$  admet un seul taux.*

Si  $s$  admet un seul taux, la matrice de Hankel n'a qu'un nombre fini de colonnes distinctes (à la multiplication par un scalaire près), et est a fortiori de rang fini. Réciproquement, on montre que si l'application  $\lambda$  prend plusieurs valeurs non nulles dans 1.1.3, il n'existe pas de sous famille génératrice finie extraite de l'ensemble des colonnes de la matrice de Hankel. Quitte à tronquer les premiers termes, on pourra supposer une série de terme général

$$s_{i+k} = a_i \lambda_i^k$$

où tous les  $a_i$  sont non nuls et les scalaires  $\lambda_i$  prennent au moins deux valeurs non nulles distinctes. On est alors ramené à une version générale du contre exemple 1.2.4, qui se traite par un argument (un peu plus technique) analogue laissé au lecteur.

**1.2.6 Remarque** Lorsque la série périodique  $s$  n'a pas un unique taux, on peut cependant adapter l'algorithme de la Proposition 1.2.1. Soit pour  $n$  grand  $s_{n+c} = \lambda_n^c s_n$ . On considère les  $c$  séries  $s^0, \dots, s^{c-1}$  définies par:

$$s_n^i = \begin{cases} s_n & \text{si } n \in i + c\mathbb{N} \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chacune de ces séries admet un unique taux, et l'on a  $s = s^0 \oplus \dots \oplus s^{c-1}$ . On peut alors réaliser chaque  $s^i$  à l'aide de l'algorithme de l'algorithme de la Proposition 1.2.1 soit une réalisation  $(C_i, A_i, B_i)$ . Il est clair que

$$C = [C_0, \dots, C_{c-1}], \quad A = \text{diag}(A_0, \dots, A_{c-1}), \quad B = \begin{bmatrix} B_0 \\ \vdots \\ B_{c-1} \end{bmatrix}$$

est une réalisation de  $s$ .

**1.2.7 Interprétation en termes de réseau de Petri** On a représenté à gauche de la Figure VI.2 le graphe d'événements temporisés associé à  $(a, b, c)$ . La réalisation  $(a', b', c')$  ci-dessus n'a

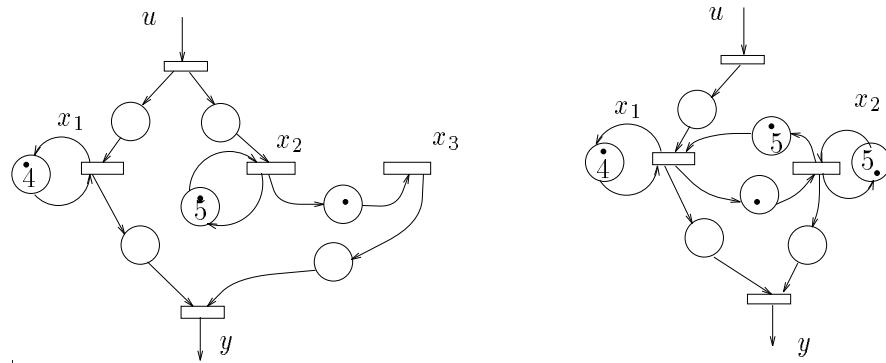


Figure VI.2: Graphe d'événements et graphe d'événements minimal

pas de sens en termes de graphes d'événements temporisés dans la mesure où les temporisations

sont négatives. En considérant le changement de base  $a_0 = Da'A^{-1}, b_0 = Db', c_0 = c'D^{-1}$  où  $D = \text{diag}(25, 20)$ , on a la réalisation équivalente

$$a_0 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad c_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On obtient ainsi un système à coefficients positifs correspondant au réseau de Petri dessiné à droite de la Figure VI.2. Trouver une réalisation minimale est équivalent à trouver un réseau de Petri avec un nombre minimal de transitions internes, tel qu'on ait exactement un jeton sur chaque place entre des transitions internes et aucun jeton entre les transitions internes et les entrées (resp. les sorties).

**1.2.8 Remarque** On a des résultats duals faisant intervenir le dioïde  $\mathbb{R}_{\min}$  en considérant des séries dans  $\mathbb{R}_{\min}[[\delta]]$ , ce qui revient à minimiser le nombre de transitions internes du réseau de Petri, avec la contrainte d'un retard d'une unité de temps entre ces transitions. Il paraît plus difficile de traiter des contraintes mixtes (un jeton ou un retard entre deux transitions internes) ce qui se traduirait par un problème de réalisation minimale pour des séries rationnelles à coefficients booléiens en les variables *commutatives*  $\gamma$  et  $\delta$ .

**1.2.9 Contre exemple** Nous montrons que la réalisation faible peut être arbitrairement “mauvaise”. On considère le système suivant:

$$a = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 4 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

On a la matrice de Hankel tronquée:

$$h_{[0..5|0..5]} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 12 & 16 & 20 & 25 \\ 9 & 12 & 16 & 20 & 25 & 30 \\ 12 & 16 & 20 & 25 & 30 & 35 \\ 16 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 \\ 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 \\ 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 \end{bmatrix}$$

On trouve en appliquant 0,§5.5 une base faible formée des colonnes d'indices 0,1,2,4. On a donc une réalisation faible de dimension 4 supérieure à la dimension initiale. Plus généralement, prenons la nouvelle matrice à coefficients dans  $\mathbb{R}_{\max}$ .

$$c = \begin{bmatrix} 0 & r & s \end{bmatrix}.$$

On obtient après un calcul simple l'expression suivante de la série de transfert du système  $(a, b, c)$ :

$$h = (\gamma\delta^5)^* \oplus \delta^r(\gamma\delta^4)^* \oplus \delta^s(\gamma\delta^3)^*.$$

La fonction  $\text{dat } h$  est la suivante (pour des valeurs entières de  $N$ )

$$\text{dat } h(N) = \max(5 \times N, r + 4 \times N, s + 2 \times N) = N^5 \oplus rN^4 \oplus sN^3 = N^3(N \oplus r \oplus \sqrt{s})(N \oplus (\frac{s}{r} \wedge \sqrt{s})) ,$$

qui n'est autre que la max de trois fonctions affines. La première colonne de la matrice de Hankel est donnée par  $\mathcal{H}_{n0} = \text{dat } h(n)$ , et l'on a plus généralement  $\mathcal{H}_{ni} = \text{dat } h(n+i)$ . Supposons  $r^2 > s$ , on a alors deux coins distincts positifs pour la fonction affine par morceaux  $\text{dat } h$

$$n_1 = r > n_2 = \frac{s}{r} .$$

On suppose en outre  $s, r \in \mathbb{N}$  et  $s > r$  de sorte que  $\frac{s}{r} = s - r \in \mathbb{N}$ . On a donc:

$$\mathcal{H}_{ni} = (ni)^3(ni \oplus r)(ni \oplus \frac{s}{r}) . \quad (1.2.d)$$

**1.2.10 Lemme** *Sous les hypothèses précédentes, et si  $1 \otimes \frac{s}{r} \prec r$ , les colonnes  $\mathcal{H}_{\cdot,0}, \dots, \mathcal{H}_{\cdot,\frac{s}{r}}$  sont faiblement indépendantes dans le moduloïde des colonnes de  $\mathcal{H}$ .*

Il en résulte que la dimension de la réalisation faible de  $\mathcal{H}$  est supérieure à  $1 \otimes \frac{s}{r} = s - r + 1$  et peut donc être arbitrairement grande devant la dimension minimale de réalisation (majorée par 3).

On peut voir sur la Figure VI.3 que les colonnes  $\mathcal{H}_{\cdot,i}$  pour  $0 \leq i \leq s - r$  sont faiblement indépendantes, i.e. que l'on n'a pas une combinaison:

$$\mathcal{H}_{\cdot,i} = \bigoplus_{j \in J} \lambda_j \mathcal{H}_{\cdot,j} , \quad (1.2.e)$$

où  $J$  est une partie finie de  $\mathbb{N}$  ne contenant pas  $i$ . Le coefficient  $\lambda_j$  est en effet tel que la fonction associée à  $\lambda_j \mathcal{H}_{\cdot,j}$  soit en dessous de  $\mathcal{H}_{\cdot,i}$ . Comme on passe du graphe de la colonne 0 au graphe de la colonne  $i$  par une translation de  $i$  unités vers la gauche, il est géométriquement clair que la partie du graphe de  $\mathcal{H}_{\cdot,i}$  entre  $\frac{s}{r}$  et  $r$  ne sera pas atteinte par le max à droite de (1.2.e). Cet argument motive la preuve algébrique suivante.

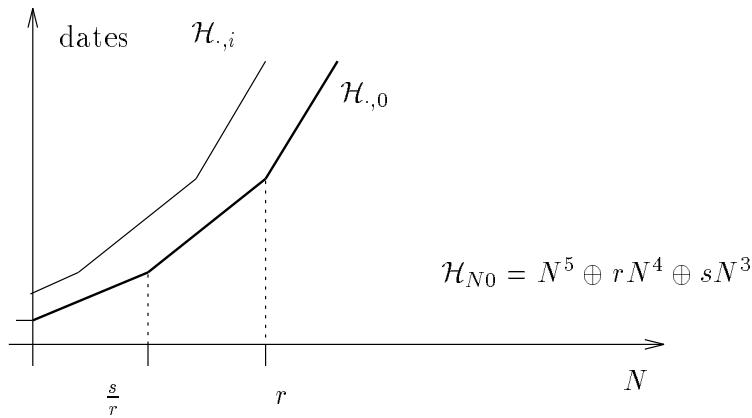


Figure VI.3: Transfert d'un système de rang faible élevé

**Preuve** de 1.2.10. Supposons une combinaison linéaire de type (1.2.e).

a/ Si  $j \prec i$ , alors  $\lambda_j \preceq (\frac{i}{j})^3$ . En effet, on a en remplaçant dans (1.2.d),

$$\mathcal{H}_{0i} = i^3 s \succeq \lambda_j \mathcal{H}_{0j} = \lambda_j j^3 s,$$

d'où a/.

b/ Si  $j \succ i$ , alors  $\lambda_j \preceq (\frac{i}{j})^5$ . En effet, on a pour  $n$  assez grand:

$$\mathcal{H}_{ni} = (ni)^5 \succeq \lambda_j \mathcal{H}_{nj} = \lambda_j (nj)^5,$$

d'où b/.

c/ Choisissons  $k$  tel que  $\frac{s}{r} \prec ki \prec r$ . On a  $\bigoplus_{j \in J} \lambda_j \mathcal{H}_{kj} \prec \mathcal{H}_{ki}$ .  
 Dans le cas où  $j < i$ , via a/, on a

$$\begin{aligned}\lambda_j \mathcal{H}_{kj} \preceq (\frac{i}{j})^3 \mathcal{H}_{kj} &= (\frac{i}{j})^3 (kj)^3 (kj \oplus r) (kj \oplus \frac{s}{r}) \\ &= i^3 k^3 r (kj \oplus \frac{s}{r}) = r(ki)^4 \frac{(kj \oplus \frac{s}{r})}{ki} \prec r(ki)^4 = \mathcal{H}_{ki}.\end{aligned}$$

Dans le cas où  $j > i$ , via b/, on a:

$$\begin{aligned}\lambda_j \mathcal{H}_{kj} \preceq (\frac{i}{j})^5 \mathcal{H}_{kj} &= (\frac{i}{j})^5 (kj)^3 (kj \oplus r) (kj \oplus \frac{s}{r}) \\ &= \frac{i^5}{j^2} k^3 (kj \oplus \frac{s}{r}) kj = r(ki)^4 (\frac{ki}{r} \oplus \frac{i}{j}) \prec r(ki)^4 = \mathcal{H}_{ki}.\end{aligned}$$

Cela achève la preuve de c/ et du Lemme. ■

**1.2.11 Remarque** Dans le cas ci-dessus,  $\frac{s}{r} = 6 - 4 = 2$ . On a trouvé les colonnes 0,1,2 faiblement indépendantes ce qui est en accord avec le Lemme 1.2.10.

## 2 Critères de minimalité

### 2.1 Critère de rang mineur

**2.1.1 Proposition** *Le rang mineur de la matrice de Hankel est au plus égal à la dimension de la matrice A.*

**Preuve** Cela résulte de  $\mathcal{H} = \mathcal{OC}$ , où  $\mathcal{O} = [C, CA, CA^2, \dots]^T$  et  $\mathcal{C} = [B, AB, A^2B, \dots]$  sont les matrices d'observabilité et de commandabilité usuelles. Soit un mineur extrait de  $\mathcal{H}$ ,  $\det \mathcal{H}_{[I|J]}$ . Il résulte de la formule de Binet-Cauchy symétrisée (cf. I,2.1.8) que

$$\det \mathcal{H}_{[I|J]} \nabla \bigoplus_K \det \mathcal{O}_{[I|K]} \det \mathcal{C}_{[K|J]}$$

laquelle somme est nulle dès que l'ordre du mineur est plus grand que  $n$ . ■

Le corollaire suivant en résulte immédiatement.

**2.1.2 Corollaire** *La dimension minimale de réalisation est supérieure ou égale au rang mineur de la matrice de Hankel.*

**2.1.3 Application au système étudié en 1.2.2** On a

$$\det \mathcal{H}_{[12|56]} = \det \begin{bmatrix} 16 & 20 \\ 20 & 25 \end{bmatrix} = 41 \nabla \varepsilon,$$

d'où il résulte que le rang mineur de la matrice de Hankel est au moins égal à 2, et donc que les réalisations faibles de dimension 2 exhibées plus haut sont des réalisations minimales.

**2.1.4 Remarque** Le critère 2.1.2 est valable dans un demi-anneau commutatif quelconque.

## 2.2 Un contre exemple

### 2.2.1 Proposition

*On considère la suite suivante*

$$s_k = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } \exists p \in \mathbb{N}, \ k = 3^p \\ e & \text{sinon} \end{cases}$$

*La suite  $s_k$  n'est pas réalisable, cependant, la matrice de Hankel  $H$  associée est de rang mineur fini.*

Comme la suite  $s_k$  n'est pas périodique, elle n'est pas réalisable. Le fait que les déterminants extraits de  $H$  d'ordre assez grand sont égaux à  $e^\bullet$  résulte des petits résultats combinatoires suivants.

### 2.2.2 Proposition

*Soit  $A \in \mathbb{B}^{n \times n}$ . Si  $\det A \neq \varepsilon$ , alors  $A$  a au moins  $\frac{n(n-1)}{2}$  coefficients nuls.*

**Preuve** Pour une matrice  $2 \times 2$ , c'est immédiat. Quitte à multiplier  $A$  par une matrice de permutation, on peut supposer  $\bigotimes_i A_{ii} = e$ . Si le coefficient  $A_{ij}$  est non nul, le coefficient  $A_{ji}$  est nécessairement nul (sinon, via le résultat en dimension 2,  $\det A = \det A[ij|ij]e \oplus \dots = e^\bullet \oplus \dots = e^\bullet$ ). Ainsi, la moitié seulement des coefficients hors diagonaux peut être non nul. On observe que la borne est atteinte pour les matrices triangulaires. ■

Il est intuitivement assez clair que si  $s_k$  a asymptotiquement peu de zéros, les mineurs d'ordre élevé de  $H$  auront beaucoup de  $e$ , et seront donc équilibrés. Pour montrer cela, étant donnée la structure de la matrice de Hankel, il n'est pas étonnant de faire appel à la notion suivante de triangle.

### 2.2.3 Définition

*La matrice  $A$  est dite sans triangle inférieur si on n'a pas*

$$A_{ij} = \varepsilon, \quad A_{lk} = \varepsilon, \quad A_{\max(i,l), \max(j,k)} = \varepsilon \quad \text{pour } i \neq l \text{ et } j \neq k.$$

Cette définition correspond au dessin de la Figure VI.4:

---

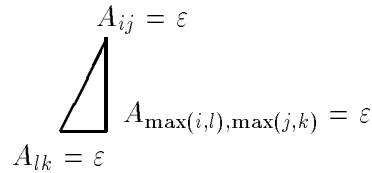


Figure VI.4: Triangle inférieur

---

### 2.2.4 Lemme

*La matrice  $H$  est sans triangles inférieurs.*

**Preuve** Si  $i+j = 3^p, l+k = 3^q$ , on a  $\max(i, l) + \max(j, k) \leq 2 \times 3^{\max(p, q)}$ . Si  $H$  admet un triangle inférieur, on a  $\max(i, l) + \max(j, k) = 3^r$  avec nécessairement  $r > \max(p, q)$ , d'où  $3^r \leq 2 \times 3^{\max(p, q)}$ : contradiction. ■

On montre maintenant qu'une grande matrice sans triangles inférieurs n'a pas trop de  $\varepsilon$ , ce qui d'après 2.2.1, entraîne la finitude du rang mineur de  $H$ . Cela résulte de la proposition suivante.

**2.2.5 Proposition** Soit  $C(n, p)$  le nombre maximal de zéros d'une matrice de taille  $n \times p$  sans triangles inférieurs. On a:

$$C(n, p) = n + p - 1 .$$

**Preuve** Tout d'abord,  $C(n, 1) = n$ ,  $C(p, q) = C(q, p)$ . Soit  $r$  le nombre de zéros dans la dernière colonne de  $A$ . On a l'équation de type programmation dynamique suivante:

$$C(n, p) = \max_{1 \leq r \leq n} [C(n - r + 1, p - 1) + r] . \quad (2.2.a)$$

Supposons en effet des zéros sur la dernière colonne en position  $(i_1, p), (i_2, p), \dots, (i_r, p)$  avec  $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \dots & p-1 & p \end{matrix} \\ \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_r \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccc} & & & \varepsilon \\ + & \dots & + & \varepsilon \\ + & \dots & + & \varepsilon \end{array} \right] \end{matrix} .$$

Les coefficients des  $p - 1$  premières colonnes sur les lignes  $i_2, \dots, i_r$  sont nécessairement non-nuls (coefficients marqués d'un signe +). Moyennant le choix de  $r$ , on se ramène à maximiser le nombre de coefficients non nuls sur la sous-matrice de taille  $(n - r + 1) \times (p - 1)$ ,  $A(i_2 \dots i_r | p)$  (soit  $A$  privée des lignes avec des + et de la dernière colonne), ce qui donne la récurrence ci-dessus. On obtient les premières valeurs de  $C(n, p)$ :

$n, p$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	...
3	3	4	5	...	
4	4	...			

d'où l'on induit immédiatement la formule 2.2.5. ■

Ainsi, le nombre de zéros d'un mineur d'ordre  $n$  extrait de  $H$  est au maximum  $C(n, n) = 2n - 1$ . Comme  $\frac{n(n-1)}{2} > 2n - 1$  pour  $n \geq 5$ , on a par la proposition 2.2.2 que tous les mineurs de  $H$  de taille supérieure à 5 sont équilibrés. Cela achève la preuve du contre exemple 2.2.1. ■

### 2.3 Critère classique

Un moduloïde  $M$  de  $\mathbb{R}_{\max}^N$  sera dit stable si  $\gamma^{-1}M \subset M$ . On a de manière analogue au cas des séries “posi-rationnelles” [37]:

**2.3.1 Proposition** La dimension minimale de réalisation d'une série rationnelle est égal à la plus petite dimension faible (cf. 0.5.5.3) d'un moduloïde stable contenant les colonnes de  $\mathcal{H}$ .

**Preuve** Si  $\mathcal{H} = \mathcal{OC}$ , où les matrices  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{C}$  ont été définies plus haut, on a  $\gamma^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{O}A$ , et donc le moduloïde engendré par les colonnes de  $\mathcal{O}$  est stable. Réciproquement, soit  $u_1, \dots, u_r$  une base faible de ce moduloïde. On obtient une réalisation de dimension  $r$  en adaptant la preuve de 1.2.1.

■

La caractérisation ci-dessus n'est pas effective, et la réalisation minimale d'une série rationnelle reste un problème ouvert. La condition dans 2.3.1 est équivalente à trouver une factorisation  $\mathcal{H} = UV$ , avec  $U$  stable. On notera que le problème plus général que 2.3.1, qui consiste à trouver le rang de Schein de la matrice  $\mathcal{H}$ , i.e. une factorisation  $UV$  sans la condition de stabilité est lui-même ouvert. Même dans le cas des matrices de Boole, il semble qu'il n'y ait pas d'algorithmes polynômiaux connus pour trouver le rang de Schein [50].

## **Partie C**

# **Outils et applications**



## Chapitre VII

# Algèbre rationnelle des graphes d'événements temporisés

### Introduction

On a vu au cours du Chapitre V que les graphes d'événements temporisés se modélisent naturellement par des opérateurs linéaires stationnaires continus sur le moduloïde des compteurs, ou dualement, sur le moduloïde des dateurs. D'ordinaire, les équations stationnaires faisant intervenir des opérateurs linéaires du type dérivation, différence finie ou retard, se résolvent par un calcul sur les transformées de Fourier, transformées en  $z, \dots$ , ce qui a pour effet de ramener un problème d'intégration d'équations différentielles ou d'équations récurrentes à un problème d'algèbre sur les fractions rationnelles. Ici, on ne peut raisonner sur les transformées de Fenchel, ou "fonctions de transfert" introduites en V,§4. Il y a en effet une "perte d'information" par transformée de Fenchel (celle-ci n'est pas injective). Il est cependant pertinent d'étudier les opérateurs continus stationnaires d'un point de vue purement algébrique. Le dioïde de ces opérateurs est isomorphe à un dioïde de séries formelles convenablement quotienté. Ce dioïde de séries rationnelles joue en quelque sorte le même rôle que le corps des fractions rationnelles dans le calcul de Heaviside. Cette approche est due à Cohen, Moller, Quadrat et Viot [23]. Notre contribution consiste à avoir précisé (et implémenté) l'algèbre effective de ces opérateurs. Ce chapitre développe les résultats publiés dans un papier antérieur en collaboration avec C. Klimann [42] et y ajoute la caractérisation des périodes des séries rationnelles (c'est l'analogue pour les séries formelles de l'étude des cyclicités des matrices dans la théorie de Perron-Frobenius). Signalons la contribution de X. Xinhe, Y. Haibin, L. Changyou et W. Liming [101], légèrement postérieure à la notre [42]. Ces auteurs obtiennent par des techniques de nature "géométrique" des résultats analogues sur les sommes et produits de séries rationnelles (sans les questions de périodicité).

Les algorithmes que nous avons obtenus ont été implémentés, et constituent le "package" MAX, écrit en MAPLE, qui fait l'objet du Chapitre suivant. Les problèmes algorithmiques les plus techniques sont traités en détail dans l'Appendice B.

### 1 Un exemple de graphe d'événements temporisé

On considère le graphe d'événements temporisé représenté sur la Figure VII.1. Nous renvoyons le lecteur à [23] pour les questions de modélisation des graphes d'événements, et rappelons seulement

les faits suivants. Un graphe d'événements est un graphe biparti avec deux sortes de sommets: les places (cercles) et les transitions (rectangles). Dans le graphe circulent des jetons (cercles noirs) selon la règle illustrée sur la Figure VII.2: on dit qu'une transition est tirable s'il y a au moins 1 jeton dans chaque place amont. Lorsque la transition est tirée, on retire un jeton dans chaque place amont et l'on rajoute un jeton dans chaque place aval. Ici, le graphe est temporisé: les jetons doivent séjournner au moins un temps donné dans une place avant de devenir disponible pour le tir d'une transition aval. Les temps sont représentés par des bâtonnets sur la Figure VII.1. Par exemple, un jeton doit séjournner au moins 3 unités de temps dans la place entre  $u^1$  et  $x^1$  avant de permettre le tir de  $x^1$ . On va donner deux points de vue sur ce système.

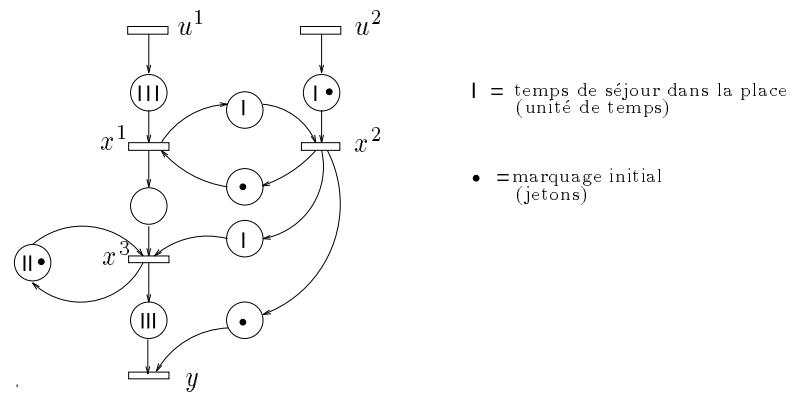


Figure VII.1: Un graphe d'événements temporisé

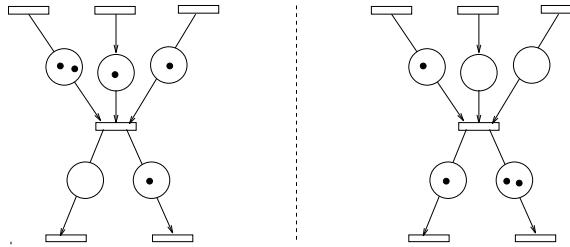


Figure VII.2: Tir d'une transition

## 1.1 Représentation par des systèmes linéaires récurrents

En associant à chaque transition  $x^i$  ( $u^i, y, \dots$ ) le *compteur*  $x_t^i$  (nombre de tirs de la transition  $i$  jusqu'à l'instant  $t$ ), on peut écrire le système d'équations ( $\min, +$ )-linéaires suivant:

$$\begin{cases} x_t^1 = \min(1 + x_{t-1}^2, u_{t-3}^1) \\ x_t^2 = \min(x_{t-1}^1, 1 + u_{t-1}^2) \\ x_t^3 = \min(x_t^1, x_{t-1}^2, 1 + x_{t-2}^3) \end{cases} \quad y_t = \min(1 + x_t^2, x_{t-3}^3) , \quad (1.1.a)$$

Avec les notations du dioïde  $\mathbb{R}_{\min}$ , on peut écrire:

$$\begin{cases} x_t^1 = 1x_t^2 \oplus u_{t-3}^1 \\ x_t^2 = x_{t-1}^1 \oplus 1u_{t-1}^2 \\ x_t^3 = x_t^1 \oplus x_{t-1}^2 \oplus 1x_{t-2}^3 \end{cases} \quad y_t = 1x_t^2 \oplus x_{t-3}^3 , \quad (1.1.b)$$

Matriciellement, il s'agit d'un système récurrent avec une partie implicite, soit  $x_t = A_0x_t \oplus A_1x_{t-1} \oplus A_2x_{t-2} \oplus B_1u_{t-1} \oplus B_3u_{t-3}$ . La solution au plus tôt est donné par

$$x_t = A_0^*(A_1x_{t-1} \oplus A_2x_{t-2} \oplus B_1u_{t-1} \oplus B_3u_{t-3}) . \quad (1.1.c)$$

Le calcul de (1.1.c) revient à éliminer la partie implicite dans (1.1.b) (par exemple, on substitue  $x_t^2 = x_{t-1}^1 \oplus 1u_{t-1}^2$  dans la première équation). On obtient alors:

$$\begin{cases} x_t^1 = 1x_{t-1}^1 \oplus 2u_{t-1}^2 \oplus u_{t-3}^1 \\ x_t^2 = x_{t-1}^1 \oplus 1u_{t-1}^2 \\ x_t^3 = 1x_{t-1}^1 \oplus 2u_{t-1}^2 \oplus u_{t-3}^1 \oplus x_{t-1}^2 \oplus 1x_{t-2}^3 \end{cases} \quad y_t = 1x_t^2 \oplus x_{t-3}^3 .$$

En prenant les vecteurs  $x_t = [x_t^1, x_t^2, x_t^3, x_{t-1}^3, x_{t-2}^3, x_{t-3}^3]^T$  et  $u_t = [u_{t-3}^1, u_{t-1}^2]$ , on se ramène à la forme standard

$$x_t = Ax_{t-1} \oplus Bu_t, \quad y_t = Cx_t \quad (1.1.d)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & e & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e & 2 \\ \varepsilon & 1 \\ e & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} . \quad (1.1.e)$$

Plus généralement, l'étude des graphes d'événements temporisés se ramène à celle des systèmes linéaires récurrents (1.1.d). Un cas particulier intéressant est celui d'une entrée non contraignante ( $u = \varepsilon$ ). On obtient alors  $x_t = A^tx_0$ , de sorte que l'étude du comportement du graphe en régime autonome se ramène au l'étude des puissances de  $A$ . Lorsque  $A$  est irréductible, on a le résultat de cyclicité suivant, du à Cohen, Dubois, Quadrat et Viot [17]:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \exists c \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \forall n \geq N, \quad A^{n+c} = \rho(A)^c A^n , \quad (1.1.f)$$

où  $\rho(A)$  dénote la moyenne arithmétique minimale (pour l'ordre naturel) des circuits de la matrice  $A$  (cf. Chapitre IV). Autrement dit, le système atteint un régime périodique en un temps fini, au bout duquel on a

$$x_{t+c} = \rho(A)^c x_t = c \times \rho(A) + x_t , \quad (1.1.g)$$

i.e.  $c \times \rho(A)$  événements arrivent toutes les  $c$  unités de temps. Au vu de (1.1.g), le rayon spectral  $\rho(A)$  s'interprète comme le *taux de production* du système. En l'occurrence,  $\rho(A)$  est égal au poids moyen du circuit  $a_{34}a_{43}$ , soit

$$\rho(A) = \frac{A_{34} + A_{43}}{2} = \frac{1}{2} .$$

## 1.2 Approche opératorielle

On introduit deux opérateurs de décalage  $\gamma$  et  $\delta$  sur les compteurs, soient:

$$\begin{aligned} (\gamma x)(t) &= x(t) + 1 \\ (\delta x)(t) &= x(t - 1) . \end{aligned}$$

On rappelle (cf. V,§2.1) que  $\gamma$  et  $\delta$  vérifient les règles de simplification suivantes:

$$\forall c, c', d, d' \in \mathbb{Z}, \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \gamma^c \oplus \gamma^{c'} = \gamma^{\min(c, c')} \\ \text{(ii)} & \delta^d \oplus \delta^{d'} = \delta^{\max(d, d')} . \end{array} \quad (1.2.a)$$

Le système (1.1.b) se réécrit comme suit à l'aide de ces opérateurs:

$$x = ax \oplus bu, \quad y = cx, \quad \text{où } a = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \delta & \gamma\delta^2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \delta^3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \gamma\delta \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma & \delta^3 \end{bmatrix} . \quad (1.2.b)$$

Il s'agit là d'un système matriciel implicite en les opérateurs  $\gamma$  et  $\delta$ , que l'on résout formellement par  $y = ca^*bu$ . L'opérateur  $h = ca^*b$  mérite le nom de *transfert*. En l'occurrence, on calcule

$$y = hu = h_1 u_1 \oplus h_2 u_2 = \delta^8(\gamma\delta^2)^* u_1 \oplus \gamma\delta^5(\gamma\delta^2)^* u_2 . \quad (1.2.c)$$

Le coefficient  $h_1$  représente le transfert de la première entrée à la sortie. On constate que les coefficients de  $h$  sont des séries rationnelles en  $\gamma$  et  $\delta$  s'exprimant à l'aide d'une seule étoile. On verra plus loin que l'étoile  $(\gamma\delta^2)^*$  commune à  $h_1$  et  $h_2$  représente la *cyclicité* du système en régime autonome: ultimement, les transitions  $x^i$  et  $y$  seront tirées une fois (exposant de  $\gamma$ ) toute les deux (exposant de  $\delta$ ) unités de temps. En particulier, le taux de production s'obtient en divisant l'exposant de  $\gamma$  par celui de  $\delta$  dans  $(\gamma\delta^2)^*$ , soit  $\frac{1}{2}$ , en conformité avec §1.1. On voit sur cet exemple le gain (en compacité des notations) de la représentation par transfert (1.2.c) par rapport à la représentation récurrente. D'autres problèmes se posent par ailleurs en termes de transfert. Par exemple, on voit facilement que le graphe d'événements de la Figure VII.3 a même série de transfert. La caractérisation des graphes d'événements "minimaux" est un problème (ouvert) de réalisation minimale qui soulève les mêmes difficultés qu'en VI,1.2.8. Ce Chapitre étudie l'algèbre des opérateurs  $\gamma$  et  $\delta$ , et montre

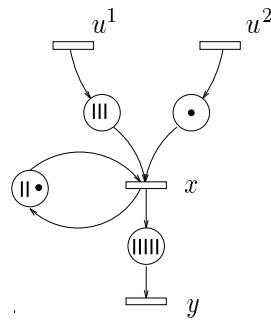


Figure VII.3: Graphe d'événements simplifié

en particulier comment calculer les séries de transfert de type (1.2.c)

## 2 Etude de l'algèbre des opérateurs $\gamma$ et $\delta$

### 2.1 Le dioïde $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$

Les opérateurs qui interviennent dans les graphes d'événements temporisés s'exprimeront comme somme d'opérateurs élémentaires  $\gamma^n \delta^t$  (on rappelle que  $\gamma$  et  $\delta$  commutent). Il est donc commode s'introduire le dioïde  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  des séries formelles commutatives à coefficients booléiens en deux indéterminées  $\gamma$  et  $\delta$  et à exposants dans  $\mathbb{Z}$  (contrairement à 0,1,0,8, où les exposants étaient positifs ou nuls).  $\gamma$  et  $\delta$  désignent donc dans l'écriture  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  deux *indéterminées*, et non plus les opérateurs de décalage. Une série formelle de  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  s'écritra de manière unique

$$s = \bigoplus_{n,t \in \mathbb{Z}} s(n,t) \gamma^n \delta^t, \quad (2.1.a)$$

avec  $s(n,t) = e$  ou  $\varepsilon$ . On note que  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  est un dioïde complet. Le *support* d'une série  $s$  est la partie de  $\mathbb{Z}^2$  suivante:

$$\text{supps} := \{(n, t) \in \mathbb{Z}^2 \mid s(n, t) \neq \varepsilon\}.$$

On a l'écriture creuse

$$s = \bigoplus_{(n,t) \in \text{supps}} \gamma^n \delta^t,$$

et l'on notera parfois  $s = \bigoplus_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ . On traduit ensuite les règles de simplification (1.2.a). On notera  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  le “quotient”<sup>1</sup> de  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  par les règles (1.2.a). On peut caractériser simplement le dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . Introduisons l'application  $\varphi$  suivante (ce qui sera justifié de manière heuristique dans un instant):

$$\varphi : \mathbb{B}[[\gamma, \delta]] \rightarrow \mathbb{B}[[\gamma, \delta]], \quad \varphi(s) = s \gamma^* (\delta^{-1})^* \quad (2.1.b)$$

Le résultat central est que deux séries booléennes  $s$  et  $s'$  donnent la même classe d'équivalence dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  ssi on a  $\varphi(s) = \varphi(s')$ .

**2.1.1 Théorème** *On a les égalités et isomorphismes de dioïdes:*

$$\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]] = \mathbb{B}[[\gamma, \delta]] / \varphi \simeq \mathcal{L}_{\text{stat}}(\text{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Z}}_{\min})) \simeq \mathcal{L}_{\text{stat}}(\text{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Z}}_{\max})).$$

**2.1.2 Argument heuristique** On constate que la règle (1.2.a),(i) entraîne

$$e = e \oplus \gamma \oplus \gamma^2 \oplus \dots = \gamma^*.$$

De même (1.2.a),(ii) entraîne

$$e = e \oplus \delta^{-1} \oplus \delta^{-2} \oplus \dots = (\delta^{-1})^*.$$

On a donc  $e = \gamma^* = (\delta^{-1})^* = \gamma^* (\delta^{-1})^*$ , et donc généralement pour tout opérateur  $s$ , l'identité  $s \gamma^* (\delta^{-1})^* = s$ . Cela suggère d'introduire l'application  $\varphi$  définie plus haut. Il résulte alors de  $(\gamma^* (\delta^{-1})^*)^2 = \gamma^* (\delta^{-1})^*$  (cf. 0,4.1.6,(v)) que

$$\varphi(s) = \varphi(s \gamma^* (\delta^{-1})^*)$$

i.e. que  $s$  et  $s \gamma^* (\delta^{-1})^*$  représentent bien le même élément dans le dioïde  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  quotienté par  $\varphi$ .

---

<sup>1</sup> De manière précise, le quotient par la plus fine des congruences  $\mathcal{R}$  vérifiant la règle (1.2.a). C'est l'analogue d'une *présentation* pour un groupe [65].

## 2.2 Preuve du théorème 2.1.1

**2.2.1 Lemme** *La relation  $\mathcal{R}_\varphi$  est une congruence vérifiant (1.2.a).*

**Preuve** Le fait que  $\mathcal{R}_\varphi$  est compatible avec la structure de dioïde complet de  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  résulte de ce que  $\varphi(\bigoplus_{i \in I} a_i) = \bigoplus_{i \in I} \varphi(a_i)$  et  $\varphi(ab) = \varphi(a)b = a\varphi(b)$ . Le fait que

$$\varphi(\gamma^c \oplus \gamma^{c'}) = \varphi(\gamma^{\min(c, c')}), \varphi(\delta^d \oplus \delta^{d'}) = \varphi(\delta^{\max(d, d')})$$

résulte d'un calcul immédiat. ■

**2.2.2 Lemme** *Toute congruence  $\mathcal{R}'$  vérifiant (1.2.a) est plus grossière que  $\mathcal{R}_\varphi$ .*

**Preuve** Il résulte de l'argument heuristique ci-dessus que toute série  $x$  est égale à  $x\gamma^*(\delta^{-1})^* = \varphi(x)$  modulo  $\mathcal{R}'$ . On a donc

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x\mathcal{R}'\varphi(x) = \varphi(y)\mathcal{R}'y$$

i.e.  $x\mathcal{R}_\varphi y \Rightarrow x\mathcal{R}'y$ . ■

L'égalité des deux premiers dioïdes dans le Théorème 2.1.1 résulte immédiatement des deux lemmes ci-dessus. ■

**2.2.3 Proposition (Isomorphisme séries-compteurs)** *On a l'isomorphisme suivant:*

$$\text{ser}_c : \begin{cases} \text{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Z}}_{\min}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]] \\ k & \longmapsto \text{ser}_c k = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \gamma^{k(t)} \delta^t \end{cases}$$

(avec la convention  $\gamma^{-\infty} = (\gamma^{-1})^*$  et  $\gamma^{+\infty} = \varepsilon$ ). L'isomorphisme **compt** inverse de **ser<sub>c</sub>** est défini par

$$\text{compt} := \text{ser}_c^\dagger, \quad [\text{ser}_c^\dagger(s)](t) = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid \gamma^n \delta^t \preceq s\}. \quad (2.2.a)$$

**Preuve** de la proposition 2.2.3.

(i): Il est immédiat que **ser<sub>c</sub>** est résiduable, de résiduée **compt** donnée par (2.2.a).

(ii): **ser<sub>c</sub>** est inversible à droite. Soit en effet

$$s = \bigoplus_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}.$$

On a pour tout  $i \in I$ ,  $(\text{ser}_c^\dagger(s))(t_i) \leq n_i$ , d'où  $(\text{ser}_c \circ \text{ser}_c^\dagger(s)) \succeq \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$  et en sommant sur les  $i$   $\text{ser}_c \circ \text{ser}_c^\dagger(s) \succeq s$ , i.e.  $\text{ser}_c \circ \text{ser}_c^\dagger \succeq \text{Id}$ . L'autre inégalité résultant de la définition même d'une application résiduée (cf. 0.5.1.1), on a que **ser<sub>c</sub>** est un inverse à droite de **ser<sub>c</sub>**.

(iii) **ser<sub>c</sub>** est injective (i.e. inversible à gauche). Cela résulte du lemme suivant:

**2.2.4 Lemme**  $\text{ser}_c k \preceq \text{ser}_c k'$  entraîne  $k \preceq k'$

**Preuve** de 2.2.4. Si

$$\bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \gamma^{k(t)} \delta^t \preceq \bigoplus_{t' \in \mathbb{Z}} \gamma^{k'(t')} \delta^{t'}$$

on a pour tout  $t$

$$\gamma^{k(t)} \delta^t \preceq \bigoplus_{t' \in \mathbb{Z}} \gamma^{k'(t')} \delta^{t'}$$

i.e.

$$\exists t' \in \mathbb{Z}, \quad \gamma^{k(t)} \delta^t \preceq \gamma^{k'(t')} \delta^{t'}$$

ce qui entraîne  $t' \geq t$  et  $k(t) \leq k'(t')$ . Comme  $k'$  est décroissante pour l'ordre  $\preceq$ , on a  $k'(t) \succeq k'(t') \succeq k(t)$ , d'où  $k \leq k'$  ce qui est bien 2.2.4.

(iii) il est immédiat que  $\text{ser}_c$  transforme le min point par point en somme de séries et l'inf-convolution en produit. ■

De manière analogue:

**2.2.5 Proposition (Isomorphisme séries-dateurs)** *On a l'isomorphisme*

$$\text{ser}_d : \left\{ \begin{array}{ccc} (\text{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Z}}_{\min}), \max, *) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]] \\ k & \longmapsto & \text{ser}_d k = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n \delta^{k(n)}. \end{array} \right.$$

avec la convention  $\delta^{+\infty} := \delta^*$  et  $\delta^{-\infty} := \varepsilon$ . L'isomorphisme  $\text{dat}$  inverse de  $\text{ser}_d$  est défini par

$$\text{dat} = \text{ser}_d^\dagger, \quad \text{dat } s(n) = \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid \gamma^n \delta^t \preceq s\} . \quad (2.2.b)$$

Le théorème résulte de 2.2.3 et du fait que le dioïde des systèmes linéaires stationnaires sur  $\text{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Z}}_{\min})$  est isomorphe à  $(\text{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Z}}_{\min}), \oplus, *)$  (cf. V,3.2.6). ■

L'application  $\text{compt } s$  (resp.  $\text{dat } s$ ) définie ci dessus sera qualifiée de “fonction compteur associée à  $s$ ” (resp. “fonction dateur associée à  $s$ ”).

**2.2.6 Lemme** *L'application  $\varphi : s \mapsto \varphi(s) = s \gamma^*(\delta^{-1})^*$ . est un isomorphisme continu de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  sur  $\varphi(\mathbb{B}[[\gamma, \delta]])$ .*

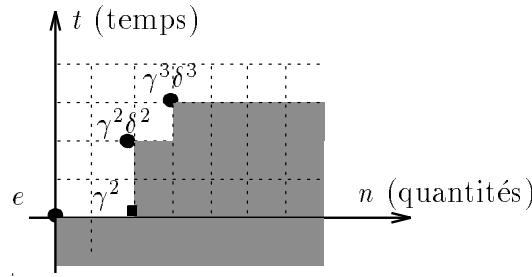
**Preuve** le seul point non trivial est  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ . Posons  $z = (\gamma \oplus \delta^{-1})$ . Par 0,4.1.6,(iv), on a  $z^* z^* = z^*$ , d'où  $\varphi(a)\varphi(b) = az^* bz^* = abz^* = \varphi(ab)$ . ■

Ce résultat autorise une représentation géométrique simple de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . L'application  $s \mapsto \text{supp } \varphi(s)$  permet em effet de représenter une série formelle de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  par une partie de  $\mathbb{Z}^2$ . Par exemple, on représente la classe d'équivalence de  $\gamma^2 \delta^2$  par le cône de  $\mathbb{Z}^2$  de type “sud-est”  $\{(2 + n', 2 - t'); (n', t') \in \mathbb{N}^2\}$ . Plus généralement, on associe au monôme  $\gamma^n \delta^t$  l'ensemble

$$\text{supp } \varphi(\gamma^n \delta^t) = [n, +\infty[\times] - \infty, t] = (n, t) + \mathbb{N} \times (-\mathbb{N}) , \quad (2.2.c)$$

et l'on représente une somme de tels monômes par l'union des cônes de type (2.2.c) associés. La Figure VII.4 représente le polynôme  $p = e \oplus \gamma^2 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^3$ . On observe que le monôme  $\gamma^2$  (représenté par le cône issu du carré noir) est innessionnel (i.e. peut être retiré du représentant sans en changer la classe d'équivalence modulo  $\varphi$ ), car dans l’“ombre” de  $\gamma^2 \delta^2$ .

Nous donnons maintenant deux formules utiles exprimant  $\text{compt } s$  et  $\text{dat } s$  en fonction d'un représentant quelconque de  $s$ .

Figure VII.4: Représentation graphique du polynôme  $p = e \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^2 \oplus \gamma^3\delta^3$ 

**2.2.7 Proposition** Soit  $s = \bigoplus_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ . Les fonctions compteur et dateur associées à  $s$  sont données par

$$\text{compt } s(t) = \inf_{t_i \geq t} n_i, \quad \text{dat } s(n) = \sup_{n_i \leq n} t_i.$$

**Preuve** Les propositions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{aligned}
 \gamma^n \delta^t &\preceq s && \text{dans } \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]] \\
 \varphi(\gamma^n \delta^t) &\preceq \varphi(s) && \text{dans } \mathbb{B}[[\gamma, \delta]] \\
 \gamma^n \delta^t &\preceq \varphi(s) && (\text{car } \varphi \succeq \text{Id et } \varphi^2 = \varphi) \\
 \{(n, t)\} &\subset \text{supp } \varphi(s) && (\text{par 2.2.6}) \\
 \{(n, t)\} &\subset \bigcup_i \text{supp } \varphi(\gamma^{n_i} \delta^{t_i}) \\
 \{(n, t)\} &\subset \bigcup_i [n_i, +\infty[ \times ]-\infty, t_i] && (\text{cf (2.2.c)}) \\
 \exists i \in I, \quad n &\geq n_i \text{ et } t \leq t_i
 \end{aligned}$$

Compte tenu de la dernière condition, l'expression de  $\text{compt } s$  donnée en (2.2.a) se réécrit:

$$\text{compt } s(t) = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists i \in I, \quad n \geq n_i \text{ et } t \leq t_i\} = \inf\{n_i \mid t_i \geq t\}.$$

Preuve analogue pour  $\text{dat } s$ . ■

Signalons enfin que l'on passe de  $\text{dat } s$  à  $\text{compt } s$  par une formule de type résiduation (cf. Caspi et Halbwachs [15]). On a

$$\text{dat } s(n) = \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid \text{compt } s(t) \leq n\}. \quad (2.2.d)$$

Soit en effet  $s = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} \gamma^{k(l)} \delta^l$  où  $k = \text{compt } s$ . On a

$$\begin{aligned}
 \text{dat } s(n) = h(n) &= \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid \gamma^n \delta^t \preceq \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} \gamma^{k(l)} \delta^l\} \\
 &= \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid \exists \tau \geq t, \quad n \geq k(\tau)\} \\
 &= \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid n \geq k(t)\} \quad \text{car } k \text{ est croissante.}
 \end{aligned}$$

■

■

## 2.3 Calcul dans le dioïde $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$

**2.3.1 Test d'inégalité** Le test d'inégalité (et donc d'égalité) de deux séries est simple. Comme on a

$$\bigoplus_{i \in I} a_i \preceq p \Leftrightarrow \forall i \in I, \quad a_i \preceq p \quad (2.3.a)$$

il suffit de savoir vérifier si un monôme est inférieur à une série  $s$ . On a  $\gamma^n \delta^t \preceq s = \bigoplus_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$  dans le dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  ssi on a dans  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$

$$\gamma^n \delta^t \preceq \varphi(s) = s \gamma^* (\delta^{-1})^*$$

soit en développant les étoiles:

$$\exists i \in I, \exists (n, t) \in \mathbb{N}^2 \quad \gamma^n \delta^t \preceq \gamma^{n_i+n} \delta^{t_i-t}$$

soit pour conclure

$$\gamma^n \delta^t \preceq \bigoplus_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \Leftrightarrow \exists i \in I, n \geq n_i \text{ et } t \leq t_i . \quad (2.3.b)$$

Graphiquement,  $(n, t)$  appartient à l'un des "cônes sud-est"  $(n_i, t_i) + \mathbb{N} \times (-\mathbb{N})$ , cf. Figure VII.4.

### 2.3.2 Représentant minimal des polynômes

Il est "clair" sur le dessin VII.4 que le représentant minimal<sup>2</sup> du polynôme représenté par une partie de  $\mathbb{Z}^2$  modulo  $\varphi$  est donné par "l'ensemble des points extrémaux en haut à gauche" de cette partie, en l'occurrence  $p_0 = e \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^3$ . De manière précise, on dira que le monôme  $\gamma^{n_i} \delta^{t_i}$  est redondant dans la somme  $p = \bigoplus_{j \in J} \gamma^{n_j} \delta^{t_j}$  si  $p = \bigoplus_{j \in J \setminus \{i\}} \gamma^{n_j} \delta^{t_j}$ , ou d'après (2.3.b):

$$\gamma^{n_i} \delta^{t_i} \text{ redondant} \Leftrightarrow \exists j \in J, n_i \geq n_j \text{ et } t_i \leq t_j .$$

Il est clair qu'en enlevant éventuellement des monômes redondants, on obtient *un* représentant minimal. L'unicité résulte de ce que les monômes  $\gamma^{n_k} \delta^{t_k}$  du représentant minimal sont "extrémaux en haut à gauche", i.e. vérifient:

$$\gamma^{-1} \gamma^{n_k} \delta^{t_k} \not\preceq p \text{ et } \delta \gamma^{n_k} \delta^{t_k} \not\preceq p .$$

Nous laissons le lecteur préciser ce dernier point. On pourra aussi se reporter à l'annexe B où un résultat de représentant minimal est donné pour une classe générale dioïdes quotientés par de "bonnes congruences", dont  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  est un cas particulier.

En résumé, on peut énoncer:

**2.3.3 Proposition (Forme canonique)** *Un polynôme  $a \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$  s'écrit de manière unique sous la forme:*

$$a = \gamma^{n_1} \delta^{t_1} \oplus \gamma^{n_2} \delta^{t_2} \oplus \dots \oplus \gamma^{n_k} \delta^{t_k} . \quad (2.3.c)$$

où  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  et  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ . Le terme à droite de (2.3.c) est le représentant minimal de  $a$ .

Pour le polynôme de la Figure VII.4, la forme canonique de  $p$  est  $p = e \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^3$ . Nous renvoyons le lecteur à l'annexe B où les questions d'algorithme des représentants minimaux (réduction de la somme, du produit,...) sont précisément traitées.

---

<sup>2</sup>i.e. la plus petite série booléenne dans la classe d'équivalence

### 3 Séries rationnelles

#### 3.1 Généralités

On rappelle que la *clôture rationnelle* d'un sous ensemble  $\mathcal{E}$  d'un dioïde est définie comme le plus petit dioïde *rationnellement clos* (i.e. stable par l'opération étoile) contenant  $\mathcal{E}$ . On le note  $\mathcal{E}^*$ . On le caractérise comme l'ensemble formé sommes, produits et étoiles d'un nombre fini d'éléments de  $\mathcal{E}$ , ainsi que de  $\varepsilon$  et  $e$ . On a  $(\mathcal{E}^*)^* = \mathcal{E}^*$ .

**3.1.1 Définition (Séries rationnelles de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ )** *On appelle séries rationnelles les séries de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  appartenant à la clôture rationnelle de l'ensemble  $\{\gamma, \delta\}$ .*

Le dioïde des séries rationnelles coïncide évidemment avec la clôture rationnelle du dioïde des polynômes causaux. Les séries qui interviendront dans le calcul des transferts de graphes d'événements temporisés seront donc rationnelles.

#### 3.2 Représentation des rationnels

On a montré en 2.2.6 que le dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  se représentait comme l'ensemble des parties de  $\mathbb{Z}^2$  de la forme  $X + \mathcal{C}$ , où  $\mathcal{C}$  est le cône “sud-est”  $(1, 0)\mathbb{N} + (0, -1)\mathbb{N}$ . L'étude des rationnels de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  apparaît donc comme une spécialisation de la théorie des parties rationnelles de  $\mathbb{Z}^2$  (l'ensemble des rationnels de  $\mathbb{Z}^2$  est obtenu par clôture rationnelle de l'ensemble des singletons dans le dioïde  $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2), \cup, +)$ ). On peut donc appliquer certains résultats classiques [32]. Rappelons qu'une partie linéaire de  $\mathbb{Z}^k$  est un ensemble de la forme:

$$a + V^*$$

où  $a$  est un point et  $V$  une partie finie de  $\mathbb{Z}^k$ . Une union finie de parties linéaires,  $\cup_i(a_i + V_i^*)$ , est dite semi-linéaire. Par application immédiate des propriétés 0.4.1.6, on obtient des formules donnant les sommes, produits, étoiles d'expressions de type (3.2.a), ce qui au passage prouve que l'ensemble des parties semi-linéaires coïncide avec l'ensemble des rationnels. En revenant au dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ , on obtient immédiatement qu'une série  $s$  est rationnelle ssi elle s'écrit sous la forme:

$$s = \bigoplus_i a_i V_i^* , \quad (3.2.a)$$

où les  $a_i$  (resp.  $V_i$ ) sont des monômes (resp. polynômes) causaux.

Cette représentation est cependant insuffisante pour notre propos. Un rationnel  $s$  admet en effet des représentations différentes, et la détermination de l'égalité de deux de ces représentations requiert en général la résolution d'équations linéaires diophantiennes dont le nombre d'inconnues est de l'ordre du nombre maximal de monômes des  $V_i$ : par exemple, décider si le point  $b \in \mathbb{Z}^k$  appartient à  $a_i V_i^*$  avec  $V_i = \{u_1, \dots, u_r\}$  revient à trouver  $x \in \mathbb{N}^r$  tel que  $b = a_i + \sum_{l=1}^k x_l u_l$ . De même, le calcul de l'inf de telles expressions, de leurs différences et quotients résidués, ainsi que la détermination du dateur ou du compteur (et donc du sens physique) associé à la série  $s$  donnée par (3.2.a) n'est pas clair.

Il est cependant un cas où l'on a une représentation plus simple que (3.2.a). Nous allons considérer d'abord les parties rationnelles de  $\mathbb{N}$ , et nous donnerons un résultat de *périodicité* pour les parties rationnelles de  $\mathbb{N}$  (que nous n'avons pas trouvé sous cette forme dans la littérature, mais qui est conséquence immédiate de résultats classiques). Nous montrerons ensuite comment ce résultat s'étend naturellement au dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ .

### 3.3 Analogie avec les parties rationnelles de $\mathbb{N}$

**3.3.1 Définition** La partie  $X \subset \mathbb{N}$  est dite ultimement périodique (ou plus simplement périodique) s'il existe un entier  $n$ , deux parties finies  $P$  et  $Q$  telles que (i) le plus petit élément de  $Q$  majore strictement  $P$ , (ii)  $Q$  soit de diamètre au plus  $n - 1$ , et

$$X = P \cup (Q + \{n\}^*) = P \cup Q \cup (Q + n) \cup (Q + 2n) \cup (Q + 3n) \dots . \quad (3.3.a)$$

Les conditions (i) et (ii) ne sont là que pour que cette union soit disjointe et puisse s'interpréter géométriquement: nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'on définit le même ensemble de parties en supprimant les conditions (i) et (ii). L'interprétation de (3.3.a) est claire: soit  $K = \min Q$ , la partie tronquée  $X \cap [K, +\infty[$  est formée de l'ensemble de points  $Q$  répété avec les translations successives  $n, 2n, 3n, \dots$ . L'entier  $n$  mérite le nom de période.

**3.3.2 Exemple** La partie  $X = \{0, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, \dots\}$  est périodique de période  $n = 4$ . Prendre  $P = \{0\}$  et  $Q = \{4, 5\}$ .

On a alors le résultat élémentaire suivant:

**3.3.3 Théorème** Une partie de  $\mathbb{N}$  est rationnellessi elle est périodique.

**Esquisse de preuve** Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des parties périodiques, et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des singltons. L'ensemble des parties rationnelles est égal à  $\mathcal{S}^*$ . Comme trivialement (o):  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{S}^*$ , il suffit pour montrer 3.3.3 de vérifier que l'ensemble des séries périodiques est rationnellement clos: on aura alors en prenant l'étoile de (o):  $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{P}^* = \mathcal{P} \subset (\mathcal{S}^*)^* = \mathcal{S}^*$ . Plutôt que de donner une preuve précise de ce fait (le lecteur pourra se reporter aux deux sections suivantes où l'on généralise ce résultat), nous préférons ici expliquer pourquoi l'union et la somme vectorielle de certaines parties périodiques simples sont périodiques.

**3.3.4 Lemme** Soient  $a, b \in \mathbb{N}$ . Ecrivons  $\text{ppcm}(a, b) = ka = k'b$ . On a

$$\{a\}^* \cup \{b\}^* = \{0, a, 2a, \dots, (k-1)a, b, 2b, \dots, (k'-1)b\} + \{\text{ppcm}(a, b)\}^* .$$

**Preuve** trivial. ■

**3.3.5 Lemme** Il existe  $K \in \mathbb{N}$  et  $P$  majorée par  $K - 1$  telle que

$$\{a\}^* + \{b\}^* = P \cup (K + \{\text{pgcd}(a, b)\}^*) .$$

Ce lemme est équivalent au fait élémentaire suivant sur les équations linéaires diophantiennes, qui résulte immédiatement du théorème de Bezout.

**3.3.6 Lemme** Soient  $a$  et  $b$  deux entiers positifs. Il existe un entier  $K$  tel que pour tout  $c \geq K$  et multiple de  $\text{pgcd}(a, b)$ , l'équation

$$ax + by = c \quad (3.3.b)$$

admette une solution  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ .

Il résulte de 3.3.3 qu'une partie périodique de  $\mathbb{N}$  s'écrit à l'aide de l'étoile d'un seul singleton. De manière analogue, nous définissons les séries périodiques dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ .

**3.3.7 Définition (Série périodique)** *La série  $s \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  est périodiquessi il existe deux polynômes causaux  $p$  et  $q$  ainsi qu'un monôme causal  $r$ , tels que:*

$$s = p \oplus qr^* .$$

Le résultat principal sur les séries rationnelles de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  est le suivant.

**3.3.8 Théorème** (*Cohen, Moller, Quadrat et Viot [23]*) *Dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ , une série est rationnellessi elle est périodique.*

De manière analogue à 3.3.3, il suffit de vérifier que l'ensemble des séries périodiques est rationnellement clos. Nous renvoyons à [23] pour la preuve originale de ce résultat. Nous donnons ici une preuve analogue, mais plus précise quant à la caractérisation des périodicités. Nous donnerons d'abord les règles de calculs sur certaines séries rationnelles simples, faisant en particulier le lien avec certaines équations diophantiennes linéaires. Nous renvoyons par ailleurs à l'annexe B où l'on donne quelques raffinements de ces algorithmes, ceux-là mêmes que nous avons implémenté en MAPLE.

## 4 Règles de calcul sur les éléments simples

**4.0.1 Définition (Elément simple)** *Nous appellerons élément simple une série de la forme  $mr^*$  où  $m$  et  $r$  sont des monômes causaux.*

L'élément simple général s'écrira donc:

$$s = \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* ,$$

où  $n, t, \nu, \tau \in \mathbb{N}$ . Si  $\tau = 0$ , on a  $r^* = (\gamma^\nu)^* = e$ ,  $mr^* = \gamma^n \delta^t$  et l'élément simple  $mr^*$  sera dit dégénéré de type monomial. Si  $\nu = 0$  et  $\tau > 0$ , on a  $mr^* = \gamma^n \delta^*$  et l'élément simple sera dit dégénéré de type infini.

### 4.1 Somme de deux éléments simples

**4.1.1 Définition (Pente)** *On appelle pente du monôme  $m = \gamma^n \delta^t \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  ou du point  $(n, t) \in \mathbb{N}^2$ , notée  $\sigma(m)$  ou  $\sigma(n, t)$  le quotient  $\frac{n}{t}$  (conventionnellement égal à  $+\infty$  si  $t = 0$ ).*

On définit la loi suivante sur  $\mathbb{N}^2$ :

$$(\nu, \tau) \sqcup (\nu', \tau') = \begin{cases} (\nu, \tau) & \text{si } \sigma(\nu, \tau) < \sigma(\nu', \tau') \\ (\nu', \tau') & \text{si } \sigma(\nu, \tau) > \sigma(\nu', \tau') \\ (\text{ppcm}(\nu, \nu'), \text{ppcm}(\tau, \tau')) & \text{si } \sigma(\nu, \tau) = \sigma(\nu', \tau') \end{cases}$$

La loi  $\sqcup$  (lire “sup”) est clairement associative, commutative, et idempotente. Comme  $(n, t) \mapsto \gamma^n \delta^t$  est une bijection de  $\mathbb{N}^2$  sur l'ensemble des monômes causaux, on s'autorisera la notation suivante:

$$\gamma^\nu \delta^\tau \sqcup \gamma^{\nu'} \delta^{\tau'} = \gamma^N \delta^T \quad \text{où } (N, T) = (\nu, \tau) \sqcup (\nu', \tau') . \quad (4.1.a)$$

D'abord, une remarque élémentaire:

**4.1.2 Propriété** *On a  $\sigma((\nu, \tau) \sqcup (\nu', \tau')) = \min(\sigma(\nu, \tau), \sigma(\nu', \tau')).$*

**Preuve** C'est évident si les pentes sont distinctes. Dans le cas où  $\sigma(\nu, \tau) = \sigma(\nu', \tau')$ , c'est une propriété d'homogénéité du ppcm. On a en effet en posant  $\text{ppcm}(\nu, \nu') = k\nu = k'\nu'$  et  $\lambda = (\sigma(\nu, \tau))^{-1}$ :  $k\tau = \lambda k\nu = \lambda k'\nu' = k'\tau'$ . Comme  $k$  et  $k'$  sont premiers entre eux, on a  $k\tau = \text{ppcm}(\tau, \tau') = \lambda \text{ppcm}(\nu, \nu')$ , d'où

$$\sigma(\text{ppcm}(\nu, \nu'), \text{ppcm}(\tau, \tau')) = \lambda^{-1} = \sigma(\nu, \tau) = \sigma(\nu', \tau') . \quad (4.1.b)$$

■

**4.1.3 Théorème** Soient  $mr^*$  et  $m'r'^*$  deux éléments simples. On a:

$$mr^* \oplus m'r'^* = p \oplus q(r \sqcup r')^* , \quad (4.1.c)$$

où  $p$  et  $q$  sont des polynômes causaux.

**Preuve** de 4.1.3. Nous laissons au lecteur les cas dégénérés  $\nu = 0$  ou  $\tau = 0$ , qui sont triviaux.

1/ Cas  $\sigma(r) = \sigma(r')$ . Soient  $k$  et  $k'$  tels que  $\text{ppcm}(\nu, \nu') = k\nu = k'\nu'$ . D'après (4.1.b), on a également  $\text{ppcm}(\tau, \tau') = k\tau = k'\tau'$ , de sorte que:

$$r^* = (e \oplus r \oplus \dots \oplus r^{k-1})(r \sqcup r')^* .$$

En écrivant une identité analogue pour  $r'^*$ , on obtient ainsi,

$$mr^* \oplus m'r'^* = [m(e \oplus r \oplus \dots \oplus r^{k-1}) \oplus m'(e \oplus r' \oplus \dots \oplus r'^{k-1})](r \sqcup r')^* .$$

ce qui est de la forme (4.1.c).

2/ Cas  $\sigma(r) < \sigma(r')$ .

**4.1.4 Lemme (de domination)** Supposons  $\sigma(\nu, \tau) < \sigma(\nu', \tau')$ , et  $n, n', t, t' \in \mathbb{N}$ . Il existe alors  $K \in \mathbb{N}$  tel que

$$\gamma^{n'} \delta^{t'} \gamma^{K\nu'} \delta^{K\tau'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \preceq \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* . \quad (4.1.d)$$

**Preuve** du Lemme 4.1.4. On a en développant  $\gamma^{n'} \delta^{t'} \gamma^{K\nu'} \delta^{K\tau'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* = \bigoplus_{x \geq K} \gamma^{n'+x\nu'} \delta^{t'+x\tau'}$ , et de même  $\gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* = \bigoplus_{y \geq 0} \gamma^{n+y\nu} \delta^{t+y\tau}$ . Compte tenu de (2.3.a) et (2.3.b), (4.1.d) est équivalente à l'assertion suivante:

$$\forall x \geq K, \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} n' + x\nu' \geq n + \nu y \\ t' + x\tau' \leq t + \tau(y - 1) \end{cases} \quad (4.1.e)$$

Notons  $[y]$  la partie entière de  $y$ . Comme  $y \geq [y] \geq y - 1$ , la condition suivante entraîne (4.1.e).

$$\forall x \geq K, \quad \exists y \in \mathbb{R}^+ \quad \begin{cases} n' + x\nu' \geq n + \nu y \\ t' + x\tau' \leq t + \tau(y - 1) \end{cases} \quad (4.1.f)$$

En éliminant  $y$  entre ces deux inégalités, on trouve la condition de compatibilité de (4.1.f):

$$\tau(n' - n) + x(\tau\nu' - \nu\tau') \geq \nu(t' - t + \tau) . \quad (4.1.g)$$

Comme  $\sigma(\nu, \tau) < \sigma(\nu', \tau')$ , on a  $(\tau\nu' - \nu\tau') > 0$ , et il est clair que (4.1.g) sera vérifié pour  $x$  assez grand. On pourra prendre  $x \geq K$  avec

$$K = \max\left(\left[\frac{\nu(t' - t + \tau) + \tau(n - n')}{\tau\nu' - \nu\tau'}\right], 0\right) .$$

Cela achève la preuve du Lemme 4.1.4. ■

**4.1.5 Remarque** On peut voir le calcul de la plus petite valeur de  $K$  vérifiant (4.1.d) comme une généralisation pour une sous-classe d'équations linéaires diophantiennes à deux inconnues de la notion de conducteur. Cela mérite une étude complète, que nous n'entreprendrons pas ici.

Nous revenons à la preuve de 4.1.3. Comme, si  $\sigma(r) < \sigma(r')$ , on a  $r \sqcup r' = r$ , on obtient par application immédiate du Lemme de domination:

$$mr^* \oplus m'r'^* = m'(e \oplus r' \oplus \dots \oplus r'^{K-1}) \oplus m(r \sqcup r')^* ,$$

qui est bien de la forme (4.1.c). Le Théorème 4.1.3 est prouvé. ■

**4.1.6 Exemple** On a

$$\begin{aligned} (\gamma\delta)^* \oplus \delta^2(\gamma^2\delta)^* &= \delta^2 \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus (\gamma^3\delta^3)^* . \\ (\gamma^2\delta^2)^* \oplus \gamma\delta(\gamma^3\delta^3)^* &= (e \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^4 \oplus \gamma\delta)(\gamma^6\delta^6)^* . \end{aligned}$$

## 4.2 Produit de deux éléments simples

On introduit une seconde opération sur  $\mathbb{N}^2$ ,  $\sqcap$  (lire “inf”) définie comme suit:

$$(\nu, \tau) \sqcap (\nu', \tau') = \begin{cases} (\nu, \tau) & \text{si } \sigma(\nu, \tau) < \sigma(\nu', \tau') \\ (\nu', \tau') & \text{si } \sigma(\nu, \tau) > \sigma(\nu', \tau') \\ (\text{pgcd}(\nu, \nu'), \text{pgcd}(\tau, \tau')) & \text{si } \sigma(\nu, \tau) = \sigma(\nu', \tau') \end{cases}$$

L'opération  $\sqcap$  est associative et idempotente. On observe que  $\mathbb{N}^2$  équipé de  $\sqcup$  et de  $\sqcap$  n'est pas un treillis (par exemple, la propriété d'absorption  $r \sqcup (r \sqcap r') = r$  est en défaut, prendre  $r = (1, 1)$  et  $r' = (1, 2)$ ). Cependant, on a la propriété plus faible:

$$(r \sqcup r') \sqcup (r \sqcap r') = (r \sqcup r') . \quad (4.2.a)$$

Comme pour  $\sqcup$ , on s'autorisera la notation  $\gamma^\nu\delta^\tau \sqcap \gamma^{\nu'}\delta^{\tau'}$  avec un sens évident.

**4.2.1 Théorème** Soient  $mr^*$  et  $m'r'^*$  deux éléments simples. On a:

$$mr^* \otimes m'r'^* = p \oplus q(r \sqcap r')^* , \quad (4.2.b)$$

où  $p$  et  $q$  sont des polynômes causaux.

**Preuve** de 4.2.1. Ici encore, nous ne traitons pas les cas triviaux  $\tau = 0$  ou  $\nu = 0$ . Quitte à multiplier  $p$  et  $q$  par  $mm'$ , on pourra supposer  $m = m' = e$ .

1/ Cas  $\sigma(s) < \sigma(s')$ . Soit  $K$  comme dans le Lemme 4.1.4 tel que:

$$r'^K(r')^* \preceq r^* . \quad (4.2.c)$$

En multipliant cette identité par  $r^*$ , on obtient  $r'^K(r')^*r^* \preceq r^*r^* = r^*$ . Ainsi:

$$r^*r'^* = r^*(e \oplus r' \oplus \dots \oplus r'^{K-1}) \oplus r^*r'^K(r')^* = r^*(e \oplus r' \oplus \dots \oplus r'^{K-1}) , \quad (4.2.d)$$

qui, compte tenu de  $r = r \sqcap r'$ , est bien de la forme (4.2.b).

2/ Cas  $\sigma(r) = \sigma(r')$ . On a:

$$(\gamma^\nu \delta^\tau)^*(\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* = \bigoplus_{i,j \geq 0} \gamma^{i\nu+j\nu'} \delta^{i\tau+j\tau'} . \quad (4.2.e)$$

Posons

$$S(\tau, \tau') = \tau \mathbb{N} + \tau' \mathbb{N} .$$

On prétend que

$$\{(i\nu + j\nu', i\tau + j\tau') \mid (i, j) \in \mathbb{N}^2\} = \{(\sigma(r)\theta, \theta) \mid \theta \in \tau \mathbb{N} + \tau' \mathbb{N}\} .$$

En effet, si  $\theta = i\tau + j\tau'$ , on a  $\sigma(r)\theta = i\sigma(r)\tau + j\sigma(r)\tau' = i\nu + j\nu' \in \mathbb{N}$ , ce qui montre l'égalité des deux ensembles. On est donc ramené à caractériser la partie rationnelle  $S(\tau, \tau')$  de  $\mathbb{N}$ . Le naturel  $u$  appartient à  $S(a, b)$  ssi l'équation linéaire diophantienne

$$ax + by = u \quad (4.2.f)$$

admet une solution sur les entiers positifs ou nuls. Cette équation linéaire diophantienne intervenait déjà en 3.3.6, où l'on a montré  $S(\tau, \tau') = P \cup (K + \text{pgcd}(a, b)\mathbb{N})$ , où  $P$  est une partie finie. Nous aurons besoin dans la suite d'un résultat un peu plus précis. On appelle usuellement *conducteur* (ou pour certains, indice de Frobenius-Schur, cf. [14]) de l'équation linéaire diophantienne (4.2.f) le plus petit entier  $K$  vérifiant 3.3.6. On le notera  $\text{cond}(a, b)$ . On a le résultat, généralement attribué à Sylvester:

**4.2.2 Lemme ([13])** *On a*

$$\text{cond}(a, b) = \frac{(a - \text{pgcd}(a, b))(b - \text{pgcd}(a, b))}{\text{pgcd}(a, b)} . \quad (4.2.g)$$

**4.2.3 Exemple** On observe que l'on peut résoudre l'équation  $2i + 3j = c$  en entiers positifs ou nuls pour les valeurs suivantes de  $c$ : 0, 2, 3, 4, 5, ... On a donc  $\text{cond}(2, 3) = 2 = (2 - 1) \times (3 - 1)$ , en conformité avec (4.2.g).

On a la propriété d'homogénéité suivante:

**4.2.4 Lemme** *Si  $a, a', b, b' \in \mathbb{N}$  sont tels que  $a' = \lambda a$ ,  $b' = \lambda b$  alors*

$$\text{cond}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \text{cond}(a, b) . \quad (4.2.h)$$

**Preuve** Si  $n = ia + jb$  avec  $i, j \in \mathbb{N}$ , alors  $\lambda n = ia' + jb' \in \mathbb{N}$ , d'où  $\text{cond}(a', b') \leq \lambda \text{cond}(a, b)$ . De manière symétrique,  $\text{cond}(a, b) \leq \lambda^{-1} \text{cond}(a', b')$ , d'où l'égalité (4.2.h). ■

On pourra donc écrire:

$$S(\tau, \tau') = S'(\tau, \tau') \cup (\text{cond}(\tau, \tau') + \text{pgcd}(\tau, \tau')\mathbb{N}) , \quad (4.2.i)$$

où  $S'(\tau, \tau')$  désigne le sous ensemble fini de  $S(\tau, \tau')$  formé des entiers strictement plus petit que  $\text{cond}(\tau, \tau')$ . Il résulte immédiatement de (4.2.e), 4.2.4 et de (4.2.i) que

$$r^* r'^* = \left( \bigoplus_{\theta \in S'(\tau, \tau')} \gamma^{\sigma(r)\theta} \delta^\theta \right) \oplus \gamma^{\text{cond}(\nu, \nu')} \delta^{\text{cond}(\tau, \tau')} (r \sqcap r')^* , \quad (4.2.j)$$

qui est bien de la forme (4.2.b). Cela achève la preuve du Théorème 4.2.1. ■

**4.2.5 Exemple** On a  $\text{cond}(2, 3) = 2$  d'où:

$$(\gamma^2 \delta^6)^*(\gamma^3 \delta^9)^* = e \oplus \gamma^2 \delta^6 (\gamma \delta^3)^* .$$

### 4.3 Une décomposition en éléments simples et ses conséquences

**4.3.1 Théorème** *Une série est rationnellessi elle s'écrit comme somme finie d'éléments simples.*

**Preuve** Soit  $\mathcal{R}$  l'ensemble des sommes finies d'éléments simples. On copiant le début de la preuve du Théorème 3.3.3, il suffit de montrer que  $\mathcal{R}$  est rationnellement clos. Trivialement,  $\mathcal{R} \oplus \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$ . L'inclusion  $\mathcal{R} \otimes \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$  résulte immédiatement de 4.2.1. Il reste à voir que si  $s \in \mathcal{R}$ , alors  $s^* \in \mathcal{R}$ . En observant que  $(\bigoplus_i m_i r_i^*)^* = \bigotimes_i (m_i r_i)^*$ , on peut se limiter au cas où  $s = mr^*$  est un élément simple. On a alors par 0.4.1.6,(vii)  $s^* = e \oplus m(m \oplus r)^* = e \oplus mm^*r^*$  qui d'après 4.2.1 appartient à  $\mathcal{R}$ . Le Théorème est démontré. ■

**4.3.2 Remarque** Les questions d'unicité ou de canonicité des décompositions en éléments simples ne seront pas abordées ici. Notons par exemple qu'on a les deux décompositions distinctes d'une même série:

$$(\gamma\delta)^* = (\gamma^2\delta^2)^* \oplus \gamma\delta(\gamma^2\delta^2)^* .$$

**4.3.3 Preuve du Théorème 3.3.8** D'après 4.3.1, une série rationnelle s'écrit comme une somme finie  $\bigoplus_i m_i r_i^*$ , qui d'après 4.1.3, se réduit à la forme  $p \oplus q(\sqcup_i r_i)^*$ , qui est bien une série périodique. Réciproquement, en décomposant  $p$  et  $q$  en somme de monômes, on ramène trivialement une écriture périodique à une décomposition en éléments simples. ■

## 5 Algèbre des séries périodiques

On rappelle qu'une série  $s \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  est *périodique* ou plus précisément  $(\nu, \tau)$ -périodiquessi elle s'écrit sous la forme

$$s = p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^* , \quad (5.0.a)$$

où  $p$  et  $q$  sont des polynômes à exposants positifs ou nuls et  $\nu, \tau \geq 0$ . Nous laissons provisoirement de coté les cas dégénérés  $\nu = 0$  ou  $\tau = 0$ , qui sont triviaux.

**5.0.1 Proposition** *La série  $s$  est  $(\nu, \tau)$ -périodique avec  $\nu, \tau > 0$ ssi*

- (i)  $\mathbf{dat}s(n) = -\infty$  pour  $n < 0$
  - (ii)  $\exists N \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow \mathbf{dat}s(n + \nu) = \tau + \mathbf{dat}s(n))$  .
- (5.0.b)

**5.0.2 Définition** *Le dateur  $\mathbf{dat}s$  sera dit  $(\nu, \tau)$ -périodique s'il vérifie la propriété (5.0.b).*

Cette notion est illustrée sur la Figure VII.5, où l'on a fait abstraction du caractère discret.

**Preuve** de la Proposition 5.0.1. Sens  $\Leftarrow$ : Si l'on a (5.0.b), on peut écrire d'après la Proposition 2.2.5:

$$s = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \gamma^n \delta^{\mathbf{dat}s(n)} = \bigoplus_{n \leq N-1} \gamma^n \delta^{\mathbf{dat}s(n)} \oplus \left( \bigoplus_{N \leq n \leq N+\nu-1} \gamma^n \delta^{\mathbf{dat}s(n)} \right) (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$$

ce qui est bien de la forme (5.0.a).

Sens  $\Rightarrow$ . (a): cas où  $p = \varepsilon$  et où  $q = \gamma^k \delta^l$ . On rappelle que  $\mathbf{dat}s$  est donné par

$$\mathbf{dat}s(n) = \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid \gamma^n \delta^t \preceq s\} . \quad (5.0.c)$$

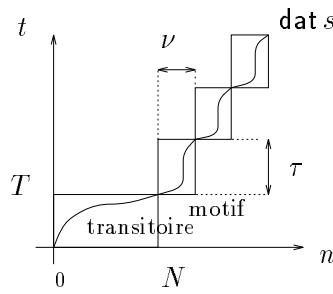


Figure VII.5: Un dateur périodique

On a  $\gamma^n \delta^t \leq \gamma^k \delta^l (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$  ssi  $\gamma^n \delta^t \leq \gamma^{k+i\nu} \delta^{l+i\tau}$  pour un certain  $i \in \mathbb{N}$ , soit

$$\begin{aligned} n &\geq k + i\nu \\ t &\leq l + i\tau . \end{aligned} \quad (5.0.d)$$

$\text{dat } s(n)$  s'obtient en prenant le plus grand entier  $t$  dans (5.0.d), ce qui revient à maximiser  $i$ :

$$i = [\frac{n-k}{\nu}], \quad \text{dat } s(n) = l + \tau[\frac{n-k}{\nu}] \quad (5.0.e)$$

pour  $n - k \geq 0$  (on a noté  $[x]$  la partie entière de  $x$ ). Au vu de (5.0.e), il est clair que  $\text{dat } s$  vérifie la Proposition.

(b) Cas  $p = \varepsilon$  et  $q$  polynôme. En décomposant  $q = \bigoplus_i q_i$  comme somme finie de monômes, on a  $\text{dat } s = \max_i \text{dat}(q_i(\gamma^\nu \delta^\tau)^*)$ . Comme la propriété (5.0.b) est stable par passage au max, le résultat est acquis.

(c) Cas  $p \neq \varepsilon$ . On a  $\text{dat } s = \max(\text{dat } p, \text{dat}(q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*))$ . En raisonnant comme en (i), on voit que  $\text{dat } p$  est constant à partir d'un certain rang (alors que  $\lim \text{dat}(q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*) = \infty$ ) et donc ne contribue pas ultimement à  $\text{dat } s$ .

Enfin, on note que si  $n < 0$ ,  $\gamma^n \delta^t$  ne peut être dominé par les monômes à exposants positifs ou nuls de  $s$ , et donc d'après 2.2.5,  $\text{dat } s(n) = -\infty$  pour  $n < 0$ . ■

On dira que le couple  $(\nu, \tau)$  est une période de la série  $s$ . La période n'est pas unique. Par exemple, on a les deux écriture de type (5.0.a):

$$s = (\gamma \delta)^* = \varepsilon \oplus e.(\gamma \delta)^* = \varepsilon \oplus (e \oplus \gamma \delta)(\gamma^2 \delta^2)^* . \quad (5.0.f)$$

Cependant, il résulte de (5.0.b) que

$$\frac{\nu}{\tau} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\text{dat } s(n)}$$

et donc que le rapport  $\frac{\nu}{\tau}$  ne dépend pas de l'écriture (5.0.a). Cela motive les définitions suivantes.

**5.0.3 Définition (Pente ultime, divisibilité, période ultime)** Soit  $s$  une série périodique.

(i) On appelle pente ultime de  $s$ , noté  $\sigma_\infty(s)$ , le quotient:

$$\sigma_\infty(s) = \frac{\nu}{\tau} .$$

*Si  $s = \varepsilon$ , on convient que  $\sigma_\infty(s) = +\infty$ . Si  $\nu = \tau = 0$ , on convient que  $\sigma_\infty(s) = +\infty$ .*

- (ii) Soient  $(\nu, \tau)$  et  $(\nu', \tau')$  deux périodes d'une même série  $s$ . On dit que  $(\nu, \tau)$  divise  $(\nu', \tau')$ , ce que l'on note  $(\nu, \tau) \mid (\nu', \tau')$ , si

$$\nu' = k\nu, \quad \tau' = k\tau, \quad \text{avec } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

- (iii) On notera  $\varpi_\infty(s)$  (période ultime) la plus petite période de  $s$  pour la divisibilité.

Par exemple, pour la série  $s$  donnée en (5.0.f), on a  $\varpi_\infty(s) = (1, 1)$ ,  $\sigma_\infty(s) = \frac{1}{1} = 1$ . Si  $(\nu, \tau)$  divise  $(\nu', \tau')$  et  $(\nu, \tau)$  est période, alors  $(\nu', \tau')$  est également période, comme il résulte de

$$(\gamma^\nu \delta^\tau)^* = (e \oplus \gamma^\nu \delta^\tau \oplus \dots \oplus \gamma^{(k-1)\nu} \delta^{(k-1)\tau})(\gamma^{k\nu} \delta^{k\tau})^*.$$

**5.0.4 Cas dégénérés** Si  $\tau = 0$ , on a  $(\gamma^\nu \delta^\tau)^* = e$  et  $s$  est un polynôme. Comme déjà noté dans la preuve de 5.0.1, on a  $\text{dat } s(n) = \text{cte}$  à partir d'un certain rang, disons pour  $n \geq N$ , ce qui signifie qu'une infinité d'événements arrivent en un temps fini. Si  $\nu = 0$  et  $\tau > 0$ , on a  $(\gamma^\nu \delta^\tau)^* = \delta^*$ . On montre en raisonnant comme en 5.0.1 que  $\text{dat } s(n) = +\infty$  à partir d'un certain rang. Il s'agit alors d'un système bloqué.

## 5.1 Caractéristiques de la somme de séries périodiques

**5.1.1 Théorème** *La somme de deux séries périodiques est périodique. En outre*

$$\varpi_\infty(s \oplus s') \mid \varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s') . \quad (5.1.a)$$

*(et égalité si les pentes ultimes de  $s$  et  $s'$  sont différentes).*

**Preuve** Si  $\sigma_\infty(s) < \sigma_\infty(s')$ , la fonction  $\text{dat } s$  est ultimement au dessus de  $\text{dat } s'$ , d'où il résulte que  $\max(\text{dat } s, \text{dat } s') = \text{dat } (s \oplus s')$  est de période exactement égale à la période de  $s$ , soit  $\varpi_\infty(s) = \varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$ . Si  $\sigma_\infty(s) = \sigma_\infty(s')$ ,  $\varpi_\infty(s)$  et  $\varpi_\infty(s')$  divisent  $\varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$ , et donc  $\text{dat } s$  et  $\text{dat } s'$  sont deux dateurs  $\varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$ -périodiques. L'ensemble des dateurs  $\varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$ -périodiques étant stable par borne sup,  $\max(\text{dat } s, \text{dat } s')$  admet la période (peut être non minimale)  $\varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$ . ■

On a le corollaire immédiat:

**5.1.2 Corollaire** *On a  $\sigma_\infty(s \oplus s') = \min(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s'))$ .*

## 5.2 Produit de séries périodiques générales

**5.2.1 Théorème** *Le produit de deux séries périodiques est périodique. En outre*

$$\varpi_\infty(ss') \mid \varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s') .$$

**5.2.2 Corollaire** *Soient  $s$  et  $s'$  deux séries périodiques non nulles. On a*

$$\sigma_\infty(ss') = \min(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s')) .$$

**Preuve** du Théorème 5.2.1. Soit  $s = p \oplus qr^*$ ,  $s' = p' \oplus q'r'^*$ . On a  $ss' = pp' \oplus pq'r'^* \oplus p'qr^* \oplus qq'r^*r'^*$ . Via 4.2.1, on a  $qq'r^*r'^* = p'' \oplus q''(r \sqcap r')^*$ . Le Théorème 5.1.1 et la formule (4.2.a) montrent que  $ss'$  admet la période  $r \sqcup r' \sqcup (r \sqcap r') = (r \sqcup r')$ . ■

Moyennant les algorithmes 2.4.5 et 4.2.1 de l'annexe B, la preuve ci-dessus permet de calculer  $ss'$ .

### 5.2.3 Exemple

Soient

$$s = e \oplus \gamma \delta^8 \oplus \gamma^9 \delta^9 (\gamma^3 \delta^3)^*, \quad s' = e \oplus \gamma^2 \delta^{10} \oplus \gamma^{11} \delta^{11} (\gamma^4 \delta^4)^*$$

On a

$$ss' = e \oplus \gamma \delta^8 \oplus \gamma^2 \delta^{10} \oplus \gamma^3 \delta^{18} \oplus \gamma^{11} \delta^{19} (e \oplus \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^6 \oplus \gamma^9 \delta^9) (\gamma^{12} \delta^{12})^*.$$

Dans ce cas, on obtient effectivement le ppcm comme période du produit.

## 5.3 Etoile de polynômes et problème diophantien de Frobenius

On appellera *pente* du monôme causal  $\gamma^n \delta^t$  le rapport  $\frac{n}{t}$  (convention  $\frac{n}{0} = +\infty$ ). Nous traitons ici le cas d'un polynôme dont tous les monômes ont la même pente. Soit  $p = \gamma^\nu \delta^\tau \oplus \gamma^{\nu'} \delta^{\tau'}$ . Le résultat suivant est une conséquence immédiate de (4.2.e) et 4.2.2.

**5.3.1 Théorème** *La plus simple représentation périodique de  $p^*$  est donnée par:*

$$p^* = \left( \bigoplus_{i\nu+j\nu' \leq \text{cond}(\nu,\nu')-1} \gamma^{i\nu+j\nu'} \delta^{i\tau+j\tau'} \right) \oplus \gamma^{\text{cond}(\nu,\nu')} \delta^{\text{cond}(\tau,\tau')} (\gamma^{\text{pgcd}(\nu,\nu')} \delta^{\text{pgcd}(\tau,\tau')})^*. \quad (5.3.a)$$

### 5.3.2 Généralisation à une somme de $l$ monômes de même pente.

Soit le produit  $p = \gamma^{\nu_1} \delta^{\tau_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{\nu_l} \delta^{\tau_l}$  somme de  $l$  monômes de même pente. On a par un argument analogue à 4.2.1, 2/ que que  $p^* = \bigoplus_{c \in C} \gamma^{\sigma(p)c} \delta^c$  où  $C$  est l'ensemble des entiers  $c$  positifs ou nuls tels que l'équation diophantienne linéaire suivante:

$$\tau_1 x_1 + \tau_2 x_2 + \dots + \tau_l x_l = c \quad \text{avec } x \in \mathbb{N}^l \quad (5.3.b)$$

admette une solution. On montre sans difficulté, ce qui généralise 4.2.2, qu'il existe un  $K$  tel que pour tout  $c \geq K$  multiple de  $\text{pgcd}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_l)$ , l'équation (5.3.b) admette une solution. Cependant, la plus petite valeur de  $K$ , appelée encore conducteur de l'équation (5.3.b) n'est en général pas exactement connue (on appelle parfois "problème diophantien de Frobenius" la recherche de  $\text{cond}(\tau_i)$ ). Brauer (cf. [13]) donne pour  $l > 2$  et  $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_l$  premiers entre eux la borne supérieure suivante:

$$\text{cond}(\nu_i) \leq (\nu_1 - 1)(\nu_l - 1). \quad (5.3.c)$$

Voir aussi Vitek[96] pour des références plus récentes. On a donc un moyen d'obtenir directement une représentation périodique de  $p^*$  par une formule analogue à (5.3.a).

De ces développements, nous retiendrons ceci:

**5.3.3 Proposition** *Soit  $p = \bigoplus_{i=1}^k \gamma^{\nu_i} \delta^{\tau_i}$  une somme de monômes de même pente. On a*

$$\varpi_\infty(p^*) = (\text{pgcd}(\nu_i), \text{pgcd}(\tau_i)).$$

**5.3.4 Exemple** Soit  $a = \gamma^6 \delta^6 \oplus \gamma^{10} \delta^{10} \oplus \gamma^{15} \delta^{15}$ . Comme 6, 10, 15 sont premiers entre eux, la période de  $a^*$  est  $(1, 1)$ . On obtient après calculs  $\text{cond}(6, 10, 15) = 30$  et  $a^* = e \oplus \gamma^6 \delta^6 \oplus \gamma^{10} \delta^{10} \oplus \gamma^{12} \delta^{12} \oplus \gamma^{16} \delta^{16} \oplus \gamma^{18} \delta^{18} \oplus \gamma^{20} \delta^{20} \oplus \gamma^{22} \delta^{22} \oplus \gamma^{24} \delta^{24} \oplus \gamma^{26} \delta^{26} \oplus \gamma^{28} \delta^{28} \oplus \gamma^{30} \delta^{30} (\gamma \delta)^*$ .

**5.3.5 Exemple** Sur la planète Mars, il y a deux mathématiciens qui collaborent de la manière suivante: le premier produit trois conjectures simultanées tous les trois ans à partir de l'année zéro. Le second travaille exclusivement sur les conjectures du premier, met deux ans pour élucider une conjecture, et peut travailler sur au plus deux conjectures en même temps. Le théorème 5.3.1 affirme qu'à partir de l'année 4, une conjecture sera élucidée tous les ans (considérer la série de transfert  $(\gamma^3 \delta^3)^* \delta^2 (\gamma^2 \delta^2)^* = \delta^2 (\gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^3)^*$ ).

## 5.4 Pentes et étoiles dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$

Pour une série périodique générale, on se ramène par application de 0.4.1.6 aux opérations déjà étudiées:

$$(p \oplus qr^*)^* = p^*(e \oplus q(q \oplus r)^*) . \quad (5.4.a)$$

Nous caractérisons maintenant la pente ultime de l'étoile de la série  $s = p \oplus qr^*$ . Nous faisons pour cela appel à la notion de *pente minimale* d'une série booléenne, qui jouera un rôle important dans la suite (en particulier pour l'optimisation des ressources).

**5.4.1 Définition (Pente minimale)** Soit une série  $s = \bigoplus_i \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \in \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ . On définit la pente minimale de  $s$ ,  $\sigma(s)$ , comme suit:

$$\sigma(s) = \inf_{n_i \geq 0, t_i > 0} \frac{n_i}{t_i} . \quad (5.4.b)$$

**5.4.2 Exemple** Soit  $a = \gamma^{-1}\delta^{-3} \oplus \gamma \oplus \gamma^2\delta \oplus \gamma^7\delta^2$ . On a  $\sigma(a) = \min(2, \frac{7}{2}) = 2$ .

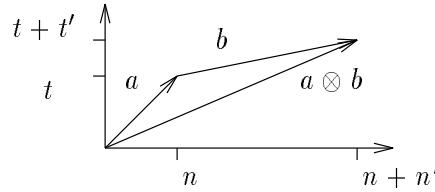
**5.4.3 Propriétés** On a:

- (i) Pour toute famille  $\{a_i\}_{i \in I}$  de séries:  $\sigma(\bigoplus_{i \in I} a_i) = \inf \sigma(a_i)$  ( $I$  éventuellement infinie)
- (ii) Pour toutes séries  $a$  et  $b$  causales,  $\sigma(a \otimes b) \geq \min(\sigma(a), \sigma(b))$  (avec égalité ssi  $\sigma(a) = \sigma(b)$  ou  $a = e$  ou  $b = e$ ).

**Preuve** (i) est immédiate. (ii) résulte de

$$n, n', t, t' \geq 0, \quad \frac{n + n'}{t + t'} \geq \min\left(\frac{n}{t}, \frac{n'}{t'}\right)$$

(avec la convention  $\frac{n}{0} = +\infty$ ), ce qui s'illustre par le petit dessin suivant:



En effet, les monômes du produit  $a \otimes b$ , où  $a = \bigoplus_i \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$  et  $b = \bigoplus_j \gamma^{n'_j} \delta^{t'_j}$  sont de la forme  $\gamma^{n_i+n'_j} \delta^{t_i+t'_j}$ . ■

On vérifie aisément que la pente minimale  $\sigma(s)$  ne dépend que de la classe d'équivalence de  $s$  dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . Les propriétés 5.4.3 passent donc au quotient.

**5.4.4 Propriétés** On a pour toute série rationnelle  $a$ :

- (i)  $\sigma_\infty(a) \geq \sigma(a)$ ,
- (ii)  $\sigma_\infty(a^*) = \sigma(a)$ .

**Preuve** (i): Résulte de

$$a = \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} \gamma^{\text{compt}_a(t)} \delta^t$$

où la fonction compteur  $\text{compt}_a$  associée à  $a$  est équivalente à  $\sigma_\infty(a)t$ .

(ii): via (i), on a  $\sigma_\infty(a^*) \geq \sigma(a^*) \geq \sigma(a)$  (par 5.4.3.(ii) et (i) appliquées à  $\bigoplus_i a^i$ ). On suppose  $\sigma(a)$  fini. Soit alors  $m$  un monôme de  $a$  tel que  $\sigma(m) \leq \sigma(a) + \epsilon$  ( $\epsilon$  petit). On a  $\sigma_\infty(a^*) \leq \sigma_\infty(m^*) = \sigma(m) \leq \sigma(a) + \epsilon$  d'où le résultat. ■

**5.4.5 Remarque** La propriété 5.4.4, (ii) pouvait tout aussi bien se prouver à l'aide de la formule (5.4.a) et des propriétés 5.1.2, 5.2.2. La preuve ci-dessus est cependant plus générale. On pourrait en effet relaxer l'hypothèse de rationalité dans 5.4.4 en définissant:

$$\sigma_\infty(a) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{n}{\text{dat } s(n)}$$

pour une série causale non rationnelle.

De même que l'on a caractérisé plus haut  $\sigma_\infty(a^*)$ , nous caractérisons ici la période de  $a^*$ . Etant donné un polynôme  $p = \bigoplus_{i=1}^n m_i$  s'écrivant comme somme de  $n$  monômes, on notera

$$\sqcap p = m_1 \sqcap \dots \sqcap m_n . \quad (5.4.c)$$

On observe que si le monôme  $m_i$  n'appartient pas à l'écriture canonique de  $p$ , il est de pente inférieure à celle de  $p$ , et donc que la définition 5.4.c ne dépend pas du choix des  $m_i$ .

**5.4.6 Proposition** Soit  $s = p \oplus qr^*$ . On a

$$\varpi_\infty(s^*) \mid (\sqcap p) \sqcup (\sqcap(q \oplus r)) . \quad (5.4.d)$$

**Preuve** Résulte de la formule (5.4.a) et des propriétés 5.3.3, 5.2.1. ■

**5.4.7 Exemple** La borne à droite de (5.4.d) est atteinte par exemple pour la série suivante:

$$\begin{aligned} s &= \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^4(\gamma\delta)^*, \\ s^* &= e \oplus \gamma^3\delta^3 \left( e \oplus \gamma^2\delta \right) \left( \gamma^3\delta^3 \right)^*, \quad \varpi_\infty(s^*) = \gamma^3\delta^3 . \end{aligned}$$

## 6 Algèbre rationnelle des matrices

### 6.1 Pente des matrices rationnelles

Le calcul des matrices de transfert fait intervenir le calcul des étoiles de matrices à coefficients rationnels ou polynomiaux. Nous caractérisons ici la pente des coefficients de l'étoile d'une matrice  $A$  à coefficients rationnels. Dans ce qui suit, nous noterons  $\oplus$  le min des pentes. L'application  $\sigma_\infty$  qui à une série associe sa pente ultime est ainsi croissante de  $(\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]], \preceq)$  dans  $(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \preceq)$ . Nous commençons par une remarque simple:

**6.1.1 Lemme**  $\sigma_\infty(A_{ij}^*)$  ne dépend que de la composante fortement connexe de  $i$  et de la composante fortement connexe de  $j$  dans le graphe associé à  $A$ .

**Preuve** Soient  $i$  et  $i'$  dans la même composante connexe, i.e.  $A_{ii'}^+ \neq \varepsilon$  et  $A_{i'i}^+ \neq \varepsilon$ . On a en prenant la composante  $(ij)$  de  $A^* \succeq A^+A^*$ ,

$$A_{ij}^* \succeq A_{ii'}^+ A_{i'i}^*$$

et par 5.2.2,

$$\sigma_\infty(A_{ij}^*) \succeq \sigma_\infty(A_{i'i}^*) .$$

Par symétrie, on a l'égalité. On montrerait de même que  $\sigma_\infty(A_{ij}^*) = \sigma_\infty(A_{ij'}^*)$  si  $j$  et  $j'$  appartiennent à la même composante connexe. ■

Soient  $C_1, \dots, C_k$  les  $k$  composantes connexes du graphe de  $A$ . Il résulte de ce qui précéde que  $\sigma_\infty(A_{ij}^*)$  est constant pour  $(i, j) \in C_r \times C_s$ . Si  $A$  est irréductible, il y a une seule composante connexe, et donc tous les coefficients de  $A^*$  ont la même pente ultime.

### 6.1.2 Notation ( $\mathcal{P}_{ij}$ , $\mathcal{C}_{ij}$ , circuits entre $j$ et $i$ )

Nous noterons  $\mathcal{P}_{ij}$  l'ensemble des chemins élémentaires de  $j$  à  $i$  (ou des circuits élémentaires si  $i = j$ ). Nous dirons que le circuit élémentaire  $c$  est *entre*  $j$  et  $i$  s'il rencontre un chemin  $p$  de  $j$  à  $i$  (peut être non élémentaire). Nous noterons  $\mathcal{C}_{ij}$  l'ensemble ces circuits élémentaires entre  $j$  et  $i$ .  $\mathcal{P}_{ij}$  et  $\mathcal{C}_{ij}$  sont évidemment finis. On a illustré cette définition sur la Figure VII.6.

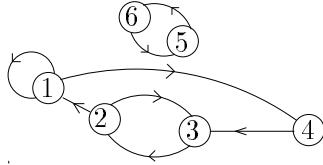


Figure VII.6:  $\mathcal{P}_{14} = \{a_{12}a_{23}a_{34}\}$ ,  $\mathcal{C}_{14} = \{a_{11}, a_{23}a_{32}, a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}\}$

Rappelons que le poids  $w_A(p)$  (ou plus simplement  $w(p)$ ) du chemin  $p = (i_1, \dots, i_k)$  est défini par  $w_A(p) = A_{i_1 i_2} \dots A_{i_{k-1} i_k}$ . Si  $p$  est de poids non nul, il résulte de 5.2.2 que

$$\sigma_\infty(w(p)) = \sigma_\infty(A_{i_1 i_2}) \oplus \dots \oplus \sigma_\infty(A_{i_{k-1} i_k}) .$$

On caractérise alors simplement les pentes ultimes des coefficients de  $A_{ij}^*$ .

### 6.1.3 Théorème (pente ultime des matrices rationnelles) *On a*

$$\forall i, j, \quad \sigma_\infty(A_{ij}^*) = \bigoplus_{c \in \mathcal{C}_{ij}} \sigma(w(c)) \oplus \bigoplus_{p \in \mathcal{P}_{ij}} \sigma_\infty(w(p)) . \quad (6.1.a)$$

Le premier terme de la somme exprime que la pente minimale (cf. 5.4.1) des circuits intervient. C'est une généralisation au cas matriciel de la formule scalaire  $\sigma_\infty(a^*) = \sigma(a)$  (cf. 5.4.4).

### 6.1.4 Corollaire *Si la matrice $A$ est à coefficients polynomiaux, on a*

$$\sigma_\infty(A_{ij}^*) = \bigoplus_{c \in \mathcal{C}_{ij}} \sigma(w(c)) . \quad (6.1.b)$$

**Preuve** de 6.1.4. On a en effet  $\sigma_\infty(A_{ij}) = +\infty$  et donc  $\sigma_\infty(w(p)) = +\infty$  pour tout chemin  $p \in \mathcal{P}_{ij}$ : le second terme de (6.1.a) disparaît. ■

**6.1.5 Remarque** Si  $A$  est irréductible, la sommation (6.1.b) est prise sur l'ensemble des circuits élémentaires du graphe.  $\sigma_\infty(A_{ij}^*)$  ne dépend alors pas de  $(ij)$ , en conformité avec 6.1.1.

### 6.1.6 Corollaire *Soient $C_r$ une composante irréductible et $i, j \in C_r$ . On a*

$$\sigma_\infty(A_{ij}^*) = \sigma_\infty((A_{[C_r|C_r]})^*) .$$

**Preuve**  $\mathcal{C}_{ij}$  est alors égal à l'ensemble des circuits élémentaires de  $C_r$ . En outre, un chemin  $p \in \mathcal{P}_{ij}$  reste dans la composante connexe  $C_r$ . Ainsi, on peut pour calculer (6.1.a) se restreindre au bloc irréductible  $A_{[C_r|C_r]}$ . ■

Nous illustrons d'abord le Théorème 6.1.3 sur quelques exemples.

### 6.1.7 Exemple

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma^3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & e & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^2 & \gamma \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} (\gamma^3\delta)^* & \gamma^3(\gamma^3\delta)^* & \gamma^3(\gamma\delta^2)^* & \gamma^3 \oplus \gamma^4\delta \oplus \gamma^5\delta^2 (\gamma\delta^2)^* \\ \delta(\gamma^3\delta)^* & (\gamma^3\delta)^* & (\gamma\delta^2)^* & e \oplus \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^2 (\gamma\delta^2)^* \\ \varepsilon & \varepsilon & (\gamma\delta^2)^* & \gamma(\gamma\delta^2)^* \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & (\gamma\delta)^* \end{bmatrix}$$

On a trois composantes connexes  $C_1 = \{1, 2\}, C_2 = \{3\}, C_3 = \{4\}$ . On a représenté sur la Figure VII.7 le graphe associé à  $A$ :

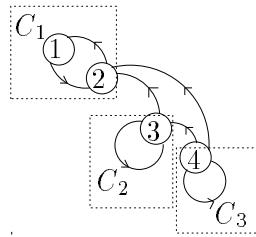


Figure VII.7:

Le circuit de pente minimale (i.e. la boucle  $3 \rightarrow 3$ ) est *entre*  $C_3$  et  $C_1$  (car par exemple  $A_{34} \neq \varepsilon$  et  $A_{23} \neq \varepsilon$ ), et donc la pente est constante sur le bloc  $C_1 \times C_3$ , égale à  $\sigma(\gamma\delta^2) = \frac{1}{2}$ . De même pour le bloc  $C_2 \times C_1$ .

### 6.1.8 Exemple

Pour la matrice à coefficients rationnels

$$A = \begin{bmatrix} \gamma\delta^4 & (\gamma^2\delta^{12})^* & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^6 \\ \varepsilon & \gamma\delta^5 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

on trouve

$$A^* = \begin{bmatrix} (\gamma\delta^4)^* & (e \oplus \gamma\delta^4)(\gamma^2\delta^{12})^* & \gamma\delta^6(e \oplus \gamma\delta^4)(\gamma^2\delta^{12})^* \\ \varepsilon & (\gamma^2\delta^{11})^* & \gamma\delta^6(\gamma^2\delta^{11})^* \\ \varepsilon & \gamma\delta^5(\gamma^2\delta^{11})^* & (\gamma^2\delta^{11})^* \end{bmatrix} \quad (6.1.c)$$

On a d'autre part  $\mathcal{P}_{13} = \{a_{13}, a_{12}a_{23}\}$ , d'où  $\sigma_\infty(w(a_{13} \oplus a_{12}a_{23})) = +\infty \oplus \frac{2}{12} = \frac{2}{12}$ . Ainsi, la contribution des chemins domine (i.e.  $\succ$ ) celle des circuits  $\sigma(w(a_{11} \oplus a_{23}a_{32})) = \frac{1}{4} \oplus \frac{2}{11} = \frac{2}{11}$ . On a donc  $\sigma_\infty(A_{13}^*) = \frac{2}{12}$  en conformité avec le résultat du calcul (6.1.c).

## 6.2 Preuve du Théorème 6.1.3

La preuve repose sur une formule combinatoire exprimant l'ensemble des chemins commutatifs (cf. 0.4.2.7) en fonction des circuits et chemins élémentaires. Nous nous plaçons pour cela dans le dioïde  $\mathbb{B}[[a_{ij}]]$  et considérons la matrice générique  $A = (a_{ij})$ .

### 6.2.1 Notation (ensemble accessible de circuits, $\mathcal{A}(p)$ )

Soit  $C$  un ensemble de circuits élémentaires. Nous dirons que  $C$  est accessible depuis le chemin  $p$  si  $\{p\} \cup C$  est un sous graphe connexe. Nous noterons  $\mathcal{A}(p)$  l'ensemble des  $C$  accessibles depuis  $p$ .

**6.2.2 Exemple** Pour le graphe de l'exemple VII.6 pour  $p = a_{34}$ , on a

$$\mathcal{A}(p) = \{\{a_{23}a_{32}\}, \{a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}\}, \{a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}, a_{23}a_{32}\}, \dots\} . \quad (6.2.a)$$

$$\{\{a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}, a_{11}\}, \{a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}, a_{11}, a_{23}a_{32}\}\} . \quad (6.2.b)$$

**6.2.3 Lemme** Dans  $\mathbb{B}[[a_{ij}]]$ , on a pour la matrice génératrice  $A = (a_{ij})$ :

$$A_{ij}^* = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}_{ij}} p \otimes \left( e \oplus \bigoplus_{C \in \mathcal{A}(p)} \bigotimes_{c \in C} c^+ \right) . \quad (6.2.c)$$

**Preuve** du lemme. Désignons par  $B$  le second membre de (6.2.c). Nous montrons par récurrence sur  $k$  la propriété suivante:  $(\mathcal{H}_k)$  pour tout chemin  $p$  de  $j$  à  $i$  (peut être non élémentaire), pour tout ensemble de  $k$  circuits  $C = \{c_1, \dots, c_k\} \in \mathcal{A}(p)$  et pour tous  $n_1, \dots, n_k \geq 1$ ,  $pc_1^{n_1} \dots c_k^{n_k}$  est un chemin commutatif (cf. 0.4.2.7) de  $j$  à  $i$ . Si  $k = 1$ , il résulte de l'hypothèse de connexité que  $c_1$  rencontre  $p$ , disons au sommet  $r$ . En écrivant  $p = p_{ir}p_{rj}$ , où  $p_{rj}$  est un chemin de  $j$  à  $r$  et  $p_{ir}$  de  $r$  à  $i$ , on a le chemin  $pc_1^{n_1} = p_{ir}c_1^{n_1}p_{rj}$ . Supposons  $k \geq 2$ , l'un au moins des circuits  $c_1, \dots, c_k$  rencontre  $p$ , disons  $c_1$ . D'après le cas  $k = 1$ ,  $p' = pc_1^{n_1}$  est un chemin de  $j$  à  $i$ . En outre,  $\{c_2, \dots, c_k\} \in \mathcal{A}(p')$  et l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui montre la propriété  $\mathcal{H}_k$ . Ainsi, chacun des termes de  $B$  est un chemin de  $j$  à  $i$ , et donc  $B \preceq A_{ij}^*$ . Inversement, un monôme de  $A_{ij}^*$  se factorise comme produit d'un chemin élémentaire et de puissances de circuits élémentaires (cf. 0.4.2.7) pour lesquels la propriété d'accessibilité est évidemment vérifiée, soit  $pc_1^{n_1} \dots c_k^{n_k} \preceq pc_1^+ \dots c_k^+ \preceq B$ . On a donc  $A_{ij}^* \preceq B$ , ce qui achève la preuve du Lemme 6.2.3. ■

Le Théorème 6.1.3 résulte immédiatement de ce Lemme. On a, en revenant à  $\mathcal{M}_{ax}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  et en prenant la pente ultime de (6.2.c):

$$\sigma_\infty(A_{ij}^*) = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}_{ij}} \sigma_\infty(w(p)) \oplus \bigoplus_{C \in \mathcal{A}(p)} \bigoplus_{c \in C} \sigma(w(c)) .$$

En remarquant que  $c \in C$  avec  $C \in \mathcal{A}(p)$  ssi  $c \in \mathcal{C}_{ij}$ , on obtient (6.1.a). ■

**6.2.4 Exemple** On illustre ce lemme en calculant  $(A^*)_{11}$  pour la matrice génératrice en dimension 2. Il y a un seul chemin élémentaire de 1 à 1. C'est le chemin trivial  $p = e$ . On a

$$\mathcal{A}(p) = \{\{a_{11}\}, \{a_{12}a_{21}\}, \{a_{11}, a_{12}a_{21}\}, \{a_{12}a_{21}, a_{22}\}, \{a_{11}, a_{12}a_{21}, a_{22}\}\} .$$

La Formule (6.2.c) affirme que

$$(A^*)_{11} = e \oplus a_{11}^+ \oplus (a_{12}a_{21})^+ \oplus a_{11}^+(a_{12}a_{21})^+ \oplus (a_{12}a_{21})^+a_{22}^+ \oplus a_{11}^+(a_{12}a_{21})^+a_{22}^+ . \quad (6.2.d)$$

En regroupant les termes successifs deux par deux, il vient:

$$\begin{aligned} (A^*)_{11} &= a_{11}^* \oplus a_{11}^*(a_{12}a_{21})^+ \oplus a_{11}^*(a_{12}a_{21})^+a_{22}^+ \\ &= a_{11}^*(e \oplus (a_{12}a_{21})^+a_{22}^*) . \end{aligned} \quad (6.2.e)$$

Par ailleurs, en inversant les rôles de 2 et 1 dans la Formule (4.2.b) du Chapitre 0, on obtient

$$(A_{11})^* = (a_{11} \oplus a_{12}a_{22}^*a_{21})^* . \quad (6.2.f)$$

En utilisant les propriétés 0.4.1.6.(vii) et (viii), il vient

$$(A_{11})^* = a_{11}^*(e \oplus a_{12}a_{22}(a_{12}a_{12})^*a_{22}^*)$$

ce qui n'est autre que la Formule (6.2.e) obtenue par application du lemme. On comprend mieux l'intérêt de la Formule (6.2.d) sur cette exemple. Elle permet d'exprimer de manière finie un ensemble de chemins en fonction uniquement des chemins et circuits élémentaires, et ce, avec un seul niveau d'étoile, à la différence de (6.2.f) obtenue par application de l'algorithme de Gauss.

### 6.3 Cyclicité des matrices à coefficients dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

On a caractérisé ci-dessus la pente ultime de l'étoile d'une matrice  $A$  rationnelle dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . On étudie maintenant la période  $\varpi_\infty$  de  $A_{ij}^*$ . On a déjà noté que les résultats de périodicité valables dans le dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  étaient des généralisations de résultats relatifs aux parties rationnelles de  $\mathbb{N}$ . Pour cette raison, nous donnons d'abord un résultat pour des matrices à coefficients dans  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  et nous l'étendrons ensuite à  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ .

On considère ici une matrice carrée  $A$  dont les coefficients sont des parties finies de  $\mathbb{N}$ . Le coefficient  $A_{ij}^*$  est une partie rationnelle de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , qui s'écrit en conséquence (cf. 3.3.3):

$$A_{ij}^* = P_{ij} \cup (Q_{ij} + \{\nu_{ij}\}^*) ,$$

$P_{ij}$  et  $Q_{ij}$  étant des parties finies de  $\mathbb{N}$ . On appellera *période* de cet ensemble la plus petite valeur de  $\nu_{ij}$  dans une telle écriture. On la notera  $\varpi_\infty(A_{ij}^*)$  par analogie avec  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . Le problème du calcul de cette période se formule simplement en termes de graphe.

**6.3.1 Notation (multigraphe associé à une matrice de parties de  $\mathbb{N}$ )** Soit  $A \in (\mathcal{P}(\mathbb{N}))^{n \times n}$ . On définit le multigraphe associé à  $A$ ,  $\text{MG}(A)$ , comme le multigraphe formé de  $n$  sommets et d'un arc de  $j$  à  $i$  pour chaque élément  $m \in A_{ij}$ , cet arc étant valué par  $m$ . Cette définition est illustrée sur la Figure VII.8.



Figure VII.8: Une matrice et son multigraphe

Le coefficient  $A_{ij}^*$  s'interprète comme l'ensemble des poids de chemins de  $j$  à  $i$  dans le multigraphe  $\text{MG}(A)$ . Le calcul de  $\varpi_\infty(A_{ij}^*)$  est donc équivalent au problème suivant: "trouver le plus petit  $\nu$  tel que pour  $n$  assez grand, l'existence d'un chemin de  $j$  à  $i$  de poids  $n$  dans  $\text{MG}(A)$  entraîne l'existence d'un chemin de  $j$  à  $i$  de poids  $n + \nu$ ".

**6.3.2 Notation (Cyclicités)** On définit la *cyclicité* d'une composante fortement connexe  $C_k$  de  $\text{MG}(A)$  comme le pgcd des poids des circuits élémentaires de cette composante. On appellera *cyclicité* du multigraphe le ppcm des cyclicités des composantes fortement connexes, et on la notera  $c(A)$ . Etant donné un chemin élémentaire  $p$ , on définit  $c(p)$ , cyclicité de  $p$ , comme le pgcd des cyclicités des composantes fortement connexes traversée.

**6.3.3 Théorème** *La période de  $A_{ii}^*$  est égale à la cyclicité de la composante fortement connexe associée. La période de  $A_{ij}^*$  divise le ppcm des cyclicités des chemins élémentaires de  $j$  à  $i$ .*

On pourra retenir le corollaire simple suivant, qui en résulte immédiatement.

**6.3.4 Corollaire** *La période d'un coefficient de  $A^*$  divise la cyclicité  $c(A)$ .*

**6.3.5 Exemple** Dans l'exemple de la Figure VII.8, il y a une seule composante fortement connexe, et le pgcd des poids de circuits est égal à 1. La cyclicité  $c(A)$  est donc égale à 1. On trouve en effet:

$$A^* = \begin{bmatrix} \{0, 2\} \cup (\{4\} + \{1\}^*) & \{3, 5\} \cup (\{7\} + \{1\}^*) \\ \{2\} + \{1\}^* & \{0\} \cup (\{5\} + \{1\}^*) \end{bmatrix}$$

**Preuve** du Théorème.

(i): Cas où  $i = j$ . Le poids d'un circuit passant par  $i$  est divisé par la cyclicité  $c$  de la composante fortement connexe associée à  $i$ , donc  $A_{ii}^* \subset c\mathbb{N}$ . Soient  $c_1, \dots, c_k$   $k$  circuits tels que

$$\text{pgcd}(w_A(c_1), \dots, w_A(c_k)) = c. \quad (6.3.a)$$

D'après l'hypothèse d'irréductibilité, il existe un circuit  $p$  non nécessairement élémentaire passant par  $i$  rencontrant tous ces circuits. On note que pour  $\alpha \in \mathbb{N}^k$ ,  $pc_1^{\alpha_1} \dots c_k^{\alpha_k}$  est encore un circuit passant par  $i$ . Il résulte du lemme diophantien 3.3.6, que pour  $K$  assez grand multiple de  $c$ , disons  $K = kc$  avec  $k \geq k_0$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{N}^k$  tel que

$$K = w_A(pc_1^{\alpha_1} \dots c_k^{\alpha_k}) = w_A(p) + \alpha_1 w_A(c_1) + \dots + \alpha_k w_A(c_k).$$

On a donc  $c(k_0 + \mathbb{N}) \subset A_{ii}^* \subset c\mathbb{N}$ , d'où il résulte que la (plus petite) période de  $A_{ii}^*$  est  $c$ .

(ii): Cas où  $i \neq j$ . Soit  $\{p_1, \dots, p_r\}$  l'ensemble des chemins élémentaires de  $j$  à  $i$ , de supports respectifs  $S_1, \dots, S_r$ . On a:

$$A_{ij}^* = w(p_1) \bigotimes_{i \in S_1} A_{ii}^* \oplus \dots \oplus w(p_r) \bigotimes_{i \in S_r} A_{ii}^*$$

(ce qui n'est autre que l'expression de la décomposition d'un chemin quelconque en un chemin élémentaire et un certain nombre de circuits). On montre en raisonnant comme en (i) que la période de  $w(p_l) \bigotimes_{i \in S_l} A_{ii}^*$  est égale à  $c(p_l)$ . On conclut en observant que la période d'une somme divise le ppcm des périodes. ■

## 6.4 Cyclicité des matrices rationnelles dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$

On rappelle tout d'abord le résultat de cyclicité suivant de type Perron-Frobenius pour les matrices à coefficients dans  $\mathbb{R}_{\min}$ :

**6.4.1 Théorème** (Cohen, Dubois, Quadrat, Viot [17]) Soit  $A \in (\mathbb{R}_{\min})^{n \times n}$  irréductible. Il existe  $N \geq 0$  et  $c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  (cyclicité) tels que

$$\forall n \geq N, \quad A^{n+c} = \rho(A)^c A^n.$$

La cyclicité est caractérisée de la manière suivante. On définit le graphe critique comme le graphe formé des sommets et arêtes appartenant à un circuit critique. En appelant cyclicité d'une composante connexe du graphe critique le pgcd des longueurs des circuits de cette composante, on caractérise la cyclicité de  $A$  comme le ppcm des cyclicités des composantes connexes du graphe critique. C'est ce genre de résultat qu'il s'agit de généraliser au dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ .

Nous donnons ici un résultat de périodicité analogue pour des matrices à coefficients polynomiaux dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . On rappelle que la (plus petite) période  $\varpi_\infty(s)$  d'une série rationnelle  $s$  est définie comme le plus petit monôme  $r$  (au sens de la divisibilité) tel que  $s$  admette la représentation périodique  $s = p \oplus qr^*$  (cf. 2.3.4). Etant donné un polynôme  $p = \bigoplus_{i=1}^n m_i$  (somme de  $n$  monômes), on pose

$$\sqcup p = m_1 \sqcup m_2 \sqcup \dots \sqcup m_n, \quad \sqcap p = m_1 \sqcap m_2 \sqcap \dots \sqcap m_n.$$

On a noté en §5.4 que ces quantités ne dépendaient pas du choix des  $m_i$ .

**6.4.2 Notation (Multigraphe dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ )** Soit  $A$  une  $n \times n$  matrice à coefficients dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$  et

$$A_{ij} = \bigoplus_{k=1}^r m_{ijk} \tag{6.4.a}$$

l'écriture canonique de  $A_{ij}$ . On définit le multigraphe associé à  $A$ ,  $\mathbf{MG}(A)$  comme le graphe formé de  $n$  sommets et d'un arc allant du sommet  $j$  au sommet  $i$  par monôme  $m_{ijk}$ , cet arc étant valué par  $m_{ijk}$ . Cette définition est illustrée sur la Figure VII.9.

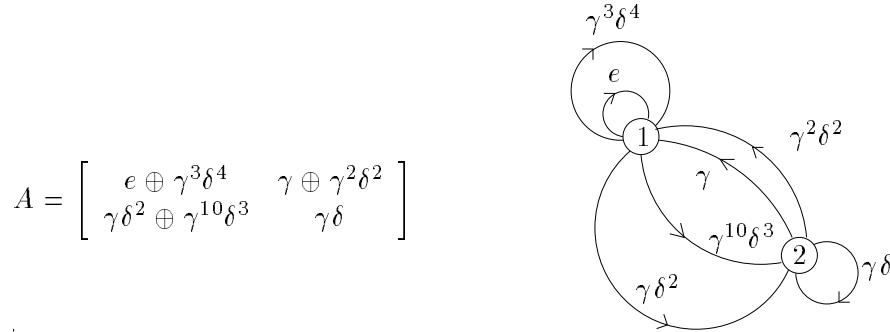


Figure VII.9: Multigraphe dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$

**6.4.3 Notation (multigraphe critique)** On suppose la matrice  $A$  irréductible. On pose alors  $\sigma(A) = \sigma_\infty(A_{ij}^*)$  qui ne dépend pas du couple  $i, j$ . On qualifiera de critique un circuit  $\alpha$  de  $\mathbf{MG}(A)$  tel que  $\sigma(w(\alpha)) = \sigma(A)$ . Le multigraphe critique est formé des arcs et des sommets appartenant à un circuit critique. Le monôme  $m_{ijk}$  sera qualifié de critique s'il value un arc critique. On notera  $A^c$  (matrice critique) la matrice obtenue en se restreignant aux monômes critiques dans la somme (6.4.a). On notera  $A'_{ij} = A_{ij} \boxminus A_{ij}^c$  (matrice sous critique) la somme des monômes n'appartenant pas

à  $A_{ij}$ . On a donc  $A = A^c \oplus A'$ . Pour la matrice  $A$  de la Figure VII.9, on a par (6.1.b)  $\sigma_\infty(A) = \frac{3}{4}$ . Les matrices critique et sous-critique sont données respectivement par

$$A^c = \begin{bmatrix} \gamma^3\delta^4 & \gamma^2\delta^2 \\ \gamma\delta^2 & \varepsilon \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} e & \gamma \\ \gamma^{10}\delta^3 & \gamma\delta \end{bmatrix}.$$

**6.4.4 Notation (Cyclicités dans  $\mathcal{M}_{ax}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ )** Soient  $C_1, \dots, C_r$  les composantes fortement connexes du graphe critique. On définit  $c(C_l)$ , cyclicité de la composante  $C_L$  comme l'∩ des poids des circuits du multigraphe critique. On pose

$$c(A) = c(C_1) \sqcup \dots \sqcup (C_r).$$

On a alors le résultat de cyclicité suivant qui généralise le Théorème 6.3.3.

**6.4.5 Théorème** Soit  $A$  une matrice irréductible à coefficients polynomiaux. La période de  $A_{ij}^*$  divise la cyclicité  $c(A)$ .

Nous illustrons ce résultat sur quelques exemples avant de passer à la preuve.

**6.4.6 Exemple** Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \gamma^3\delta^3 & \gamma^2 \\ \delta^2 & \gamma^6\delta^6 \end{bmatrix}$$

Le graphe critique de  $A$  se confond avec le graphe de  $A$ , et a une seule composante connexe. En outre  $c(A) = w(1) \sqcap w(2) \sqcap (w(1, 2)) = \gamma^3\delta^3 \sqcap \gamma^6\delta^6 \sqcap \gamma^2\delta^2 = \gamma\delta$ , soit une cyclicité de  $(1, 1)$ . On trouve après calculs

$$A^* = \begin{bmatrix} e \oplus \gamma^2\delta^2(\gamma\delta)^* & \gamma^2 \oplus \gamma^4\delta^2(\gamma\delta)^* \\ \delta^2 \oplus \gamma^2\delta^4(\gamma\delta)^* & e \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^4(\gamma\delta)^* \end{bmatrix}.$$

**6.4.7 Exemple** Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \gamma^4\delta^4 \oplus \gamma^6\delta^6 & \gamma^{10}\delta^2 & \gamma^7\delta \\ \gamma^5\delta^2 & \varepsilon & \gamma^3 \\ \gamma^8\delta & \delta^3 & \gamma^9\delta^9 \end{bmatrix}$$

Le graphe critique associé à  $A$  a deux composantes connexes:  $C_1 = \{1\}$ ,  $C_2 = \{2, 3\}$ . La première composante connexe a pour cyclicité  $\gamma^2\delta^2 = \gamma^4\delta^4 \sqcap \gamma^6\delta^6$ , la seconde  $\gamma^3\delta^3$ .

$$A^* = \begin{bmatrix} e \oplus \gamma^4\delta^4(\gamma^2\delta^2)^* & \gamma^7\delta^4 \oplus \gamma^{10}\delta^7 \oplus \gamma^{11}\delta^8 \oplus \gamma^{13}\delta^{10}(\gamma\delta)^* & \gamma^7\delta \oplus \gamma^{10}\delta^4 \oplus \gamma^{11}\delta^5 \oplus \gamma^{13}\delta^7(\gamma\delta)^* \\ \gamma^5\delta^2 \oplus \gamma^8\delta^5 \oplus \gamma^9\delta^6 \oplus \gamma^{11}\delta^8(\gamma\delta)^* & (\gamma^3\delta^3)^* & \gamma^3(\gamma^3\delta^3)^* \\ \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^8\delta^8 \oplus \gamma^9\delta^9 \oplus \gamma^{11}\delta^{11}(\gamma\delta)^* & \delta^3(\gamma^3\delta^3)^* & (\gamma^3\delta^3)^* \end{bmatrix}$$

## 6.5 Preuve du Théorème 6.4.5

On part de la décomposition critique/sous-critique décrite en 6.4.3:

$$A = A^c \oplus A'.$$

On a

$$A^* = ((A^c)^* A')^* (A^c)^*. \quad (6.5.a)$$

On va (i) donner une formule exprimant la période de  $A^*$  à partir de celle des composantes fortement connexes de  $A^c$ , (ii) montrer que les composantes fortement connexes de la matrice  $A^c$  vérifient le résultat de cyclicité.

Le point (i) repose sur la majoration suivante assez grossière de la période des coefficients de l'étoile d'une matrice rationnelle (et non plus polynomiale).

**6.5.1 Proposition** *Soit  $A$  une matrice dont les coefficients sont des séries périodiques:*

$$A_{ij} = p_{ij} \oplus q_{ij}r_{ij}^* .$$

On a, en introduisant la matrice  $B$  telle que  $B_{ij} = p_{ij} \oplus q_{ij}$ :

$$\varpi_\infty(A_{ij}^*) \mid (\sqcup_{c \in C_{ij}} \sqcup w_B(c)) \sqcup (\sqcup_{(lm)} \text{dans } p \text{ avec } p \in \mathcal{P}_{ij} r_{lm}) . \quad (6.5.b)$$

Le second  $\sqcup$  est à prendre sur tous les arc  $(lm)$  faisant partie d'un chemin  $p \in \mathcal{P}_{ij}$ .

**Preuve** On montre que la période associée au terme

$$p \bigotimes_{c \in C} c^+$$

de la formule du Lemme 6.2.3 divise la borne ci-dessus. Pour fixer les idées, nous faisons la preuve dans le cas particulier où  $p = a_{12}$  et  $C = \{a_{23}a_{32}\}$ . Le lecteur généralisera facilement. On a

$$\begin{aligned} w_A(c) &= (p_{23} \oplus q_{23}r_{23}^*)(p_{32} \oplus q_{32}r_{32}^*) \\ &= p_{23}p_{32} \oplus q_{23}p_{32}r_{23}^* \oplus q_{32}p_{23}r_{32}^* \oplus q_{23}q_{32}r_{23}^*r_{32}^* \\ &= u \oplus v \oplus w \oplus t \end{aligned}$$

avec des notations évidentes. La période de  $(w_A(c))^+$  est la même que celle de  $(w_A(c))^*$ , or  $(w_A(c))^* = (u \oplus v \oplus w \oplus t)^* = u^*v^*w^*t^*$ . D'après la Proposition 5.4.6, la période de  $w^*$  divise le  $\sqcup$  de  $\sqcup q_{32}p_{23}$  et de  $r_{32}$ . On voit de la sorte apparaître les circuits de la matrice  $B = P \oplus Q$ . Avec des considérations analogues pour  $u, v, t$ , et comme la période du produit divise le  $\sqcup$  des périodes, on obtient le résultat. ■

Les deux faits suivants résultent immédiatement de la définition de la matrice critique.

**6.5.2 Lemme** *La pente de tout circuit de la matrice sous critique est inférieure (i.e.  $\prec$ ) à la pente critique  $\sigma_\infty(A^*)$ .*

**6.5.3 Lemme** *La matrice critique est bloc-diagonale. Les blocs correspondant aux composantes fortement connexes du graphe critique.*

**6.5.4 Lemme** *Pour tout circuit  $\alpha = (i_1, \dots, i_l, i_1)$  de la matrice critique et tout choix de monômes  $m_{i_1 i_2 k_1}, \dots, m_{i_l i_1 k_l}$  appartenant respectivement aux écritures canoniques de  $A_{i_1 i_2}, \dots, A_{i_l i_1}$ , la pente  $\sigma(m_{i_1 i_2} \dots m_{i_l i_1})$  est égale à la pente critique  $\sigma(A)$ .*

Autrement dit, tout circuit du multigraphe critique est de pente critique.

**Preuve** L'idée est la même que dans [17], Lemme 4.7. Trivialement,

$$\sigma(m_{i_1 i_2} \dots m_{i_l i_1}) \preceq \sigma(A_{i_1 i_2} \dots A_{i_l i_1}) = \sigma(w_A(c)) \preceq \sigma(A) .$$

Supposons par l'absurde  $\sigma(m_{i_1 i_2} \dots m_{i_l i_1}) \prec \sigma(A)$ . On peut compléter l'arc  $i_1 i_2$  en un circuit critique  $\alpha_1 = (i_1 i_2) \cup p_{i_2 i_1}$ , où  $p_{i_2 i_1}$  est un chemin de  $i_2$  à  $i_1$ . On procède de même pour les autres arcs du circuit. On a alors

$$\sigma(A) = \sigma(w(\alpha_1 \dots \alpha_l)) = \sigma((m_{i_1 i_2} \dots m_{i_l i_1}) \otimes w(p_{i_2 i_1} \dots p_{i_1 i_l})) .$$

Si  $\sigma(m_{i_1 i_2} \dots m_{i_l i_1}) \prec \sigma(A)$ , on a nécessairement  $\sigma(w(p_{i_2 i_1} \dots p_{i_1 i_l})) \succ \sigma(A)$  (cf. 5.4.3.(ii)), soit un circuit de pente supérieure à la pente critique: absurde. ■

**6.5.5 Corollaire** *Tous les monômes de l'écriture canonique de  $(A^c)_{ii}^*$  sont de la forme  $\gamma^{\sigma(A)t}\delta^t$ , où  $t$  est un entier positif ou nul.*

**Preuve** Un tel monôme est égal au poids d'un circuit du multigraphe critique de  $A$ . La conclusion résulte de 6.5.4. ■

Le Corollaire suivant achève le point (ii) de la preuve.

**6.5.6 Corollaire** *Si  $i$  et  $j$  appartiennent à la même composante connexe du graphe critique, La période de  $(A^c)_{ij}^*$  est égale à la cyclicité de cette composante.*

**Preuve** Soit l'écriture canonique

$$(A^c)_{ij} = \bigoplus_{l \in L_{ij}} \gamma^{n_l} \delta^{t_l} .$$

On définit la matrice  $B$  à coefficients dans  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  par

$$B_{ij} = \{t_l \mid l \in L_{ij}\} .$$

On a d'après 6.5.5

$$(A^c)_{ii}^* = \bigoplus_{t \in B_{ii}^*} \gamma^{\sigma(A)t} \delta^t , \quad (6.5.c)$$

d'où il résulte que la période de  $(A^c)_{ij}^*$  est égale à  $(\sigma(A)C, C)$ , où  $C$  est la période de  $B_{ij}^*$  caractérisée par le Théorème 6.3.3. ■

Pour conclure, nous reprenons la Formule 6.5.a. Par application du Corollaire 6.5.6, et compte tenu que la période de la somme divise le  $\sqcup$  des périodes, la période de tous les coefficients de  $(A^c)^* A'$  divise  $c(A)$ . On peut donc écrire

$$(A^c)^* A' = P \oplus Q(c(A))^*$$

où  $P$  et  $Q$  sont des matrices polynomiales. On observe que les circuits du multigraphe associé à la matrice  $P \oplus Q$  sont de pente  $\prec$  à  $\sigma(A)$  (un tel circuit, associé à la matrice  $(A^c)^* A'$ , s'interprète en effet comme un circuit du multigraphe associé à  $A$  passant au moins une fois par un arc de  $A'$ , et n'est donc pas critique). Le Lemme 6.5.1 montre que la période des coefficients de  $((A^c)^* A')^*$  divise  $c(A)$ . En multipliant cette matrice par  $(A^c)^*$  d'après la Formule (6.5.a), on obtient le Théorème. ■

**6.5.7 Remarque** On pourrait penser au vu de l'exemple 6.4.7 que la période de  $A_{ij}^*$  est en fait égale au pgcd des périodes des composantes irréductibles du graphe critique reliées. Pour des matrices moins simples, ce phénomène disparaît. On a traité avec MAX la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} \gamma^6 \delta^6 & \gamma^2 & \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma^{15} \delta^{15} & \gamma^3 & \gamma^2 \\ \gamma^2 \delta & \gamma \delta & \gamma^{10} \delta^{10} & \gamma \\ \gamma^5 & \gamma^3 \delta^2 & \gamma \delta & \gamma^2 \delta \end{bmatrix}$$

Les périodes de  $A^*$  sont données dans la matrice:

$$\begin{bmatrix} \gamma^6\delta^6 & \gamma\delta & \gamma\delta & \gamma^6\delta^6 \\ \gamma^3\delta^3 & \gamma^{15}\delta^{15} & \gamma\delta & \gamma^3\delta^3 \\ \gamma\delta & \gamma\delta & \gamma^{10}\delta^{10} & \gamma^{10}\delta^{10} \\ \gamma\delta & \gamma\delta & \gamma^{10}\delta^{10} & \gamma^{10}\delta^{10} \end{bmatrix}$$

## 6.6 Application au calcul du taux de production d'un système autonome

Nous appliquons maintenant ces résultats au calcul du taux de production d'un système en régime autonome. On a les deux représentations équivalentes:

Compteurs $x(n+1) = Ax(n) \oplus Bu(n), \quad u(n) = \varepsilon$ $x(0) = x_0$ Solution au plus tôt: $x_n = A^n x_0$	$\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ $x \succeq A'x \oplus B'u, \quad u = \varepsilon$ $x \succeq \xi \text{ où } \xi_i = \gamma^{(x_0)_i} \delta^0$ $x = (A')^* \xi.$
--	--

Dans le premier cas, les matrices  $A$  et  $B$  sont à coefficients dans  $\mathbb{R}_{\min}$ . Dans le second cas, elles sont à coefficients dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . Le lien entre ces deux représentations est donné par  $A'_{ij} = \gamma \delta^{A_{ij}}$ . La condition  $u = \varepsilon$  traduit le caractère non contraignant de l'entrée. La condition  $x_i \succeq \gamma^{(x_0)_i} \delta^0$  entraîne  $\text{compt } x_i(0) \leq (x_0)_i$ , ce qui, en prenant la solution maximale, revient à la condition initiale  $x(0) = x_0$  pour les compteurs. Les conditions  $x \succeq \xi$  et  $x \succeq A'x$  sont équivalentes à  $x \succeq A'x \oplus \xi$ . La plus petite solution représentant le régime autonome est donc  $x = (A')^* \xi$ , ce qui justifie la dernière ligne du tableau. Définissons le *taux de production* comme la plus petite pente ultime des composantes de  $x$ . On a alors comme conséquence de 6.1.4:

**6.6.1 Corollaire** *Le taux d'un production en régime autonome d'un système représenté par la matrice  $A'$  à coefficients polynomiaux est donné par*

$$\lambda = \sigma(\text{tr}((A')^*)) = \min_c \sigma(w_{A'}(c)) .$$

En termes du multigraphe  $\mathbf{MG}(A')$ , en notant  $w_{A'}^N(c)$  le nombre total de jetons du circuit  $c$  (égal à l'exposant en  $\gamma$  du poids du circuit) et  $w_{A'}^T$  la somme des temporisations des places du circuit (égale à l'exposant en  $\delta$ ), on retrouve la formule bien connue:

$$\lambda = \min_c \frac{w_{A'}^N(c)}{w_{A'}^T} \tag{6.6.a}$$

Cette formule est à comparer à  $\lambda = \rho(A)$  en représentation compteur, ce qui pour  $A$  irréductible résulte immédiatement de 6.4.1.

**6.6.2 Exemple** Pour le graphe d'événements traité initialement (§1), le min dans (6.6.a) est atteint pour le circuit  $3 \mapsto 3$  de la matrice  $a$  (cf. (1.2.b)), soit un taux de production  $\lambda = \frac{1}{2}$ .



# Chapitre VIII

## MAX: un outil de calcul rationnel dans les dioïdes

### Introduction

MAX se présente comme un ensemble de macros écrites en MAPLE, Version V, qui permettent de manipuler des séries rationnelles dans le dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . On a également inclus le traitement de l'algèbre ( $\max, +$ ). Notre propos n'était pas ici de faire un logiciel "définitif", mais de valider les algorithmes décrits plus haut. Voici la transcription LaTeX commentée d'une session MAX qui calcule le transfert du graphe d'événements temporisé traité dans [23].

```
\|^/|      MAPLE V
._|\|_ _/|_. Copyright (c) 1981-1990 by the University of Waterloo.
\ MAPLE / All rights reserved. MAPLE is a registered trademark of
<---- ----> Waterloo Maple Software.
|           Type ? for help.
          MAX Version 0.1
Wed Feb 19 18:00:26 WET 1992

type ?MAX or help(MAX); for help
```

définition des matrices  $a, b, c$  du système (fonction de conversion p2l)

```
MAX> a:=p2l(array([[eps,g,eps],[d,eps,eps],[e,d,g*d^2]]));
MAX> b:=p2l(array([[d^3,eps],[eps,g*d],[eps,eps]]));
MAX> c:=p2l(array([[eps,g,d^3]]));
visualisation du résultat (prettyprint l2p)
MAX> l2p(a),l2p(b),l2p(c);
```

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \delta & \gamma\delta^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \delta^3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \gamma\delta \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma & \delta^3 \end{bmatrix}$$

```
MAX> time();
```

.816

calcul du transfert et affichage

```
MAX> h:=evald(c&* star(a) &* b); 12p(h);
```

$$\left[ \delta^8(\gamma\delta^2)^* \quad \gamma\delta^5(\gamma\delta^2)^* \right]$$

```
MAX> time();
```

3.183

Les temps CPU (en secondes) sont ceux d'une SUN-Sparcstation 2. En sus de la présentation générale qui suit, nous renvoyons le lecteur à la documentation en ligne de MAX qui décrit plus précisément les différentes fonctions et opérateurs.

## 1 Syntaxe générale

MAX reconnaît les types élémentaires suivants: type constante (noté **const** dans la suite) correspondant au dioïde  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ , type **rat** (rationnels dans  $\mathcal{M}_{\max}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ ), qui inclut les polynômes. MAX reconnaît les opérations algébriques de base suivantes:

opération	domaine
&+	<b>const</b> &+ <b>const</b> → <b>const</b> <b>rat</b> &+ <b>rat</b> → <b>rat</b>
&*	analogique à &+
<b>star</b> (étoile)	<b>const</b> → <b>const</b> <b>rat</b> → <b>rat</b> (matrice) → (matrice)
&** (puissance)	<b>const</b> &**(réel) → <b>const</b> <b>rat</b> &**( entier naturel) → <b>rat</b> ( matrice)&**( entier naturel) → ( matrice)
<b>evald</b>	( expression matricielle) → (matrice)

Ces opérateurs n'ont pas les ordres de priorité usuels (les opérateurs de type & s'évaluent de la gauche vers la droite en MAPLE). Ils doivent donc être parenthésés si nécessaire. Par exemple  $a\&+b\&*c$  s'évalue en  $(a\&+b)\&*c$ . Pour obtenir  $a \oplus (b \otimes c)$ , il faudra donc écrire  $a\&+(b\&*c)$ . Pour les expressions algébriques matricielles, on dispose de l'analyseur **evald**, analogue à la fonction **evalm** de MAPLE. **evald** reconnaît les expressions algébriques matricielles **expmat** formées par la règle de grammaire suivante:

**expmat** → (matrice) | **expmat** + **expmat** | **expmat** &\* **expmat** | **expmat** \*\*(entier naturel).

L'analyseur **evald** respecte les ordres de priorité usuels. Par exemple, si l'on a un système représenté par un quadruplet  $A, B, C, D, H:=\text{evald}(D+C\&* \text{star}(A)\&*B)$  calcule le transfert.

**1.0.1 Remarque** La somme de matrices se note “+” et non “&+”. Il s'agit d'une contrainte liée à MAPLE, qui ne permet pas de mettre des ordres de priorité sur les opérateurs de type “&”.

## 2 Opérations sur les constantes

### 2.1 Le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$

Les réels, entiers et rationnels sont représentés sous forme MAPLE standard.  $\varepsilon$  est noté `eps` et  $+\infty$  est noté `inf`.  $e$  est admis comme synonyme de 0.

```

MAX>2 &+ 2 ;
2
MAX> 0&* 1 ;
1
MAX> e&+ 2 ;
2
MAX> (2/3) &+ (4/5) ;
4/5
MAX> 4 &* inf ;
inf
MAX> 2/3&+ eps ;
2/3
MAX> eps&* inf ;
eps
MAX> eps&* 4.5 ;
eps
MAX> 4.5&* 10 ;
14.5
MAX> 10&+ 7&* 2 ;
12
MAX> 10&+ (7&* 2) ;
10
MAX> star(0) ;
0
MAX> star(-1) ;
0
MAX> star(e) ;
e
MAX> star(2) ;
inf

```

### 2.2 Opérations matricielles dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$

La session suivante se passe de commentaires.

```

MAX> a:=array([[1,2],[4,7]]);
a := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

MAX> b:=array([[0,5],[-6,-1]]);
b := 
$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

MAX> s:=evald(a+b);
s := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$


```

```

MAX> p:=evald(a&*b);

$$p := \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

MAX> t:=tr(p);

$$t := 9$$

MAX> a0:=star(a);

$$\begin{bmatrix} +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty \end{bmatrix}$$

MAX> c1:=star(b);

$$c1 := \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

MAX> id(2);

$$\begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

MAX> c2:=evald(id(2)+ b+ b**2);

$$c2 := \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$


```

### 2.2.1 Fonctions eigenm, eigenv

La fonction `eigenm` (pour eigen-matrix) calcule la somme

$$\text{eigenm}(A) = A \oplus (A^{\otimes 2})^{\odot \frac{1}{2}} \oplus \dots \oplus (A^{\otimes (n)})^{\odot \frac{1}{n}},$$

où les puissances fractionnaires s'entendent au sens du produit de Hadamard du dioïde, ce qui se réécrit comme suit dans l'algèbre habituelle:

$$\text{eigenm}(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{1}{i} \times A^{\otimes i} \right).$$

La fonction `eigenv` retourne la trace de `eigenm(A)`, c'est à dire la plus grande valeur propre de  $A$ ,  $\rho(A)$ . Rappelons en effet que  $\rho(A)$  est égal au poids moyen maximal des circuits de  $A$ . Comme  $\text{tr}((A^{\otimes i})^{\odot \frac{1}{i}})$  est égal au poids moyen maximal des circuits de longueur  $i$ , on a clairement  $\rho(A) = \text{tr}(\text{eigenm}(A))$ .

Pour la matrice `a` définie plus haut, on a ainsi:

```

MAX> a1:=eigenm(a);

$$a1 := \begin{bmatrix} 3 & 9/2 \\ 11/2 & 7 \end{bmatrix}$$

MAX> k:=eigenv(a);

$$k := 7$$

MAX> d0:=array([[0,4,inf,eps],[-70,0,inf,35],[eps,eps,0,inf],[eps,eps,12,0]]);

$$d0 := \begin{bmatrix} 0 & 4 & +\infty & \varepsilon \\ -70 & 0 & +\infty & 35 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & +\infty \\ \varepsilon & \varepsilon & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

MAX> d1:=eigenm(d0);

$$d1 := \begin{bmatrix} 0 & 4 & +\infty & +\infty \\ -\frac{35}{2} & 0 & +\infty & +\infty \\ \varepsilon & \varepsilon & +\infty & +\infty \\ \varepsilon & \varepsilon & +\infty & +\infty \end{bmatrix}$$


```

**2.2.2 La fonction karp** La fonction **karp** calcule la valeur propre  $\rho(A)$  dans  $\mathbb{R}_{\max}$  d'une matrice  $A$  irréductible en utilisant l'algorithme de Karp [54].  $\rho(A)$  est donné par la formule suivante

$$\rho(A) = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \bigwedge_{0 \leq k \leq n-1} \left( \frac{A_{1i}^n}{A_{1i}^k} \right)^{\frac{1}{n-k}},$$

ou avec les notations usuelles:

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{0 \leq k \leq n-1} \frac{A_{1i}^{\otimes n} - A_{1i}^{\otimes k}}{n - k}.$$

Si  $A$  n'est pas irréductible, **karp** retourne la valeur propre de la composante irréductible associée à l'indice 1.

Pour les matrices traitées plus haut, on a par exemple:

```
MAX> k:=karp(a);
k := 7
MAX> l:=karp(d0);
l := 0
```

### 3 Calcul rationnel dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$

#### 3.1 Polynômes

Nous avons adopté une représentation des polynômes de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$  sous forme de liste, distincte des polynômes de MAPLE.

Le type **poly**, représentant les polynômes de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ , est défini comme suit:  
**poly**=⟨liste de monômes⟩ | **eps** | **e**.

Un monôme est une liste [t,n] formée de deux entiers positifs ou nuls t et n, correspondant à  $\gamma^n \delta^t$ . On notera que la liste vide [] (formée de 0 monômes) est synonyme de **eps**. La liste [[0,0]] correspondant au monôme  $\gamma^0 \delta^0$  est un synonyme de l'unité **e**.

**3.1.1 Fonctions de conversion p21 et 12p** La fonction de conversion **p21**, (pour “polynomials to lists”) convertit un polynôme conventionnel en g et d en une liste de type **poly** mise sous forme minimale. Les indéterminées g et d correspondent respectivement aux indéterminées  $\gamma$  et  $\delta$  de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ . La fonction inverse **12p** convertit une liste représentant un polynôme de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$  en polynôme classique en g et d. Les fonctions **p21** et **12p** ne sont pas exactement inverses l'une de l'autre. On a  $\text{p21} \circ \text{12p} \preceq \text{Id}$  et  $\text{12p} \circ \text{p21} \preceq \text{Id}$ . En effet, **p21** normalise les polynômes: étant donné un polynôme  $q \in \mathbb{B}[\gamma, \delta]$ ,  $\text{12p} \circ \text{p21}(q)$  est égal au représentant minimal de  $q$ . De même, **l** étant une liste de type **poly**  $\text{p21} \circ \text{12p}(l)$  est égal à la liste minimale représentant **l**.

On a par exemple:

```
MAX> p21(e);
[[[0,0]]]
```

```

MAX> p21(1);
[[0,0]]

MAX> a:=[[0,1],[2,3],[10,9]];
a := [[0, 1], [2, 3], [10, 9]]

MAX> v:=l2p(a);
      3   2   9   10
v := g + g d + g d

```

Dans la suite, pour des raisons de lisibilité, on donnera systématiquement les transcriptions LaTeX de la session. Au lieu de la copie d'écran MAPLE ci-dessus, on aura donc:

```

v :=  $\gamma \oplus \gamma^3\delta^2 \oplus \gamma^9\delta^{10}$ 

MAX> b:=p21(v);
b := [[0, 1], [2, 3], [10, 9]]

MAX> w:=g+g^3*d^2+g^4*d+g^9*d^10;
 $\gamma \oplus \gamma^3\delta^2 \oplus \gamma^4\delta \oplus \gamma^9\delta^{10}$ 

MAX> c:=p21(w);
c := [[0, 1], [2, 3], [10, 9]]

MAX> l2p(c);
 $\gamma \oplus \gamma^3\delta^2 \oplus \gamma^9\delta^{10}$ 

```

Le monôme redondant  $\gamma^4\delta$  a été éliminé lors du calcul de p21(w).

```

MAX> f:=p21(g+g^3*d^2+g^4*d+g^9*d^10)&*p21(g*d^5);
f := [[5, 2], [7, 4], [15, 10]]

MAX> l2p(f);
 $\gamma^2\delta^5 \oplus \gamma^4\delta^7 \oplus \gamma^{10}\delta^{15}$ 

MAX> f&+ p21(d^9);
[[9, 0], [15, 10]]

MAX> l2p(");
 $\delta^9 \oplus \gamma^{10}\delta^{15}$ 

MAX> h1:=f&* p21(g*d^5):l2p(h1);
 $\gamma^3\delta^{10} \oplus \gamma^5\delta^{12} \oplus \gamma^{11}\delta^{20}$ 

```

```

MAX> h2:=f&* p21(g^2*d^10):l2p(h2);
 $\gamma^4\delta^{15} \oplus \gamma^6\delta^{17} \oplus \gamma^{12}\delta^{25}$ 

```

```

MAX> l2p(h1&+ h2);
 $\gamma^3\delta^{10} \oplus \gamma^4\delta^{15} \oplus \gamma^6\delta^{17} \oplus \gamma^{11}\delta^{20} \oplus \gamma^{12}\delta^{25}$ 

```

```

MAX> l2p(f&* p21(g*d^5+g^2*d^10));
 $\gamma^3\delta^{10} \oplus \gamma^4\delta^{15} \oplus \gamma^6\delta^{17} \oplus \gamma^{11}\delta^{20} \oplus \gamma^{12}\delta^{25}$ 

```

```

MAX> l2p(f &+ []);
 $\gamma^2\delta^5 \oplus \gamma^4\delta^7 \oplus \gamma^{10}\delta^{15}$ 

```

```
MAX> f&* [];
```

```

MAX> f&* eps;
                                         ε

MAX> l2p(f&* e);
 $\gamma^2 \delta^5 \oplus \gamma^4 \delta^7 \oplus \gamma^{10} \delta^{15}$ 

MAX> l2p(f&* [[0,0]]);           γ2δ5 ⊕ γ4δ7 ⊕ γ10δ15

```

**3.1.2 Fonction canonic** La fonction `canonic` met une liste de type `poly` ou `rat` sous forme minimale. On a l'identité `canonic = p2l.l2p`.

```

MAX> u:=[[0,1],[1,0]];
u := [[0, 1], [1, 0]]

MAX> 12p(u);
 $\gamma \oplus \delta$ 

MAX> v:=canonic(u);
v := [[1, 0]]

MAX> 12p(v);
 $\delta$ 

MAX>p21(12p(u));
[[1, 0]]

MAX>s:= [[[0,0],[1,1]],[[1,1]]];
s := [[[0, 0], [1, 1]], [[1, 1]]]

MAX> 12p(s);
 $e \oplus \gamma \delta (\gamma \delta)^*$ 

MAX> t:=canonic(s);
t := [[[0, 0]], [[1, 1]]]

MAX> 12p(t);
 $(\gamma \delta)^*$ 

```

**3.1.3 Remarque** La représentation sous forme de listes des polynômes est du d'une part à l'accès peu aisée à la représentation interne des polynômes MAPLE, et d'autre part à la nécessité de normaliser tous les objets avant calcul. La normalisation est faite une fois pour toutes par p21 lors de la première définition d'un objet.

### 3.2 Séries périodiques

**3.2.1 Représentation des séries périodiques** Les séries périodiques sont, tout comme les polynômes, représentées par des listes. Le type série rationnelle **rat** est défini comme suit:

**rat=** poly | [〈liste de monômes〉,〈liste de monômes〉].

Une série périodique non polynomiale est donc une liste  $[p, q]$  formée de deux polynômes non nuls. Soient

$$p = \gamma^{n_1} \delta^{t_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{n_k} \delta^{t_k}$$

le premier polynôme de la liste, et  $q = \gamma^{n'_1} \delta^{t'_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{n'_r} \delta^{t'_r}$ . La série périodique  $s$  associée à  $[p, q]$  est donnée par:

$$s = \left( \bigoplus_{i=1}^{k-1} \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \right) \oplus \gamma^{n_k} \delta^{t_k} \left( e \oplus \bigoplus_{j=1}^{r-1} \gamma^{n'_j} \delta^{t'_j} \right) (\gamma^{n'_r} \delta^{t'_r})^*.$$

Le dernier monôme de  $p$  est donc égal au premier monôme du périodique. Le dernier monôme de  $q$  est égal à la période.

**3.2.2 Définition des séries rationnelles** On peut définir une série rationnelle à l'aide de la fonction p21 qui reconnaît une expression rationnelle “exprat” en  $g$  et  $d$ , définie par la règle de grammaire suivante:

$$\text{exprat} \rightarrow e \mid g \mid d \mid \text{exprat} + \text{exprat} \mid \text{exprat} * \text{exprat} \mid \text{exprat}^{**}.$$

On notera que l'étoile de  $a$  se note  $a^{**}$  (\* entre guillemets)<sup>1</sup>. On a par exemple: MAX>

s1:=e+g^2\*d^2+g^3\*d^4\*(e+g^2\*d+g^3\*d^3+g^5\*d^4)\*(g^6\*d^6)^\*\*;

$$e \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^4 (e \oplus \gamma^2 \delta \oplus \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^4) (\gamma^6 \delta^6)^*$$

MAX> s:=p21(s1);

$$s := [[[0, 0], [2, 2]], [[2, 1], [3, 3]]]$$

MAX> l2p(s);

$$e \oplus \gamma^2 \delta^2 (e \oplus \gamma \delta^2) (\gamma^3 \delta^3)^*$$

MAX> l2p(s[1]);

$$e \oplus \gamma^2 \delta^2$$

MAX> l2p(s[2]);

$$\gamma \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^3$$

On notera que la série est automatiquement mise sous forme minimale. Voici un exemple où p21 calcule une expression plus complexe:

MAX> s:=d^8+(g^3+(g^3\*d^3+g^2\*d^2)^\*\*)^\*\*;

$$\delta^8 \oplus \left( \gamma^3 \oplus (\gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^2 \delta^2)^* \right)^*$$

MAX> s1:=p21(s);

$$s1 := [[[8, 0], [9, 9]], [[1, 1]]]$$

MAX> l2p(s1);

$$\delta^8 \oplus \gamma^9 \delta^9 (\gamma \delta)^*$$

**3.2.3 Opérations &+,&\* et star** Les expressions rationnelles se calculent soit à partir de p21, soit à l'aide des opérateurs &+,&\*,et star qui s'utilisent comme pour les constantes.

MAX>u:=p21(g)&\* star(p21(g^3\*d^3));

$$u := [[[0, 1]], [[3, 3]]]$$

MAX> l2p(u);

$$\gamma (\gamma^3 \delta^3)^*$$

MAX> v:=star(u);

$$v := [[[0, 0], [3, 4]], [[3, 3]]]$$

MAX> l2p(v);

$$e \oplus \gamma^4 \delta^3 (\gamma^3 \delta^3)^*$$

MAX> w:=p21(d^9)&+ v: l2p(w);

$$\delta^9 \oplus \gamma^{13} \delta^{12} (\gamma^3 \delta^3)^*$$

---

<sup>1</sup>pour des raisons de syntaxe MAPLE

### 3.3 Validation de MAX

Nous avons, afin de vérifier systématiquement les algorithmes, programmé des fonctions générant des séries périodiques aléatoires.

#### 3.3.1 Fonctions `randpol`, `randser`, `randlist`

- La fonction `randpol`, prenant pour argument un entier  $n$ , produit un polynôme de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$  aléatoire dont le représentant minimal a entre 1 et  $n$  termes. La syntaxe sans arguments `randpol()` prend la valeur par défaut  $n = 10$ .
- La fonction `randser` produit une série périodique aléatoire dont le transitoire a entre 0 et  $n-1$  termes, et le motif entre 1 et  $n$  termes. Appelé sans argument, `randser()` prend la valeur par défaut  $n = 10$ .
- La fonction `randlist` produit une liste non minimale de type `poly` formée de  $n$  termes. Par défaut,  $n = 10$ .

On a par exemple la session suivante:

```
MAX> p:=randpol();
[[2,5],[9,9],[12,11],[16,12]]

MAX> l2p(p);
 $\gamma^5\delta^2 \oplus \gamma^9\delta^9 \oplus \gamma^{11}\delta^{12} \oplus \gamma^{12}\delta^{16}$ 

MAX> q:=randpol(3);
[[1,2],[2,3]]

MAX> l2p(q);
 $\gamma^2\delta \oplus \gamma^3\delta^2$ 

MAX> s:=randser();
[[[7,7],[10,15],[12,20],[18,27],[26,33],[33,34],[36,35]],[[6,5],[16,6],[26,11],[33,19],[40,20],[49,21],[53,28],[55,38],[65,46]]]

MAX> l2p(s);
 $\gamma^7\delta^7 \oplus \gamma^{15}\delta^{10} \oplus \gamma^{20}\delta^{12} \oplus \gamma^{27}\delta^{18} \oplus \gamma^{33}\delta^{26} \oplus \gamma^{34}\delta^{33} \oplus \gamma^{35}\delta^{36} (e \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^6\delta^{16} \oplus \gamma^{11}\delta^{26} \oplus \gamma^{19}\delta^{33} \oplus \gamma^{20}\delta^{40} \oplus \gamma^{21}\delta^{49} \oplus \gamma^{28}\delta^{53} \oplus \gamma^{38}\delta^{55}) (\gamma^{46}\delta^{65})^*$ 

MAX> r:=randser(3);
[[[3,2],[4,4],[5,7]],[[1,3]]]

MAX> l2p(r);
 $\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^4 \oplus \gamma^7\delta^5 (\gamma^3\delta)^*$ 

MAX> randlist(3);
[[3,1],[3,3],[1,3]]

MAX> l2p(");
 $\gamma\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^3\delta$ 

MAX> randlist();
[[4,1],[10,2],[10,8],[4,6],[5,2]]
```

```
MAX> 12p(");

$$\gamma\delta^4 \oplus \gamma^2\delta^{10} \oplus \gamma^8\delta^{10} \oplus \gamma^6\delta^4 \oplus \gamma^2\delta^5$$

```

### 3.3.2 Vérification des algorithmes de somme et produit de polynômes

Nous avons effectué le test de cohérence suivant:

- générer deux polynômes non minimaux  $p$  et  $p'$  par `randlist`.
- calculer `canonic(p)&+canonic(p')`, `canonic(p)&*canonic(p')`
- comparer respectivement avec `p2l(12p(p) + 12p(p'))` et `p2l(12p(p) * 12p(p'))`, où `+` et `*` désignent la somme et le produit des polynômes MAPLE standards.

Ce test revient à vérifier la commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{B}[\gamma, \delta] & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{B}[\gamma, \delta] \\
 \downarrow p, p' & & \downarrow p \oplus p' \\
 \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta] & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta] \\
 \overline{p}, \overline{p'} & & \overline{p \oplus p'} = \overline{p \oplus p'} \\
 & & \overline{p \otimes p'} = \overline{p} \otimes \overline{p'}
 \end{array}$$

### 3.3.3 Vérification des algorithmes de somme et produit de séries rationnelles

Nous avons effectué le test de cohérence suivant:

- (i) générer deux séries aléatoires  $s$  et  $s'$ ,
- (ii) calculer  $s \oplus s'$ ,  $ss'$ ,
- (iii) calculer  $p$ , le développement de  $s$  à un ordre élevé et  $p'$ , développement de  $s'$  au même ordre,
- (iv) s'assurer que les développements de  $s \oplus s'$  et  $ss'$  coïncident respectivement  $p \oplus p'$  et  $pp'$ , à des ordres convenables.

Si l'on suppose correctes les opérations sur les polynômes, le succès de ce test “garantit” la validité des algorithmes sur les séries rationnelles. Ce test a été passé pour quelques centaines de séries aléatoires produites par `randser(15)`. En ce qui concerne les étoiles, on s'est borné à vérifier l'identité  $(a^*)^* = a^*$  pour des séries rationnelles aléatoires.

## 4 Exemple: calcul du transfert d'un atelier flexible de type flow-shop

On considère l'atelier flexible de type flowshop avec trois pièces et trois machines, représenté par le réseau de Petri sur la Figure VIII.1. On donne les temps suivants de passage des pièces sur les machines:

	P1	P2	P3
M1	9	2	1
M2	2	7	2
M3	1	10	1

Une pièce de type 1, convoyée par une palette, passe donc pendant 9 unités de temps sur la machine 1, puis 2 unités de temps sur la machine 2, et 1 unité de temps sur la machine 3. Elle sort alors de l'atelier, et la palette revient charger une nouvelle pièce en amont de la machine 1. De même pour les pièces 2 et 3. Pendant ce temps, la machine 1 traite les 3 pièces suivant la séquence (1 pièce de type 1, 1 pièce de type 2, 1 pièce de type 3) et recommence. On notera que les circuits horizontaux sur le graphe correspondent à des séquences de tâches des machines, et que les circuits verticaux, dits "circuits pièce", correspondent au trajet des palettes. On peut écrire la représentation matricielle suivante.

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^{10} & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma \\ \delta^9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta & \varepsilon & \delta^7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^7 & \varepsilon & \delta & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \delta^{10} & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^{10} & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta \end{bmatrix}$$

où les entrées  $u_1, u_2, u_3$  représentent les approvisionnements relatifs au pièces 1,2,3 et les sorties  $y_1, y_2, y_3$  représentent les sorties de ces pièces<sup>2</sup>. On obtient alors à l'aide de MAX la matrice de transfert:

$$H = \begin{bmatrix} \delta^{12} \oplus \gamma\delta^{30}(\gamma\delta^{19})^* & \gamma\delta^{21}(\gamma\delta^{19})^* & \gamma\delta^{13} \oplus \gamma^2\delta^{31}(\gamma\delta^{19})^* \\ \delta^{28}(\gamma\delta^{19})^* & \delta^{19}(\gamma\delta^{19})^* & \gamma\delta^{29}(\gamma\delta^{19})^* \\ \delta^{29}(\gamma\delta^{19})^* & \delta^{20}(\gamma\delta^{19})^* & \delta^4 \oplus \gamma\delta^{30}(\gamma\delta^{19})^* \end{bmatrix}$$

On constate que la période  $\gamma\delta^{19}$  correspond à l'unique circuit critique (associé à la pièce 2). Les deux machines menantes, à savoir les machines 1 et 3, dont le temps de cycle est de 12 unités de temps, ne sont donc pas saturées. Nous étudierons des systèmes analogues dans le chapitre IX sur l'optimisation des ressources. Nous montrerons en particulier comment saturer les machines menantes en rajoutant des palettes.

---

<sup>2</sup>Les matrices  $(A, B, C)$  peuvent être produites automatiquement à partir de la matrice des temps de passage des pièces sur les machines à l'aide de l'instruction `array2flex`, décrite au Chapitre suivant.

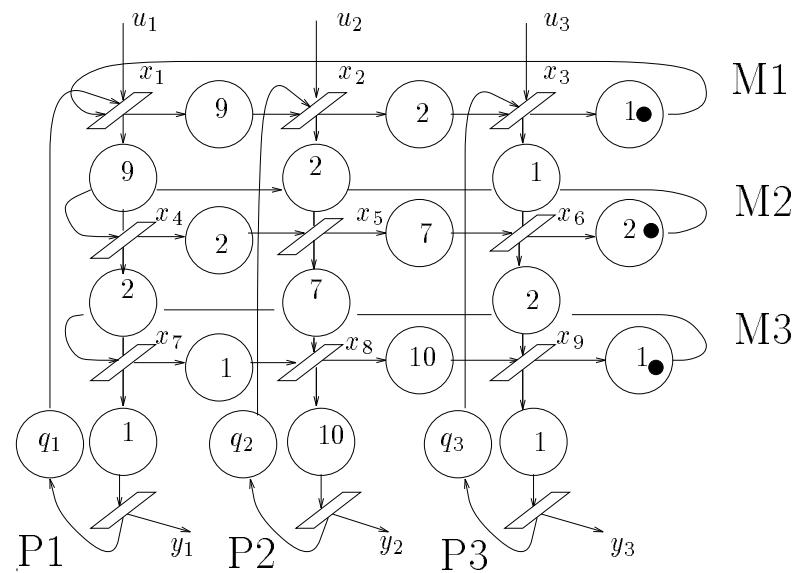


Figure VIII.1: Un atelier flexible à 3-machines et 3-pièces

---

## Chapitre IX

# Calcul formel du taux de production et optimisation des ressources

### Introduction

Nous considérons le problème dit “d’optimisation des ressources”, qui consiste à minimiser le nombre de ressources (machines, palettes, processeurs, places de stocks, mémoires tampons ...) d’un système de manière à réaliser un taux de production fixé. Ce problème a d’abord été traité par Cohen, Dubois, Quadrat et Viot [17], qui présentent un algorithme itératif donnant *une* répartition minimale des ressources. Dans le cas particulier où le taux de production visé est le taux du processus le plus lent, on parvient de la sorte à saturer le “processus goulot”. Hillion et Proth [52] ont considéré un second problème analogue, qui consiste à minimiser un coût linéaire associé aux ressources, toujours sous la contrainte d’un taux de production donné. Ils ramènent ce problème à un problème de programmation linéaire en nombres entiers, dont les contraintes sont indiquées par l’ensemble des circuits du graphe. Constatant que cette approche était rendue inefficace par l’impossibilité apparente d’énumérer les circuits (en trop grand nombre), ils formulent des heuristiques pour ce problème. Nous attaquons dans ce chapitre le seul problème d’énumération des contraintes du programme linéaire, dans l’esprit des techniques d’énumération algébrique des circuits d’un graphe dues à Benzaken, Backhouse & Carré, Gondran & Minoux [5, 4, 47]. Nous adaptons ainsi un algorithme de type Gaussien. La clé de la méthode consiste à introduire des congruences polyédriques, faisant appel à des algorithmes de programmation quadratique ou de programmation linéaire. On peut alors simplifier les données intermédiaires, et obtenir le simplexe final sous forme réduite. On obtient de la sorte l’expression formelle du taux de production en fonction des ressources. Nous avons appliqué cette méthode à l’atelier étudié en 1983 par Cohen, Dubois, Quadrat et Viot. Pour cet exemple réel à 8 machines et 6 pièces, le problème d’énumération des circuits, inabordable par l’algorithme de Gauss sans les congruences polyédriques, donne finalement le taux de production comme min de 25 contraintes linéaires non redondantes. On peut alors prouver simplement que l’allocation des ressources obtenue par l’algorithme itératif cité plus haut est l’*unique* allocation minimale. Proth et Xie [83] ont par ailleurs récemment montré que certains problèmes d’optimisation de ressources se ramenaient à la résolution d’un nouveau problème de programmation linéaire mixte, dont le nombre de contraintes est de l’ordre du nombre de places et non plus du nombre de circuits. L’algorithme de Proth et Xie n’est cependant valable que pour une sous classe assez restrictive de systèmes et de critères. Nous montrons que le problème d’optimisation des ressources est équivalent à la recherche d’un sous-vecteur propre, ce qui généralise l’algorithme

de Proth et Xie à des systèmes quelconques. Nous concluons en comparant les deux approches.

## 1 Les problèmes d'optimisation des ressources

### 1.1 Exemple

On considère l'atelier flexible avec deux types de pièces et 3 machines représenté sur la figure IX.1. On donne la table suivante des temps de passage des pièces sur les machines:

temps de passage	pièce 1	pièce 2	charge totale
machine 1	9	2	11
machine 2	2	7	9
machine 3	1	10	11

L'atelier flexible est de type *flowshop*, i.e. les pièces sont supposées passer sur les machines dans le même ordre. Un système analogue a été étudié en VIII,4. La pièce 1 passe donc successivement sur les machines 1,2,3. Idem pour la pièce 2. On suppose que dans la configuration initiale,  $q_1$  palettes réservées aux pièces 1 et  $q_2$  palettes réservées aux pièces 2 sont placées en amont de la machine 1. Les deux machines 1 et 3 sont menantes, i.e. ont la charge maximale de 11 unités de temps. Quelle que soit l'allocation des palettes, on ne pourra donc jamais dépasser la fréquence des machines menantes, c'est-à-dire une pièce en moyenne toutes les 11 unités de temps. On cherche ici à minimiser les nombres  $q_1$  et  $q_2$  pour saturer les machines menantes  $M_1$  et  $M_3$ . Nous montrerons dans ce chapitre qu'à l'aide d'un calcul algébrique simple (nous l'effectuons à la main dans la section §3.4), on obtient l'expression *formelle* du taux de production  $\lambda$  en fonction des ressources, soit en l'occurrence:

$$\lambda = \min\left(\frac{1}{12}, \frac{q_1}{12}, \frac{1+q_1}{29}, \frac{q_2}{19}\right) . \quad (1.1.a)$$

On notera que ces contraintes se lisent en termes de circuits du graphe.  $\frac{q_1}{12}$  correspond au circuit  $(x_5, x_3, x_1)$ ,  $\frac{1+q_1}{29}$  au circuit  $(x_5, x_6, x_4, x_3, x_1)$ . Pour saturer la machine menante, il faut que chacun des termes de  $\lambda$  soit plus grand que le taux de production maximal  $\frac{1}{11}$ , soit  $\frac{q_1}{12} \geq \frac{1}{11}$ ,  $\frac{1+q_1}{29} \geq \frac{1}{11}$ ,  $\frac{q_2}{19} \geq \frac{1}{11}$ , ce qui donne l'allocation entière minimale des palettes saturant les machines  $M_1$  et  $M_3$ :

$$q_1 = 2, q_2 = 2 .$$

### 1.2 Premier problème

Soient  $q_1, \dots, q_n$  les quantités des ressources inconnues, et  $\lambda(q)$  le taux de production associé. L'application  $q \mapsto \lambda(q)$  est évidemment croissante, et donc le taux de production  $\lambda(q)$  est majoré par  $\lambda(+\infty)$ . On suppose que le taux de production maximal  $\bar{\lambda} = \lambda(+\infty)$  est fini (dans l'exemple ci-dessus, il s'agit du taux de production des machines menantes, i.e. des processus sur lesquels les ressources n'ont pas d'effet). Le premier problème d'optimisation des ressources consiste à trouver une (ou toutes) les allocations des ressources saturant les processus menants. En d'autres termes, on cherche les vecteurs  $q \in \mathbb{N}^n$  minimaux tels que

$$\lambda(q) = \bar{\lambda} .$$

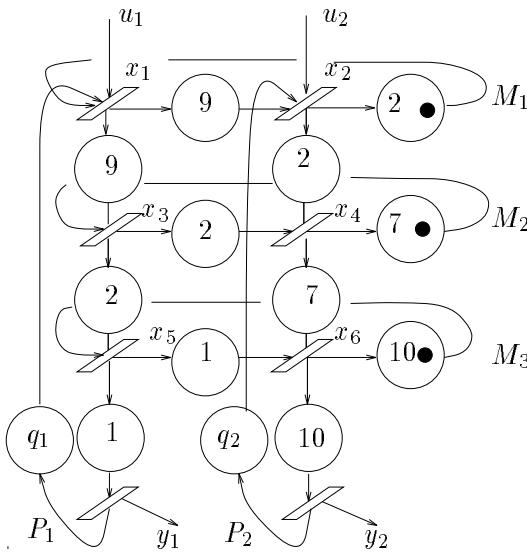


Figure IX.1: “Flowshop” 2 pièces 3 machines, nombre de palettes à optimiser

### 1.3 Second problème

Etant donné un taux de production souhaité  $\lambda_0$ , on cherche à minimiser un coût linéaire associé aux ressources nécessaires pour atteindre ce taux de production, soit le coût

$$J(q) = p_1 q_1 + \dots + p_n q_n ,$$

où  $p_i$  désigne le prix d'une unité de ressource  $i$  (par exemple, le prix d'installation d'une machine ou d'une palette). On verra plus loin que  $\lambda(q)$  est un min de formes affines. On a donc le problème de programmation linéaire en nombres entiers suivant

$$\min \{J(q) \mid q \in \mathbb{N}^n, \lambda(q) \geq \lambda_0\} . \quad (1.3.a)$$

## 2 Polynômes multivariables et ressources

Nous introduisons un dioïde à  $p+2$  indéterminées, utile pour l'étude des systèmes à  $p$  ressources inconnues. Ce dioïde est la généralisation naturelle de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ .

### 2.1 Le dioïde $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_i, \delta]]$

**2.1.1 Définition (Dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_0, \dots, \gamma_p, \delta]]$ )** On note  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_0, \dots, \gamma_p, \delta]]$  le dioïde quotient de  $\mathbb{B}[[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p, \delta]]$  par l'application

$$\varphi : \varphi(a) = a \gamma_0^* \gamma_1^* \dots \gamma_p^* (\delta^{-1})^* . \quad (2.1.a)$$

Lorsque qu'il sera clair au vu du contexte qu'il s'agit d'un dioïde de séries formelles à  $p+2$  indéterminées, on s'autorisera la notation  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_i, \delta]]$ .

En d'autres termes,  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_i, \delta]]$  est le dioïde des séries formelles à coefficients booléiens en les variables commutatives  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p, \delta$ , muni des règles de simplification suivantes:

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}, \quad \gamma_i^n \oplus \gamma_i^m = \gamma_i^{\min(n, m)}, \quad \delta^t \oplus \delta^s = \delta^{\max(t, s)}.$$

Dans le cas  $p = 0$ , on retrouve le dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . On notera  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_i, \delta]$  le sous-dioïde des polynômes. La théorie développée en B.1.2.10 s'applique. La relation associée à  $\varphi$  est une *bonne congruence*. En particulier, tout élément de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_i, \delta]$  admet un unique représentant minimal modulo  $\varphi$ .

**2.1.2 Exemple** Dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_0, \gamma_1, \delta]$ , on a  $\gamma_0 \gamma_1 \oplus \delta = \delta$ .

## 2.2 Représentation géométrique

On a vu que le dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  des séries formelles en  $\gamma$  et  $\delta$  est isomorphe au dioïde des "cônes sud-est" de  $\mathbb{Z}^2$  (cf. VII.(2.2.c)). Nous donnons de même une représentation géométrique de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_i, \delta]]$  à l'aide d'un dioïde de parties de  $\mathbb{R}^{p+2}$ .

**2.2.1 Dioïdes  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{p+2}), \mathcal{P}(\mathbb{Z}^{p+2})$**  On notera  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{p+2})$  le dioïde des parties de  $\mathbb{R}^{p+2}$ , munies de l'union et de la somme vectorielle. L'application support, définie comme suit

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{B}[[\gamma_0, \dots, \gamma_p, \delta]] & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{Z}^{p+2}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^{p+2}) \\ s & \longmapsto & \text{supps} = \{(n_0, n_1, \dots, n_p, t) \in \mathbb{Z}^{p+2} \mid s(n_0, \dots, n_p, t) \neq \varepsilon\} \end{array} \right. \quad (2.2.a)$$

est un isomorphisme de dioïdes.

**2.2.2 Dioïdes  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{R}^{p+2}]], \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{Z}^{p+2}]]$**  Soit le cône de  $\mathbb{R}^{p+2}$ :

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}^+(1, 0, \dots, 0, 0) + \dots + \mathbb{R}^+(0, \dots, 0, 1, 0) + \mathbb{R}^+(0, \dots, 0, -1) = (\mathbb{R}^+)^{p+1} \times \mathbb{R}^- \quad (2.2.b)$$

On introduit l'application

$$\varphi_{\mathcal{C}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{R}^{p+2}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{R}^{p+2}) \\ x & \longmapsto & x + \mathcal{C} \end{array} \right. \quad (2.2.c)$$

On notera  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{R}^{p+2}]]$  le dioïde quotient de  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{p+2})$  par  $\varphi_{\mathcal{C}}$ , et  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{Z}^{p+2}]]$  le sous-dioïde quotient de  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^{p+2})$  par la même application.

Comme l'application support est un isomorphisme de  $\mathbb{B}[[\gamma_i, \delta]]$  sur  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^{p+2})$ , et que par ailleurs on a pour toutes séries  $s, s' \in \mathbb{B}[[\gamma_i, \delta]]$   $\varphi(s) = \varphi(s')$  si et seulement si  $\text{supps} + \mathcal{C} = \text{supps}' + \mathcal{C}$  (cf. (2.1.a)), on a l'isomorphisme induit:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_i, \delta]] & \simeq & \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{Z}^{p+2}]] \\ s & \mapsto & \text{supps} \end{array} \right. \quad (2.2.d)$$

Il nous reste à caractériser  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{Z}^{p+2}]]$ , et plus généralement,  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{R}^{p+2}]]$ .

**2.2.3 Lemme** *L'application  $\kappa$  définie par:*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{R}^{p+2}]] & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{R}^{p+2}) + \mathcal{C} \\ s & \longmapsto & \kappa(s) = s + \mathcal{C} \end{array} \right. \quad (2.2.e)$$

est un isomorphisme de dioïdes.

**Preuve** Le seul point non trivial est que  $\kappa(s \otimes s') = \kappa(s) \otimes \kappa(s')$ , soit  $\kappa(s + s') = \kappa(s) + \kappa(s')$ , ce qui résulte de  $\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$ . ■

Autrement dit, on peut identifier  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{R}^{p+2}]]$  au dioïde des parties de  $\mathbb{R}^{p+2}$  de la forme  $A + \mathcal{C}$ , muni de l'union et de la somme vectorielle. L'élément neutre de ce dioïde est la partie  $\mathcal{C}$ . On peut voir  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{Z}^{p+2}]]$  est le sous dioïde des parties de la forme  $A + \mathcal{C}$ , où  $A \subset \mathbb{Z}$ .

On composant (2.2.d) et 2.2.3, on obtient un nouvelle isomorphisme  $\iota$  qui nous permet de représenter une série formelle par une partie de  $\mathbb{R}^{p+2}$ :

$$\iota : \begin{cases} \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_i, \delta]] & \simeq \mathcal{P}(\mathbb{Z}^{p+2}) + \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^{p+2}) \\ s & \mapsto \iota(s) = \text{supp } s + \mathcal{C} \end{cases} \quad (2.2.f)$$

**2.2.4 Exemple** On a représenté sur la Figure IX.2 la partie  $\iota(p)$  de  $\mathbb{R}^3$  associée à  $p = \gamma_0\delta \oplus \gamma_1^2\delta \oplus \gamma_0^2\gamma_1^2\delta$ . On associe à chaque monôme  $m = \gamma_0^{n_0}\gamma_1^{n_1}\delta^t$  le cône  $\iota(m) = (n_0, n_1, t) + \mathcal{C}$  avec  $\mathcal{C} = (\mathbb{R}^+)^2 \times \mathbb{R}^-$ , et l'on prend l'union de ces cônes pour obtenir  $\iota(p)$ .

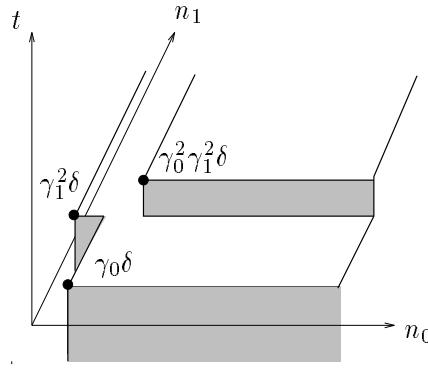


Figure IX.2: Représentation graphique de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_0, \gamma_1, \delta]$

**2.2.5 Remarque** L'introduction de  $\mathbb{R}^{p+2}$  au lieu de  $\mathbb{Z}^{p+2}$  est motivée par les deux points suivants: 1/ dans les applications, on a en général des puissances réelles et non entières de  $\gamma$  et  $\delta$ , 2/ on donnera dans la suite des règles de simplifications dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_i, \delta]]$ , qui feront appel à des projections sur certains cônes polyédriques, lesquelles ne s'écrivent que dans  $\mathbb{R}^{p+2}$  (ou à la rigueur dans  $\mathbb{Q}^{p+2}$ ).

### 2.3 Ressources et polynômes

Etant données des quantités fixées de ressources  $q_1, \dots, q_p \geq 0$ , on a un morphisme:

$$\phi_q : \begin{cases} \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_i, \delta]] & \longrightarrow \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]] \\ \gamma_0 & \longmapsto \gamma \\ \gamma_i & \longmapsto \gamma^{q_i} \end{cases} .$$

On pourra donc représenter chaque ressource par une nouvelle indéterminée  $\gamma_i$ . On pourra aussi identifier  $\gamma$  et  $\gamma_0$  (que l'on peut voir comme indéterminée associée à une ressource constante).

**2.3.1 Exemple** L'atelier flexible décrit en §1.1 se représente par le système d'équations suivants dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \delta]]$ :

$$x = Ax \oplus Bu, y = Cx$$

où

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma\delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \gamma_1\delta & \varepsilon \\ \delta^9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma_2\delta^{10} \\ \delta^9 & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^2 & \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^{10} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^7 & \delta & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^{10} \end{bmatrix}.$$

**2.3.2 Contre exemple**  $\phi_q$  n'est plus un morphisme de dioïdes si  $q$  n'est pas positif. Soit  $q = (q_1)$  avec  $q_1 = -2$ . On a  $e = e \oplus \gamma_1$  dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_0, \gamma_1, \delta]$  mais  $\phi_q(e) = e \neq \phi_q(e) \oplus \phi_q(\gamma_1) = e \oplus \gamma^{-2} = \gamma^{-2}$ .

D'où la restriction suivante.

**2.3.3 Hypothèse** *Dans la suite, on supposera que les ressources sont en quantités positives ou nulles, i.e.  $\forall i, q_i \geq 0$ .*

**2.3.4 Pente dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_i, \delta]$**  On définira la pente  $\sigma(s)$  d'une série  $s = \bigoplus_i \gamma_0^{n_0^i} \gamma_1^{n_1^i} \dots \gamma_p^{n_p^i} \delta^{t^i} \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_i, \delta]]$  à partir de la pente  $\sigma$  déjà définie dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  par

$$\sigma(s) = \sigma(\phi_q(s)) = \inf_{t_i > 0} \frac{n_0^i + n_1^i q_1^i + \dots + n_p^i q_p^i}{t^i}.$$

De la sorte, il est immédiat que  $\sigma(s)$  ne dépend pas du représentant  $\bigoplus_i \gamma_0^{n_0^i} \gamma_1^{n_1^i} \dots \gamma_p^{n_p^i} \delta^{t^i}$ . Il est clair que les propriétés prouvées en VII,5.4.3 pour la pente dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  s'étendent à  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_i, \delta]]$ .

**2.3.5 Taux de production dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_i, \delta]]$**  On a caractérisé en VII,6.6.1 le taux de production  $\lambda$  d'un système autonome représenté par une matrice  $A \in (\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta])^{n \times n}$  par

$$\lambda = \sigma\left(\bigoplus_c w_A(c)\right) \tag{2.3.a}$$

où la somme est prise sur l'ensemble des circuits du graphe, ou de manière équivalente, sur l'ensemble des circuits élémentaires. La formule (2.3.a) s'étend à une matrice  $A \in (\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_i, \delta])^{n \times n}$  à condition de définir la pente  $\sigma$  comme en 2.3.4.

**2.3.6 Exemple** Soit le système décrit par la matrice suivante à coefficients dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \gamma_1, \delta]$ :

$$A = \begin{bmatrix} \gamma\delta & \gamma_1 \\ \gamma\delta^{10} & \gamma^3\delta^3 \end{bmatrix}$$

On a en appliquant (2.3.a) l'expression suivante du taux de production en fonction de la quantité  $q_1$ :

$$\lambda(q_1) = \min\left(\frac{1}{1}, \frac{3}{3}, \frac{q_1 + 1}{10}\right), \tag{2.3.b}$$

où les 3 termes du min correspondent respectivement aux circuits (1), (2) et (12).

A posteriori, l'introduction du quotient par  $\varphi_{\mathcal{C}}$  (cf. (2.2.c)) est justifiée par le résultat suivant:

**2.3.7 Proposition** Soit  $\mathcal{R}$  une congruence sur  $\mathcal{P}((\mathbb{R}^+)^{p+2})$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $a\mathcal{R}b \Rightarrow \sigma(a) = \sigma(b)$
- (ii)  $a\mathcal{R}b \Rightarrow a + \mathcal{C} = b + \mathcal{C}$

C'est dire que la congruence associée au cône  $\mathcal{C}$  est la plus grossière des congruences définie sur le sous dioïde des séries *causales*<sup>1</sup>, et compatibles avec la pente  $\sigma$ . En ce sens, le dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{R}^{p+2}]] = \mathcal{P}(\mathbb{R}^{p+2})/\varphi_{\mathcal{C}}$  est “optimal”.

Le sens (ii) $\Rightarrow$ (i) de 2.3.7 est clair. Le sens (i) $\Rightarrow$ (ii) est une conséquence du Lemme suivant:

**2.3.8 Lemme** Soient  $x$  et  $y$  deux parties finies de  $(\mathbb{R}^+)^{p+2}$ . Si pour toute partie finie  $u$  de  $(\mathbb{R}^+)^{p+2}$ ,  $\sigma(x \otimes u) \preceq \sigma(y \otimes u)$  alors  $x \subset y + \mathcal{C}$ .

En effet, si  $a\mathcal{R}b$ , on a pour tout  $u$ ,  $a\mathcal{R}bu$ , et donc 2.3.7.(i) entraîne  $\sigma(au) = \sigma(bu)$ , d'où par 2.3.8  $a \subset b + \mathcal{C}$ , et on rajoutant  $\mathcal{C}$ ,  $a + \mathcal{C} \subset b + \mathcal{C} + \mathcal{C} = b + \mathcal{C}$ . Par symétrie, on obtient 2.3.7.(ii).

**Preuve** de 2.3.8. Nous le montrons dans le cas de  $(\mathbb{R}^+)^2$ . Le lecteur généralisera aux dimensions supérieures. Par additivité de  $\sigma$ , on peut supposer  $x$  réduit à un point,  $x = \{(n, t)\}$ . Soit  $y = \{(n_i, t_i)\}_{i \in I}$ . On choisit  $u = \{(N, T)\}$ . La condition  $\forall u \subset (\mathbb{R}^+)^{p+2}, \sigma(x \otimes u) \preceq \sigma(y \otimes u)$  se réécrit:

$$\forall N, T \geq 0, \quad \frac{n + N}{t + T} \geq \inf_i \frac{n_i + N}{t_i + T} ,$$

d'où

$$\forall N, T \geq 0, \quad \exists i, \quad \frac{n + N}{t + T} \geq \frac{n_i + N}{t_i + T} ,$$

i.e.

$$\forall N, T \geq 0, \quad \exists i, \quad nt_i - n_i t \geq N(t_i - t) + T(n - n_i) .$$

Comme  $N$  et  $T$  peuvent être arbitrairement grands, cela n'est possible que si  $\exists i, t_i - t \leq 0$  et  $n - n_i \leq 0$ , i.e.  $(n, t) \in (n_i, t_i) + \mathcal{C} \subset b + \mathcal{C}$ . ■

### 3 Enumération des contraintes

Nous donnons maintenant des algorithmes algébriques pour énumérer les circuits de matrices à coefficients dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_i, \delta]$ .

#### 3.1 Chemins élémentaires

Dans la suite, on raisonnera dans le dioïde complet commutatif libre engendré par les lettres  $a_{ij}$ , i.e.  $\mathbb{B}[[a_{ij}]]$ . Rappelons quelques définitions: on considère le graphe à  $n$  sommets et  $n^2$  arcs  $(ij)$ , l'arc  $(ji)$  étant repéré par la lettre  $a_{ij}$ . On a défini en 0.4.2.2 un chemin de longueur  $k$  de  $j$  à  $i$  comme un mot de la forme  $p_{ij} = a_{ii_2} \dots a_{i_{k-1}j}$ . Un circuit est un chemin tel que  $i = j$ . Nous aurons besoin en outre des deux notions suivantes:

---

<sup>1</sup>i.e. à support dans  $(\mathbb{R}^+)^{p+2}$

1/ notion classique de chemin et circuit élémentaire: un chemin  $a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{k-1} i_k}$  est élémentaire si les  $i_l$  sont distincts. Un circuit  $a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1}$  est élémentaire si  $i_1, \dots, i_{k-1}$  sont distincts.

2/ chemin sans circuit: nous dirons que  $p_{ij}$  est *sans circuits* s'il ne se factorise pas sous la forme  $p_{ij} = p'_{ij}c$ , où  $p'_{ij}$  est un chemin de  $j$  à  $i$  et  $c$  un circuit non trivial. Le seul chemin sans circuits de  $i$  à  $i$  est donc le mot vide  $e$ . Un chemin sans circuits  $p_{ij}$  est élémentaire. La réciproque est vraie si  $i \neq j$ .

Ces arguties viennent du fait que la définition standard de circuit élémentaire rappelée ci-dessus n'est pas compatible avec celle de chemin élémentaire: un circuit élémentaire passant par  $i$  n'est pas un chemin élémentaire de  $i$  à  $i$  (car  $i_1 = i_k$ )! D'où l'utilité de la notion 2.

Nous considérons à nouveau la matrice générique d'ordre  $n$ ,  $\mathfrak{A}_n = (a_{ij})$  (cf. 0, §4.2).

**3.1.1 Définition (Matrices des chemins élémentaires)** On note  $\mathfrak{A}_n^{\text{el}}$  (resp.  $\mathfrak{A}_n^{\text{sc}}$ ) la matrice dont le coefficient  $ij$  est égal à la somme des chemins élémentaires de  $j$  à  $i$  (resp. des chemins sans circuits). On notera  $\pi(\mathfrak{A}_n)$  la somme des circuits élémentaires, i.e.

$$\pi(\mathfrak{A}_n) = \text{tr}(\mathfrak{A}_n^{\text{el}}) .$$

On a donc  $(\mathfrak{A}_n^{\text{el}})_{ij} = (\mathfrak{A}_n^{\text{sc}})_{ij}$  si  $i \neq j$  et  $(\mathfrak{A}_n^{\text{sc}})_{ii} = e$ . On étendra ces notations à un dioïde quelconque par morphisme:  $A_{ij}^{\text{el}}$  désigne la somme des poids des chemins élémentaires de  $j$  à  $i$ .

Les propriétés suivantes sont immédiates:

### 3.1.2 Propriétés On a

- (i)  $\pi(A \oplus B) \succeq \pi(A) \oplus \pi(B)$
- (ii) Si  $D$  est diagonale,  $\pi(D \oplus A') = \text{tr}(D) \oplus \pi(A')$
- (iii)  $\pi(A^k) \preceq \pi(A)$
- (iv)  $\pi(A) \preceq \pi(A^*) \preceq (\pi(A))^*$

**3.1.3 Exemple** On a  $\mathfrak{A}_1^{\text{el}} = (a_{11})$ ,  $\mathfrak{A}_1^{\text{sc}} = (e)$ ,

$$\mathfrak{A}_2^{\text{el}} = \begin{bmatrix} a_{11} \oplus a_{12}a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \oplus a_{21}a_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{A}_2^{\text{sc}} = \begin{bmatrix} e & a_{12} \\ a_{21} & e \end{bmatrix}, \quad \pi(\mathfrak{A}_2) = a_{11} \oplus a_{22} \oplus a_{12}a_{21} ,$$

$$\mathfrak{A}_3^{\text{el}} = \begin{bmatrix} a_{11} \oplus a_{12}a_{21} \oplus a_{13}a_{31} & a_{12} \oplus a_{13}a_{32} & a_{13} \oplus a_{12}a_{23} \\ \oplus a_{12}a_{23}a_{31} \oplus a_{13}a_{32}a_{21} & & \\ a_{21} \oplus a_{23}a_{32} & a_{22} \oplus a_{21}a_{12} \oplus a_{23}a_{32} & a_{23} \oplus a_{21}a_{13} \\ & \oplus a_{23}a_{31}a_{12} \oplus a_{21}a_{13}a_{31} & \\ a_{31} \oplus a_{32}a_{21} & a_{32} \oplus a_{31}a_{12} & a_{33} \oplus a_{31}a_{13} \oplus a_{32}a_{23} \\ & & \oplus a_{12}a_{23}a_{31} \oplus a_{13}a_{32}a_{21} \end{bmatrix}$$

$$\pi(\mathfrak{A}_3^{\text{el}}) = a_{11} \oplus a_{22} \oplus a_{33} \oplus a_{12}a_{21} \oplus a_{13}a_{31} \oplus a_{23}a_{32} \oplus a_{12}a_{23}a_{31} \oplus a_{13}a_{32}a_{21} .$$

Dans la pratique, on n'a pas de moyen peu coûteux d'obtenir  $\mathfrak{A}^{\text{el}}$  ou  $\pi(\mathfrak{A})$ . Nous introduisons une notion plus générale de matrice "approchant"  $\mathfrak{A}^{\text{el}}$ .

**3.1.4 Définition (Matrices énumérantes)** On dit que la matrice  $\mathfrak{E}$  énumère les chemins si

$$\mathfrak{A}^{\text{sc}} \preceq \mathfrak{E} \preceq \mathfrak{A}^+ .$$

On dit que la matrice  $\mathfrak{E}$  énumère les circuits si

$$\text{diag}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{e}^\dagger}) \preceq \text{diag}(\mathfrak{E}) \preceq \text{diag}(\mathfrak{A}^+) .$$

On dit que le polynôme  $\mathfrak{e}$  énumère les circuits si  $\pi(\mathfrak{A}) \preceq \mathfrak{e} \preceq \pi(\mathfrak{A})^+$ .

**3.1.5 Proposition** Soit un système autonome de matrice  $A \in (\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_i, \delta])^{n \times n}$ . On a, pour tout polynôme  $\mathfrak{e}$  énumérant les circuits:

$$\lambda = \sigma(\psi_A(\mathfrak{e}))$$

où  $\psi_A(\mathfrak{e})$  désigne le polynôme obtenu en donnant à la lettre  $a_{ij}$  la valeur  $A_{ij}$  dans l'expression de  $\mathfrak{e}$ .

**Preuve** On a par monotonie  $\psi_A(\pi(\mathfrak{A})) \preceq \psi_A(\mathfrak{e}) \preceq \psi_A(\pi(\mathfrak{A})^*)$ , d'où en utilisant la propriété de morphisme de  $\psi_A$ , la monotonie de la pente, et le fait que  $\sigma(b^*) = \sigma(b)$ :  $\lambda = \sigma(\pi(A)) \preceq \sigma(\psi_A(\mathfrak{e})) \preceq \sigma((\pi(A))^*) = \lambda$ . ■

Le calcul du taux de production de ramène de la sorte au calcul de polynômes énumérants. Par exemple, les matrices

$$\text{Id} \oplus \mathfrak{A} \oplus \dots \oplus \mathfrak{A}^n, \quad (\text{Id} \oplus \mathfrak{A}_n)^{2^k} \text{ avec } 2^k \geq n$$

énumèrent trivialement chemins et circuits. Les traces de ces matrices énumèrent donc les circuits. On a l'algorithme suivant, adapté de Gondran et Minoux [47], Chapitre 3, Algorithme 3':

**3.1.6 Algorithme** Définissons la suite de matrices  $A^{(i)}$  par

$$A^{(0)} = \mathfrak{A}_n \\ A_{ij}^{(k)} = \begin{cases} A_{ij}^{(k-1)} \oplus A_{ik}^{(k-1)} A_{kj}^{(k-1)} & \text{si } i \neq k \text{ et } j \neq k \\ A_{ij}^{(k-1)} & \text{si } i = k \text{ ou } j = k. \end{cases}$$

La matrice  $A^{(n)}$  est énumérante.

**Preuve** Introduisons les règles de simplification suivantes:

$$wc \rightarrow \varepsilon \tag{3.1.a}$$

où  $w$  est un mot non vide quelconque et  $c$  est un circuit quelconque. Il est clair qu'un chemin est irréductiblessi il ne se réduit pas modulo ces règles, et qu'en réduisant un polynôme quelconque, on ne perd pas de chemins irréductibles. On a montré en 0.4.2.1 que la récurrence  $A_{ij}^{(k)} = A_{ij}^{(k-1)} \oplus A_{ik}^{(k-1)}(A_{kk}^{(k-1)})^* A_{kj}^{(k-1)}$  énumérait tous les circuits (y compris non élémentaires). En appliquant les règles de simplifications ci-dessus, on a si  $i, j \neq k$   $A_{ik}^{(k-1)}(A_{kk}^{(k-1)})^* A_{kj}^{(k-1)} = A_{ik}^{(k-1)} A_{kj}^{(k-1)}$ . Si par exemple  $i = k$ , on a,  $A_{kj}^{(k-1)} \oplus A_{kk}^{(k-1)}(A_{kk}^{(k-1)})^* A_{kj}^{(k-1)} = A_{kj}^{(k-1)} \oplus A_{kj}^{(k-1)} = A_{kj}^{(k-1)}$ . Cela montre 3.1.6. ■

Si l'on ne vise que le calcul de  $\pi(\mathfrak{A})$ , on a un peu mieux. Précisément, on adapte l'élimination par blocs aux matrices énumérantes:

**3.1.7 Proposition** Soit une partition  $\{1, \dots, n\} = I \cup J$ . Pour toute matrice  $\mathfrak{E}_{[I|I]}$  énumérant les chemins de  $\mathfrak{A}_{[I|I]}$ , le polynôme

$$c = \pi(\mathfrak{A}_{[I|I]}) \oplus \pi(\mathfrak{A}_{[J|J]} \oplus \mathfrak{A}_{[J|I]} \mathfrak{E}_{[I|I]} \mathfrak{A}_{[I|J]})$$

énumère les circuits.

**Preuve** L'élément  $(kl)$  de  $\mathfrak{A}_{[J|J]} \oplus \mathfrak{A}_{[J|I]} \mathfrak{E}_{[I|I]} \mathfrak{A}_{[I|J]}$  est un chemin de  $l$  à  $k$ . On a ainsi  $\mathfrak{A}_{[J|J]} \oplus \mathfrak{A}_{[J|I]} \mathfrak{E}_{[I|I]} \mathfrak{A}_{[I|J]} \preceq (\mathfrak{A}^+)^{[J|J]}$ , et donc  $c \preceq \text{tr}(\mathfrak{A}^+)$ . D'autre part, un circuit élémentaire  $c_0$  est compté dans  $\pi(A_{[I|I]})$  s'il ne passe par aucun sommet de  $J$ . Sinon, on peut factoriser  $c_0$  sous forme produit de chemins élémentaires de la forme  $p_{uv}$  où  $u, v \in J$  ou  $p_{jk} p_{kl} p_{lr}$  avec  $j, r \in J$ ,  $k, l \in I$ . Ce produit est compté dans  $\pi(\mathfrak{A}_{[J|J]} \oplus \mathfrak{A}_{[J|I]} \mathfrak{E}_{[I|I]} \mathfrak{A}_{[I|J]})$ . D'où  $\pi(\mathfrak{A}) \preceq c$ . ■

**3.1.8 Remarque** On reconnaît en 3.1.7 l'analogie de

$$\det A = \det A_{[I|I]} \det(A_{[J|J]} - A_{[J|I]} A_{[I|I]}^{-1} A_{[I|J]}) .$$

**3.1.9 Algorithme** Définissons les matrices  $A^{(i)}$  et les scalaires  $\pi^{(i)}$  de la manière suivante:

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= \mathfrak{A} & \pi^{(0)} &= \text{tr} \mathfrak{A} \\ A_{ij}^{(k)} &= A_{ij}^{(k-1)} \oplus A_{ik}^{(k-1)} A_{kj}^{(k-1)} & \text{pour } i \neq j \text{ et } i, j > k \\ A_{ii}^{(k)} &= A_{ik}^{(k-1)} A_{ki}^{(k-1)} \\ \pi^{(k)} &= \pi^{(k-1)} \oplus \text{tr} A_{[k+1 \dots n | k+1 \dots n]}^{(k)} \end{aligned}$$

Le polynôme  $\pi^{(n-1)}$  énumère les circuits.

Si l'on effectue les calculs dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_i, \delta]$ , on aura donc à l'issue de l'algorithme

$$\lambda = \sigma(\pi^{(n-1)}) .$$

On observe que l'algorithme ne modifie que des sous matrices emboîtées de taille décroissante  $n - 1, \dots, 2, 1$ . On a ici l'analogie du calcul du déterminant en triangularisant la matrice par l'algorithme de Gauss.

**Preuve** Résulte d'une part 3.1.2,(ii) en prenant  $D = \text{diag}(A)$  et  $A'_{ij} = A_{ij}$  en dehors de la diagonale et  $\varepsilon$  sinon, et d'autre part de l'application répétée l'élimination par bloc donnée en 3.1.7 avec le pivot d'ordre 1  $\mathfrak{E} = e$ . ■

**3.1.10 Exemple** Pour la matrice  $A$  de l'exemple 2.3.6, on obtient

$$\pi_0 = \gamma \delta \oplus \gamma^3 \delta^3, \quad a^{(1)} = \begin{bmatrix} \gamma \delta & \gamma_1 \\ \gamma \delta^{10} & \gamma \delta^{10} \gamma_1 \end{bmatrix},$$

$$\pi_1 = \pi_0 \oplus a_{22}^{(1)} = \gamma \delta \oplus \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma \delta^{10} \gamma_1 , \tag{3.1.b}$$

ce qui donne le même résultat que (2.3.b).

**3.1.11 Lien avec le rayon spectral en représentation compteur** On a vu en VII,6.6 que le taux de production du système autonome s'écrivant  $x(n+1) = A''x(n)$  est donné par  $\rho(A'')$ . En outre, en identifiant  $\delta^t \simeq t$ , on passe de la matrice  $A''$  représentant le système dans  $\mathbb{R}_{\min}$  à une matrice  $A$  représentant le système dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$  en posant  $A = \gamma A'$ . Comme  $\rho(A)$  est le plus grand “coin” du polynôme caractéristique de  $A''$  (cf. Cunningham Greene, [25]), on s'attend à trouver un lien entre le calcul d'un polynôme énumérant les circuits de  $A$  et le calcul du polynôme caractéristique de  $A''$ . De manière précise, on a:

**3.1.12 Théorème** *Le polynôme  $\text{perm}(\text{Id} \oplus A)$  énumère les circuits.*

Comme d'après ce qui précède,  $\text{perm}(\text{Id} \oplus A) = \text{perm}(\text{Id} \oplus \gamma A'')$ , l'analogie avec le polynôme caractéristique usuel est complète.

**Preuve** de 3.1.12. On a pour une permutation  $\sigma$  fixant l'ensemble  $J$  et décomposée en produit de cycles non triviaux, soit  $\sigma = c_1 \dots c_k$ :

$$\bigotimes_i (\text{Id} \oplus A)_{i\sigma(i)} = w_A(c_1) \otimes \dots \otimes w_A(c_k) \otimes \bigotimes_{j \in J} (e \oplus A_{jj}) , \quad (3.1.c)$$

et donc  $\text{perm}(\text{Id} \oplus A) \preceq (\pi(A))^*$ . D'autre part, si  $\sigma$  admet le seul cycle non trivial  $c$ , on a, d'après (3.1.c),  $\bigotimes_i A_{i\sigma(i)} \succeq w_A(c)$ , d'où il résulte en sommant sur tous les cycles élémentaires  $c$  que  $\text{perm}(\text{Id} \oplus A) \succeq \pi(A)$ . ■

Nous calculons en passant le nombre de termes de  $\pi(\mathfrak{A}_n)$ , qui servira à estimer la complexité de la méthode.

**3.1.13 Dénombrement des circuits élémentaires** Le nombre  $\mathbf{nc}(n, p)$  de circuits élémentaires commutatifs de longueur  $p$  associés à la matrice  $\mathfrak{A}_n$  vaut:

$$\mathbf{nc}(n, p) = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p}$$

(un circuit élémentaire de longueur  $p$  est donné par une partie à  $p$  éléments de  $\{1, \dots, n\}$  ainsi qu'un ordre sur  $p-1$  de ces éléments, soit  $\mathbf{nc}(n, p) = C_n^p \times (p-1)!$ ). Le nombre  $\mathbf{nc}(n)$  de circuits élémentaires vaut donc:

$$\begin{aligned} \mathbf{nc}(n) &= \sum_{p=1}^n \mathbf{nc}(n, p) = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \dots \\ &\quad + \frac{n(n-1) \times \dots \times 2}{n-1} + \frac{n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1}{n} \\ &= (\dots + \frac{n}{(n-2)2!} + \frac{n}{(n-1)1!} + \frac{1}{0!})(n-1)! \end{aligned}$$

soit

$$\mathbf{nc}(n) \simeq e \cdot (n-1)! \quad (3.1.d)$$

( $e = 2.7182818 \dots$ ). On les premières valeurs suivantes:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbf{nc}(n)$	1	3	8	24	89	415	2372	16072	125673	1112083

**3.1.14 Application** En appliquant l'algorithme 3.1.9 à la matrice  $A$  représentant l'atelier flexible décrit en 2.3.1, on trouve le polynôme suivant énumérant les circuits:

$$c = \delta^{11}\gamma \oplus \delta^{12}\gamma_1 \oplus \delta^{19}\gamma_2 \oplus \delta^{29}\gamma\gamma_1 \oplus \delta^{30}\gamma\gamma_2 \oplus \delta^{33}\gamma^2\gamma_2 \oplus \delta^{40}\gamma^2\gamma_1 \oplus \delta^{42}\gamma\gamma_1\gamma_2 \oplus \delta^{53}\gamma^2\gamma_1\gamma_2 \oplus \delta^{62}\gamma^3\gamma_1\gamma_2 ,$$

soit une somme de 10 termes. On obtient donc le taux de production comme min des 10 formes affines suivantes:

$$\lambda(q) = \min(1/11, \frac{q_1}{12}, \frac{q_2}{19}, 1/29 + \frac{q_1}{29}, 1/30 + \frac{q_2}{30}, \frac{2}{33} + \frac{q_2}{33}, 1/20 + \frac{q_1}{40}, 1/42 + \frac{q_1}{42} + \frac{q_2}{42}, \frac{2}{53} + \frac{q_1}{53} + \frac{q_2}{53}, \frac{3}{62} + \frac{q_1}{62} + \frac{q_2}{62})$$

On observe que l'écriture ci-dessus n'est pas minimale, i.e. que l'on peut retirer certaines formes affines sans changer la valeur de  $\lambda(q)$ . Par exemple, considérons les deux sous expressions:

$$u = \min(\frac{1}{11}, \frac{1}{29} + \frac{1}{29}q_1), \quad v = \frac{1}{20} + \frac{q_1}{40} .$$

On vérifie aisément que pour toute valeur positive ou nulle de  $q_1$ , on a  $v \geq u$ . On aurait ainsi pu retirer  $v$  de l'expression de  $\lambda$ .

On a une difficulté analogue en calculant le permanent comme en 3.1.12. On obtient alors le polynôme:

$$\text{perm}(\text{Id} \oplus A) = e \oplus \delta^4\gamma_3 \oplus \delta^{12}\gamma_1 \oplus \delta^{12}\gamma \oplus \delta^{16}\gamma_1\gamma_3 \oplus \delta^{19}\gamma_2 \oplus \delta^{23}\gamma_2\gamma_3 \oplus \delta^{24}\gamma^2 \oplus \delta^{30}\gamma_1\gamma \oplus \delta^{30}\gamma\gamma_3 \oplus \delta^{31}\gamma_1\gamma_2 \oplus \delta^{31}\gamma\gamma_2 \oplus \delta^{35}\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \oplus \delta^{35}\gamma_2\gamma_3 \oplus \delta^{35}\gamma_1\gamma_2 \oplus \delta^{35}\gamma\gamma_1\gamma_3 \oplus \delta^{35}\gamma^3 \oplus \delta^{35}\gamma^2\gamma_2 \oplus \delta^{35}\gamma^2\gamma_3 \oplus \delta^{35}\gamma^2\gamma_1$$

Ici encore, certains monômes sont redondants. Le fait que les algorithmes d'énumération 3.1.9 et 3.1.12 produisent des termes redondants conduisent à un accroissement "combinatoire" de la taille des données, ce qui rend ces algorithmes inefficaces pour des systèmes de taille plus importante. Il est donc naturel de chercher les règles permettant de simplifier les calculs intermédiaires. Nous montrons dans la section suivante que l'introduction de certaines congruences permet d'obtenir l'expression minimale de  $\lambda(q)$ .

## 3.2 Congruences polyédriques en dimension 2

Nous commençons par donner les règles de simplification valables "en dimension 2", i.e. dans le dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ , lorsqu'il s'agit de calculer le taux de production d'un système sans ressources inconnues. On verra que ces règles se généralisent aisément au cas d'un nombre quelconque de ressources.

On montre sur un exemple comment le fait d'avoir énuméré certains circuits permet de simplifier les calculs. On donnera ensuite les règles de simplifications générales dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ .

**3.2.1 Exemple** On considère une matrice  $A$  à coefficients dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ . On suppose qu'à une certaine étape  $k$  de l'algorithme de Gauss 3.1.9, on a un certain coefficient de  $A^{(k)}$ ,  $A_{ij}^{(k)} = e \oplus \gamma^2\delta^2$  et que par ailleurs, on a énuméré le circuit  $c = \gamma\delta^3$ . Le polynôme  $C$  donnant les circuits énumérés à l'issue de l'algorithme pourra s'écrire

$$C = c \oplus uA_{ij}^{(k)} \oplus v \tag{3.2.a}$$

où  $u$  et  $v$  sont des polynômes. On a

$$\sigma(C) = \min(\sigma(c), \sigma(uA_{ij}^{(k)}), \sigma(v)) . \tag{3.2.b}$$

Supposons, pour fixer les idées, que  $u$  est un monôme, soit  $u = \gamma^n\delta^t$ . On a alors

$$\sigma(uA^{(k)}) = \min(\sigma(e\gamma^n\delta^t), \sigma(\gamma^2\delta^2\gamma^n\delta^t)) .$$

De deux choses l'une: soit  $\sigma(\gamma^n \delta^t) < \sigma(c)$ , auquel cas  $\sigma(\gamma^n \delta^t \gamma^2 \delta^2) > \sigma(\gamma^n \delta^t)$  (cf. VII,5.4.3), soit  $\sigma(\gamma^n \delta^t) \geq \sigma(c)$ , auquel cas le terme  $\sigma(u A_{ij}^{(k)})$  ne modifie pas le min à droite de 3.2.b. Dans les deux cas, on aurait pu remplacer  $A_{ij}^{(k)} = e \oplus \gamma^2 \delta^2$  par  $A_{ij}^{(k)} = e$  sans modifier la valeur finale de  $C$ .

Nous généralisons maintenant cette remarque.

Soit  $c = \{c_1, \dots, c_k\}$  un ensemble de  $k$  vecteurs de  $(\mathbb{R}^+)^2$ . On pose

$$\mathcal{C}_c = \mathbb{R}^+ c_1 + \dots + \mathbb{R}^+ c_k .$$

**3.2.2 Définition** On appelle congruence polyédrique modulo  $c$  la relation  $\mathcal{R}_c$  définie comme suit dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{R}^2]]$ :

$$x \mathcal{R}_c y \Leftrightarrow x + \mathcal{C}_c = y + \mathcal{C}_c .$$

On étend la définition de  $\mathcal{R}_c$  à  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  par isomorphisme. En posant

$$\varphi_c(x) = x + \mathcal{C}_c , \quad (3.2.c)$$

on observe que  $\varphi_c$  vérifie les propriétés B,1.2.8. La relation  $\mathcal{R}_c$  est donc une *bonne congruence*. Ici encore, on peut donner une interprétation géométrique simple des classes d'équivalence modulo  $\mathcal{C}_c$ .

**3.2.3 Lemme** Soient  $x, y$  deux ensembles de points de  $(\mathbb{R}^+)^2$ . Les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $\overline{x} \mathcal{R}_c \overline{y}$  dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{R}^2]]$
- (ii)  $x + \mathcal{C} + \mathcal{C}_c = y + \mathcal{C} + \mathcal{C}_c$  dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ .

$\mathcal{C}$  est ici le cône servant à définir  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ , donné en 2.2.2.

**Preuve** Résulte de ce que  $x + \mathcal{C}$  est un représentant de  $\overline{x}$  et  $y + \mathcal{C}$  est un représentant de  $\overline{y}$  dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{R}^2]]$ . ■

On introduisant  $\Psi_c(x) = x + \mathcal{C} + \mathcal{C}_c$ , on a ainsi le diagramme commutatif suivant, où les flèches sont des projections canoniques:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{R}^2]] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)/\Psi_c \simeq & & \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\mathbb{R}^2]]/\varphi_c \end{array}$$

On en déduit alors l'analogue du Lemme 2.2.3.

**3.2.4 Lemme** L'application  $\iota_c$  définie par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]/\mathcal{R}_c & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2) + \mathcal{C} + \mathcal{C}_c \\ s & \longmapsto & \iota(s) = \text{supp } s + \mathcal{C} + \mathcal{C}_c \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de dioïdes.

**3.2.5 Exemple** On a représenté sur la Figure IX.3 le polynôme  $p = e \oplus \gamma \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^4 \oplus \gamma^7 \delta^5$  (cercles et carrés noirs), et son représentant minimal modulo  $\mathcal{R}_{\gamma^2 \delta}$ ,  $p_0 = e \oplus \gamma \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^4$  (cercles noirs exclusivement). La partie  $\iota_c(p)$  est représentée en grisé. Le représentant minimal  $p_0$  est formé des point extrémaux de cette partie.

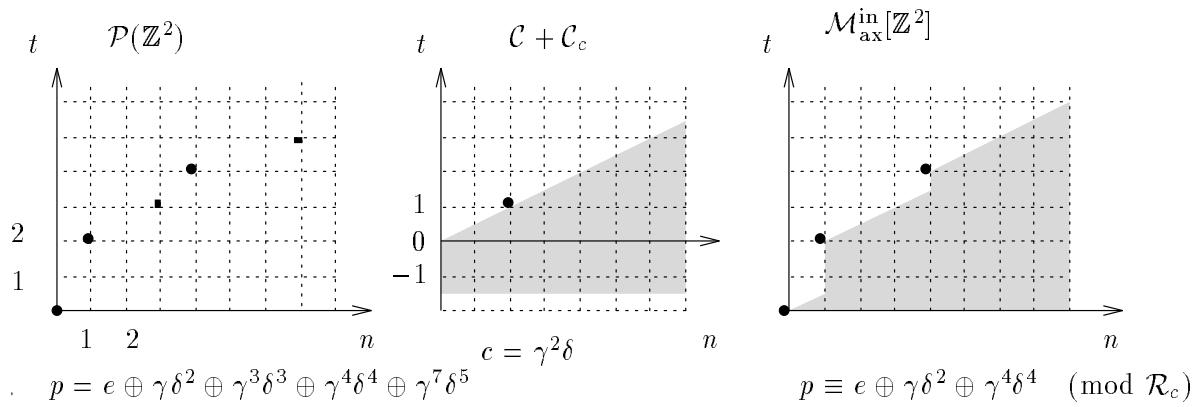


Figure IX.3: Congruence polyédrique en dimension 2

Via B,§1.2 le calcul effectif dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\mathbb{R}^2]$  se réduit à l'examen de la relation de redondance suivante pour des points de  $\mathbb{R}^2$ :

$$x \leq_{\Phi_c} y \Leftrightarrow x \in y + \mathcal{C} + \mathcal{C}_c . \quad (3.2.d)$$

### 3.2.6 Lemme On a

$$(t', n') \leq_{\Phi_c} (t, n) \Leftrightarrow n' \geq n \text{ et } \frac{n' - n}{t' - t} \geq \sigma(c) = \min_j \frac{\nu_j}{\tau_j} . \quad (3.2.e)$$

**Preuve** de 3.2.6. On vérifie par un calcul immédiat que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_c + \mathcal{C} &= (\tau_1, \nu_1)\mathbb{R}^+ + \dots + (\tau_r, \nu_r)\mathbb{R}^+ + (-1, 0)\mathbb{R}^+ + (0, 1)\mathbb{R}^+ \\ &= (1, \sigma(c)) + (-1, 0)\mathbb{R}^+ + (0, 1)\mathbb{R}^+ . \end{aligned} \quad (3.2.f)$$

Ainsi, via 3.2.3,(ii) la congruence associée à  $c$  coïncide avec la congruence associée au seul monôme  $(\sigma(c), 1)$ . Supposons  $\sigma(c) > 0$  (sinon le résultat est trivial). On a

$$(0, 1) = \sigma(c)^{-1}(-1, 0) + \sigma(c)^{-1}(1, \sigma(c)) ,$$

et donc:

$$\mathcal{C}_c + \mathcal{C} = (1, \sigma(c))\mathbb{R}^+ + (-1, 0)\mathbb{R}^+ .$$

Ainsi, on a  $(t', n') \leq_{\Phi_c} (t, n')$ ssi  $\{(t, n')\} \subset \{(t, n)\} + \mathcal{C} + \mathcal{C}_c = \{(t, n)\} + (1, \sigma(c))\mathbb{R}^+ + (-1, 0)\mathbb{R}^+$ . La condition (3.2.e) en résulte. ■

On a comme conséquence immédiate de 3.2.6 une caractérisation des formes minimales modulo  $\mathcal{R}_c$ .

**3.2.7 Corollaire** Le polynôme  $p$  écrit sous forme canonique dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ ,  $p = \gamma^{n_1}\delta^{t_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{n_k}\delta^{t_k}$  est minimal modulo  $\mathcal{R}_c$ ssi

$$\forall j > i, \quad \sigma(\gamma^{n_j}\delta^{t_j}\gamma^{-n_i}\delta^{-t_i}) < \sigma(c) .$$

Autrement dit, les pentes entre deux monômes quelconques de  $p$  doivent être inférieures à la pente de  $c$ .

On notera dans la suite  $\oplus$  le min des pentes.

**3.2.8 Lemme** Supposons  $\pi(A) = \pi(A) \oplus c$ . Pour toute matrice  $A'$  congruente<sup>2</sup> à  $A$  modulo  $\mathcal{R}_c$ , on a  $\sigma(\pi(A')) \oplus \sigma(c) = \sigma(\pi(A))$ .

Le résultat central de ce chapitre en découle immédiatement:

**3.2.9 Théorème** Chaque pas de l'algorithme de Gauss peut s'effectuer modulo la congruence polyédrique associée aux circuits énumérés auparavant.

Par exemple, on pourra effectuer l'algorithme 3.1.9 dans la chaîne suivante de dioïdes:

$$\begin{array}{cc} \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]/\mathcal{R}_{\text{tr}(A)} & \text{étape 0} \\ \downarrow & \\ \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]/\mathcal{R}_{\pi^{(1)}} & \text{étape 1} \\ \downarrow & \\ \vdots & \\ \downarrow & \\ \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]/\mathcal{R}_{\pi^{(n-2)}} & \text{étape } n-1. \end{array}$$

**Preuve** du lemme 3.2.8. La remarque suivante immédiate est la clé du résultat:

**3.2.10 Lemme** Pour tous points  $a$  et  $b$ , pour tous  $s, r \geq 0$ ,

$$\sigma(a^s b^r) \preceq \sigma(a) \oplus \sigma(b).$$

Avec les notations usuelles, c'est dire que  $\sigma(s.a + r.b) \geq \min(\sigma(a), \sigma(b))$ .

**Preuve** Analogue à VII,5.4.3, compte tenu de  $\sigma(a^s) = \sigma(a)$  et  $\sigma(b^t) = \sigma(b)$ . ■

Nous allons montrer que (i):  $A' \preceq \varphi_c(A) \Rightarrow \sigma(w(A')) \oplus \sigma(c) \preceq \sigma(w(A))$  et (ii):  $A \preceq \varphi_c(A') \Rightarrow \sigma(w(A)) \preceq \sigma(w(A')) \oplus \sigma(c)$ . La conclusion en résultera. Avec les notations du dioïde, on a si  $c = \{c_1, \dots, c_k\}$ :

$$\varphi_c(x) = x + \mathcal{C} = x \otimes c = x c_1^{\mathbb{R}^+} \dots c_k^{\mathbb{R}^+}. \quad (3.2.g)$$

(i): Supposons  $A' \preceq \varphi_c(A)$ . Soit  $\alpha = (i_1, \dots, i_m)$  un circuit (on convient que  $i_{m+1} = i_1$ ). On a donc  $A'_{i_v i_{v+1}} \preceq \varphi_c(A_{i_v i_{v+1}})$  d'où en prenant le produit pour  $v = 1 \dots m$  et en utilisant la propriété de morphisme de  $\varphi_c$ :  $w_{A'}(\alpha) \preceq \varphi_c(w_A(\alpha))$ . Nous supposons que  $w_{A'}(\alpha)$  est un singleton, le cas général s'en déduisant par additivité. On a donc  $w_{A'}(\alpha) \preceq w_A(\alpha) c_1^{s_1} \dots c_\ell^{s_\ell}$  pour un certain  $s \in (\mathbb{R}^+)^k$ . D'où

$$\sigma(w_{A'}(\alpha)) \preceq \sigma(w_A(\alpha) c_1^{s_1} \dots c_\ell^{s_\ell}).$$

En rajoutant  $\sigma(c)$  de part et d'autre et en utilisant 3.2.10,

$$\sigma(w_{A'}(\alpha)) \oplus \sigma(c) \preceq \sigma(w_A(\alpha)) \oplus \sigma(c).$$

En sommant sur tous les circuits  $\alpha$ , on obtient une première inégalité:

$$\sigma(\pi(A')) \oplus \sigma(c) \preceq \sigma(\pi(A)) \oplus \sigma(c) = \sigma(\pi(A)).$$

(ii): Supposons au rebours  $A \preceq \varphi_c(A')$ . On écrit au terme d'un argument analogue

$$\sigma(w_A(\alpha)) \preceq \sigma(w_{A'}(\alpha)) \oplus \sigma(c)$$

qui en sommant donne immédiatement  $\sigma(\pi(A)) \preceq \sigma(\pi(A')) \oplus \sigma(c)$ . Cela montre l'autre inégalité. Si  $A \mathcal{R}_c A'$ , on a  $A \preceq \varphi_c(A')$  et  $A' \preceq \varphi_c(A)$ . Cela achève la preuve de 3.2.8. ■

---

<sup>2</sup>coefficient par coefficient

**3.2.11 Exemple** Soit à calculer le taux de production associé à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \gamma\delta & \gamma \oplus \gamma^4\delta \\ \gamma\delta^{10} \oplus \gamma^2\delta^{11} & \gamma^3\delta^3 \end{bmatrix}.$$

On énumère trivialement les circuits diagonaux, soit

$$c = \gamma\delta \oplus \gamma^3\delta^3.$$

Modulo la congruence associée à  $c$ , on a  $\gamma \oplus \gamma^4\delta \equiv \gamma$  (car  $\gamma^4\delta \preceq \gamma(\gamma\delta)$ ), et de même  $\gamma\delta^{10} \oplus \gamma^2\delta^{11} \equiv \gamma\delta^{10}$ . Il résulte que le calcul du taux de production associé à  $A$  est le même pour la matrice suivante:

$$A' = \begin{bmatrix} \gamma\delta & \gamma \\ \gamma\delta^{10} & \gamma^3\delta^3 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, le taux de production est:

$$\lambda = \sigma(A'_{11} \oplus A'_{22} \oplus A'_{21}A'_{12}) = \sigma(\gamma\delta \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^2\delta^{10}) = \frac{1}{5}.$$

**3.2.12 Analogie avec les fonctions support** Une idée naturelle de simplification découle de l'observation suivante.

(i) D'ordinaire, on associe à une partie  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  sa fonction support :

$$\delta_X^* : \delta_X^*(p) = \sup_{x \in X} \langle p, x \rangle.$$

Il est bien connu que  $\delta_X^*$  ne dépend que de l'enveloppe convexe de  $X$ .

(ii) Ici, on a l'application:

$$\sigma : [\sigma(P)](q) = \inf_{(n,t) \in P} \frac{\langle q, n \rangle}{t},$$

qu'on peut voir comme une variante homogène de la fonction support. On peut montrer que  $\sigma(P)$  ne dépend que du cône engendré par  $P$  (i.e. de l'ensemble des combinaisons linéaires positives ou nulles de vecteurs de  $P$ ). Au lieu de la congruence ci-dessus, on pourrait penser introduire la règle suivante:  $P \mathcal{R}' P'$  ssi  $P$  et  $P'$  engendrent le même cône. Il faut bien voir que cette règle n'est pas compatible avec le calcul du taux de production. Par exemple,  $\gamma\delta$  et  $\gamma^2\delta^2$  définissent le même cône de  $\mathbb{R}^2$ . Cependant, les deux matrices

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma\delta \\ \delta & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma^2\delta^2 \\ \delta & \varepsilon \end{bmatrix}$$

ont des taux de production différents.

On peut montrer plus précisément que la congruence introduite ci-dessus est optimale.

**3.2.13 Proposition** Soit  $\mathcal{R}$  une congruence sur  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $\forall a, b, u, c \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta], a \mathcal{R} b \Rightarrow \sigma(au) \oplus \sigma(c) = \sigma(bu) \oplus \sigma(c)$ ,
- (ii)  $a \mathcal{R} b \Rightarrow a + \mathcal{C} + \mathcal{C}_c = b + \mathcal{C} + \mathcal{C}_c$ .

De manière analogue à la Proposition 2.3.7, il suffit de montrer le Lemme suivant.

**3.2.14 Lemme** Si pour tout  $u$ ,  $\sigma(au) \preceq \sigma(bu) \oplus \sigma(c)$ , alors  $a \subset b + \mathcal{C} + \mathcal{C}_c$ .

**Preuve** du Lemme. On suppose  $a = \gamma^n \delta^t$  et  $b = \bigoplus_i \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ . On pose  $u = \gamma^N \delta^T$ , avec

$$T = \frac{1}{\sigma(c)} N + T' .$$

Pour  $T'$  assez grand, il est clair que  $\sigma(bu) \succ \sigma(c)$ . L'inégalité  $\sigma(au) \preceq \sigma(bu) \oplus \sigma(c)$  se réécrit alors:

$$\frac{n+N}{t+T} \geq \inf_i \frac{n_i+N}{t_i+T} .$$

Il existe donc un indice  $i$  (dépendant a priori de  $N$  et  $T$ ) tel que

$$nt_i - tn_i \geq N(t - t_i) + T(n_i - n) = N(t - t_i + \frac{n_i - n}{\sigma(c)}) + T'(n_i - n) .$$

Comme  $N$  et  $T'$  peuvent être arbitrairement grands, cela n'est possible que s'il existe  $i$  (indépendant de  $N$  et  $T$ ) tel que

$$n_i - n \leq 0, \quad t - t_i + \frac{n_i - n}{\sigma(c)} \leq 0 ,$$

ce qui montre le Lemme. ■

### 3.3 Congruences polyédriques en dimension quelconque

Soit  $c \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\mathbb{R}^{p+2}]$ , causal. De manière analogue au cas précédent, on introduit le cône

$$\mathcal{C}_c = \mathbb{R}^+ c_1 + \dots + \mathbb{R}^+ c_k ,$$

où  $\{c_1, \dots, c_k\}$  est un ensemble de  $k$  vecteurs de  $\mathbb{R}^{p+2}$  représentant  $c$ . On définit la congruence polyédrique  $\mathcal{R}_c$  associée à  $c$  de manière analogue à 3.2.2.

**3.3.1 Exemple** Soit  $p = \gamma_0 \delta \oplus \gamma_0 \gamma_1 \delta^2 \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_0, \gamma_1, \delta]$ , et  $c = \gamma_1^2 \delta^6$ . On a  $p \mathcal{R}_c \gamma_0 \delta$  car  $\gamma_0 \gamma_1 \delta^2 \preceq \gamma_0 \delta (c)^{\frac{1}{2}}$ , ou dans  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} (2, 1, 1) &= (1, 1, 0) + \frac{1}{2}(6, 0, 2) + 2(-1, 0, 0) \\ &\subset (1, 1, 0) + \mathbb{R}^+(6, 0, 2) + \mathbb{R}^+(-1, 0, 0) + \mathbb{R}^+(0, 1, 0) + \mathbb{R}^+(0, 0, 1) . \end{aligned}$$

Cependant, pour la congruence modulo  $c^*$  (cf. B.2.7.1) on n'a pas  $p \equiv \gamma_0 \delta$ .

Nous noterons seulement ceci.

**3.3.2 Observation** Le Théorème 3.2.9 s'étend à  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\mathbb{R}^{p+2}]$ .

**3.3.3 Exemple** Pour la matrice  $A$  de 2.3.6, 3.1.10 on peut en particulier simplifier  $\pi_1$  modulo la congruence associée à  $\pi_0$ . Comme  $\gamma^3 \delta^3 \preceq \gamma \delta (\gamma \delta)^2$ , ou dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $(3, 3) \in (1, 1)\mathbb{R}^+$ , le monôme  $\gamma^3 \delta^3$  est  $\leq_{\Phi_c}$ -dominé par  $\gamma \delta$  (cf. 3.2.d), et l'on peut écrire

$$\lambda = \sigma(\gamma \delta \oplus \gamma_1 \gamma \delta^{10}) = \min(1, \frac{1+q_1}{10}) ,$$

ce qui était évident à partir de (2.3.b).

### 3.4 Exemple

On considère l'atelier flexible de type “flowshop” représenté sur la Figure IX.1 et décrit par la matrice suivante:

$$a = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma\delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \gamma_1\delta & \varepsilon \\ \delta^9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma_2\delta^{10} \\ \delta^9 & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^2 & \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^{10} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^7 & \delta & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Nous appliquons l'algorithme d'énumération 3.1.9. On a en écrivant à chaque étape de l'algorithme que la partie utile de la matrice  $a^{(k)}$ :

$$\begin{aligned} a^{(0)} &= a & \pi^{(0)} &= \varepsilon \\ a^{(1)} &= \begin{bmatrix} \gamma\delta^{11} & \varepsilon & \varepsilon & \gamma_1\delta^{10} & \gamma^2\delta^{10} \\ \gamma\delta^{11} & \varepsilon & \gamma\delta^7 & \gamma_1\delta^{10} & \varepsilon \\ \delta^2 & \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^{10} \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^7 & \delta & \varepsilon \end{bmatrix} & \pi^{(1)} &= \gamma\delta^{11} \\ a^{(2)} &= \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma\delta^7 & \gamma_1\delta^{10} & \gamma\gamma_1\delta^{21} \\ \delta^2 & \varepsilon & \gamma_1\delta^{12} & \gamma_2\delta^{12} \\ \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \gamma\delta^{10} \\ \varepsilon & \delta^7 & \delta & \varepsilon \end{bmatrix} & \pi^{(2)} &= \gamma\delta^{11} \end{aligned}$$

Nous détaillons le calcul de  $a_{35}^{(2)}$ . On a  $a_{35}^{(2)} = a_{35}^{(1)} \oplus a_{32}^{(1)} a_{25}^{(1)} = \gamma_1\delta^{10} \oplus \gamma\delta^{11}\gamma_1\delta^{10} \equiv \gamma_1\delta^{10} \pmod{\mathcal{R}_{\pi^2}}$ , car  $\gamma\delta^{11}\gamma_1\delta^{10} \preceq \gamma_1\delta^{10}\pi^2$ . On continue de même:

$$a^{(3)} = \begin{bmatrix} \gamma\delta^9 & \gamma_1\delta^{12}(\oplus\gamma_1\delta^{12}) & \gamma_2\delta^{12}(\oplus\gamma\gamma_2\delta^{23}) \\ \gamma\delta^9 & \gamma_1\delta^{12} & \gamma\delta^{10} \oplus \gamma\gamma_2\delta^{23} \\ \delta^7 & \delta & \varepsilon \end{bmatrix} \quad \pi^{(3)} = \gamma\delta^{11} \oplus \gamma_1\delta^{12}$$

(on a mis les termes inessentiels entre parenthèses).

$$a^{(4)} = \begin{bmatrix} \gamma_1\delta^{12}(\oplus\gamma\gamma_1\delta^{21}) & \gamma\delta^{10} \oplus \gamma\gamma_2\delta^{23}(\oplus\gamma\gamma_2\delta^{21}) \\ \delta \oplus \gamma_1\delta^{19} & \gamma_2\delta^{19} \end{bmatrix} \quad \pi^{(4)} = \gamma\delta^{11} \oplus \gamma_1\delta^{12} \oplus \gamma^2\delta^{19}$$

$a^{(5)} = (\delta \oplus \gamma_1\delta^{19})(\gamma\delta^{10} \oplus \gamma\gamma_2\delta^{23}) = \gamma\delta^{11} \oplus \gamma\gamma_1\delta^{22} \oplus (\gamma\gamma_2\delta^{24}) \oplus \gamma\gamma_2\delta^{42}$ ,  $\pi^{(5)} = \gamma\delta^{11} \oplus \gamma_1\delta^{12} \oplus \gamma_2\delta^{19} \oplus \gamma\gamma_1\delta^{29}$ . Soit l'ensemble de contraintes

$$\lambda = \sigma(\pi^{(5)}) = \min\left(\frac{1}{11}, \frac{q_1}{12}, \frac{1+q_1}{29}, \frac{q_2}{19}\right). \quad (3.4.a)$$

Nous avons à l'aide de **MAX** calculé les traces des matrices  $a^*$  pour les valeurs suivantes de  $q_1$  et  $q_2$ :

$(q_1, q_2)$	$\text{tr}(a^*)$	$\sigma(\text{tr}(a^*))$
(1, 1)	$(\gamma\delta^{19})^*$	$\frac{1}{19}$
(1, 2)	$(e \oplus \gamma\delta^{12})(\gamma^2\delta^{29})^*$	$\frac{2}{29}$
(2, 1)	$(\gamma\delta^{19})^*$	$\frac{1}{19}$
(2, 2)	$(\gamma\delta^{11})^*$	$\frac{1}{11}$

Le taux de production  $\sigma(\text{tr}(a^*))$  coïncide bien avec  $\lambda(q)$  donné par la formule (3.4.a).

### 3.5 Autre exemple

Pour l'atelier étudié en VIII,§4, on trouve l'expression suivante:

$$\text{circuits} = \delta^4\gamma_3 \oplus \delta^{12}\gamma \oplus \delta^{12}\gamma_1 \oplus \delta^{19}\gamma_2 \oplus \delta^{30}\gamma\gamma_3 \oplus \delta^{30}\gamma\gamma_1$$

$$\lambda(q) = \min\left(\frac{q_3}{4}, \frac{1}{12}, \frac{q_1}{12}, \frac{q_2}{19}, \frac{1}{30} + \frac{q_3}{30}, \frac{1}{30} + \frac{q_1}{30}\right)$$

Les calculs sont laissés au lecteur. On pourra aussi utiliser la macro `enum` écrite dans le package MAX, décrite plus bas.

### 3.6 Calcul modulo une congruence polyédrique

Nous étudions maintenant le calcul effectif modulo  $\mathcal{R}_c$  en dimension quelconque. Ici encore, via 3.2.3 et le fait que  $\mathcal{R}_c$  est une bonne congruence, il suffit de savoir déterminer si, étant donné deux points  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^{p+2}$ , on a

$$a \in b + \mathcal{C} + \mathcal{C}_c . \quad (3.6.a)$$

Autrement dit, il suffit de savoir déterminer si le point  $a$  appartient au cône polyédrique convexe  $b + \mathcal{C} + \mathcal{C}_c$ , ce qui peut se faire en projetant  $a$ . Précisément, soit  $U$  la matrice formée en concaténant la matrice  $J$  des  $p+2$  vecteurs de base du cône  $\mathcal{C}$ , i.e.

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

et les  $\ell$  vecteurs de base  $c_1, \dots, c_\ell$  du cône  $\mathcal{C}_c = c_1\mathbb{R}^+ + \dots + c_\ell\mathbb{R}^+$  (i.e.  $U = [J, c_1, \dots, c_\ell]$ ). Etant donné deux points  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^{p+2}$ , on a  $a \in b + \mathcal{C}_c$  si et seulement si:

$$\exists x \in (\mathbb{R}^+)^{p+2+\ell}, \quad \|a - b - Ux\|^2 = 0,$$

où  $\|y\|$  désigne la norme euclidienne de  $y$ . On a employé pour vérifier cela les méthodes de programmation quadratique avec gestion de contraintes actives implémentées dans BASILE. On peut aussi, et c'est plus simple, déterminer à l'aide d'algorithmes de programmation linéaire si l'ensemble de contraintes suivant admet un point  $y \in (\mathbb{R}^+)^l$  admissible:

$$\begin{aligned} \forall i, 1 \leq i \leq p+1, \quad & \sum_{j=1}^{\ell} (c_j)_i y_j + b_i \leq a_i \\ & \sum_{j=1}^{\ell} (c_j)_{p+2} y_j + b_{p+2} \geq a_{p+2} . \end{aligned}$$

### 3.7 Complexité en dimension 2

Nous passons maintenant à l'étude de la complexité des algorithmes gaussiens décrits plus haut dans le cas systèmes “constants” ( $p = 0$ ). La matrice représentant le système aura alors ses coefficients dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ .

Le point important est que grâce à 3.2.6, la complexité des simplifications modulo  $\varphi_c$  ne dépend que de la pente de  $c$  et pas du nombre de termes de  $c$ . Nous appellerons *comparaison élémentaire* un test de redondance modulo  $\varphi_c$  entre deux monômes dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ .

**3.7.1 Corollaire** Soient  $p, q, c$  des polynômes causaux dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ . Le calcul de  $p \oplus q$  modulo  $\mathcal{R}_c$  s'effectue en  $O((\max(\deg_\gamma p, \deg_\gamma q))^2)$  comparaisons élémentaires. Le calcul de  $pq$  s'effectue en  $O((\deg_\gamma p + \deg_\gamma q)^2)$  comparaisons élémentaires.

**Preuve** Le polynôme  $p \oplus q$  dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$  a au plus  $n = \max(\deg_\gamma p, \deg_\gamma q)$  termes. En utilisant l'algorithme B.1.2.22, sa mise sous forme minimale requiert  $O(n^2)$  comparaisons élémentaires. Argument analogue pour  $pq$ . ■

**3.7.2 Corollaire** Soit  $A \in (\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta])^{n \times n}$ . Notons  $\deg_\gamma A = \max_{ij} \deg_\gamma A_{ij}$ . Les algorithmes 3.1.6 et 3.1.9, effectués modulo 3.2.9, coûtent  $O(n^5(\deg_\gamma A)^2)$  comparaisons élémentaires.

**Preuve** D'après l'interprétation combinatoire de l'algorithme de Gauss donnée en 0.4.2.3, le coefficient  $ij$  de  $A_{ij}^{(k)}$  comme une somme de termes de la forme  $p_{ij}c_1 \dots c_l$ , où  $p_{ij}$  est un chemin élémentaire de  $j$  à  $i$  passant éventuellement par  $1, \dots, k$ , et  $c_1, \dots, c_\ell$  sont des circuits contenus dans  $\{1, \dots, k\}$ . Si l'on simplifie  $A^{(k)}$  modulo la congruence polyédrique associée aux circuits contenus dans  $\{1, \dots, k\}$  (et donc précédemment énumérés), on ne retiendra qu'un sous ensemble des chemins élémentaires. Ainsi, on aura  $\deg_\gamma A_{ij}^{(k)} \leq (k+1) \deg_\gamma A \leq n \deg_\gamma A$ . D'après 3.7.1 le coût d'un produit (et a fortiori d'une somme) lors de l'élimination de Gauss sera  $O((n \deg_\gamma A)^2)$ . Comme il y a  $O(n^3)$  de telles opérations, on obtient la borne 3.7.2. ■

**3.7.3 Remarque** On a en effectuant 3.1.9, modulo 3.2.9 un nouvel algorithme pour calculer le taux de production d'un système sans ressources inconnues. De manière générale, soit un graphe donc chaque arc  $(ij)$  est valué par deux quantités positives ou nulles  $N_{ij}$  et  $T_{ij}$ . On a de la sorte un algorithme pour calculer la moyenne minimale suivante:

$$\lambda = \min_{k \geq 1} \min_{i_1, \dots, i_k} \frac{N_{i_1 i_2} + \dots + N_{i_k i_1}}{T_{i_1 i_2} + \dots + T_{i_k i_1}} .$$

Cet algorithme serait à comparer aux méthodes usuelles de détermination de ratio minimum (cf. Gondran et Minoux, Annexe V de [48]),

Nous donnerons un résultat de complexité en dimension quelconque après avoir décrit un procédé d'agrégation.

## 4 Quelques raffinements

### 4.1 Agrégation

Soit une partition  $\{1, \dots, n\} = I \cup J$  de l'ensemble des sommets du graphe. On décompose la matrice associée à un système autonome sous la forme:

$$A = \begin{bmatrix} A_{II} & A_{IJ} \\ A_{JI} & A_{JJ} \end{bmatrix} .$$

On a via 3.1.7

$$\pi(A) = \pi(A_{II}) \oplus \pi(A_{JJ} \oplus A_{JI}A'_{II}A_{IJ}) \tag{4.1.a}$$

pour toute matrice  $A'_{II}$  énumérant les chemins de  $A_{II}$ . On peut voir cela comme un résultat d'agrégation. Si la matrice  $A_{II}$  est “constante” (i.e. ne contient que les indéterminées  $\gamma$  et  $\delta$ ),

la matrice énumérante  $A'_{II}$  sera facile à déterminer. En particulier, les simplifications modulo les congruences polyédriques s'effectueront aisément. La complexité du calcul sera donc reliée à la taille de la matrice résiduelle  $A_{JJ} \oplus A_{JI}A'_{II}A_{IJ}$ , qui correspond au nombre de ressources. Autrement dit, on pourra traiter de la sorte des graphes d'événements d'assez grande taille, pourvu que le nombre de ressources soit petit.

Nous illustrons cette approche par un exemple spectaculaire où l'on obtient une formule fermée donnant le taux de production d'un atelier à 2 pièces et  $n$  machines identiques, en fonction non seulement des ressources, mais également des temps de fabrication.

## 4.2 Taux de production d'un flowshop à 2 types de pièces et $n$ étages identiques

On considère l'atelier de type flowshop analogue à celui traité en §3.4, avec ici 2 types de pièces et  $n$  machines identiques (ou prenant des temps identiques pour traiter les pièces), représenté à gauche de la Figure IX.4. On suppose donc que la machine  $i$  traite pendant un temps  $a$  la pièce 1 et ensuite pendant un temps  $b$  la pièce 2,  $a$  et  $b$  ne dépendant pas de  $i$ . Initialement,  $q_1$  palettes de type 1 et  $q_2$  palettes de type 2 se trouvent en amont de la machine 1.

**4.2.1 Théorème** *Le taux de production du Flowshop à  $n$  machines identiques et 2 types de pièces, donné sur la Figure IX.4, est égal à:*

$$\lambda(q_1, q_2) = \min\left(\frac{1}{a+b}, \frac{q_1}{na}, \frac{q_2}{nb}, \frac{1 + \min(q_1, q_2)}{2a + 2b + (n-2)\max(a, b)}\right). \quad (4.2.a)$$

**Preuve** On peut écrire avec les notations de la Figure IX.4:

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma\delta^b \\ \delta^a & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \gamma_1\delta^a & \varepsilon \\ \varepsilon & \gamma_2\delta^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \end{bmatrix}, \quad (4.2.b)$$

$$i > 1 : \quad \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma\delta^b \\ \delta^a & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \delta^a & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i-1} \\ x_{2i-1} \end{bmatrix}.$$

$$y_1 = \delta^a x_n, \quad y_2 = \delta^b x_n,$$

Plutôt que d'appliquer formellement la réduction (4.1.a), nous préférerons éliminer à la main les variables  $x_{1i}, x_{2i}$  associées aux étages  $i = 2 \dots n$ , ce qui est en fait équivalent. Il suffit donc de calculer le transfert  $H$  de  $u$  à  $y$  du système non rebouclé à droite de la Figure IX.4. Le transfert  $H'$  du système bouclé s'obtiendra en résolvant

$$X_1 = DY \oplus U, \quad Y = H X_1, \quad \text{avec } D = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2)$$

soit

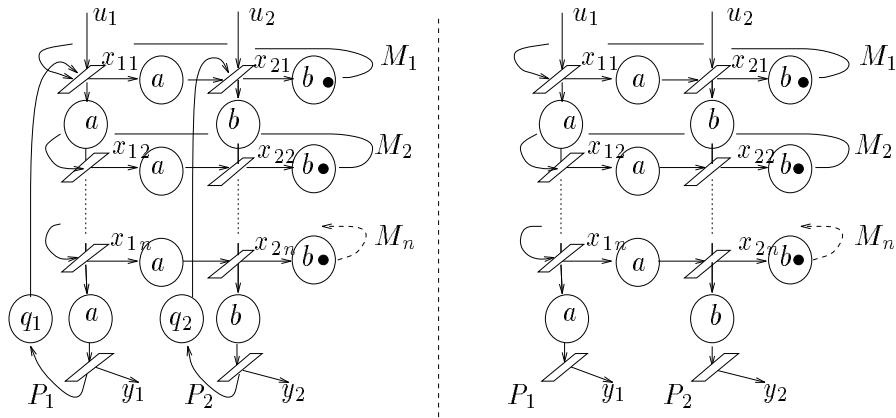
$$H' = H(DH)^*.$$

Pour simplifier les calculs, on notera les durées comme des scalaires, i.e.  $\gamma^k \delta^a \simeq a \gamma^k$ . On a alors par un calcul d'étoile immédiat le transfert suivant entre l'étage  $i-1$  et l'étage  $i$ :

$$X_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{bmatrix} = (ab\gamma)^* \begin{bmatrix} a & ab\gamma \\ ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i-1} \\ x_{2i-2} \end{bmatrix}.$$

On a donc énuméré un premier circuit

$$\pi_1 = ab\gamma^*.$$

Figure IX.4: Atelier flexible à  $n$  étages identiques

Modulo la congruence associée à  $\pi_1$ , on a  $(ab\gamma)^* = e$ , et l'on peut écrire

$$X_i = \mathcal{H}X_{i-1} \text{ avec } \mathcal{H} = \begin{bmatrix} a & ab\gamma \\ ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i-1} \\ x_{2i-2} \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$Y = \mathcal{H}^n X_1 .$$

On calcule aisément

$$\mathcal{H}^2 = \begin{bmatrix} a^2 \oplus a^2b^2\gamma & ab(a \oplus b)\gamma \\ ab(a \oplus b) & b^2 \oplus a^2b^2\gamma \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}^3 = \begin{bmatrix} a^3 \oplus a^2b^2(a \oplus b)\gamma & ab(a \oplus b)^2\gamma \oplus a^3b^3\gamma^2 \\ ab(a \oplus b)^2 \oplus a^3b^3\gamma & b^3 \oplus a^2b^2(a \oplus b)\gamma \end{bmatrix}$$

Modulo la congruence polyédrique associée à  $\pi_1$ , on a

$$ab(a \oplus b)^2 \oplus a^3b^3\gamma = ab(a \oplus b)^2$$

car  $a^3b^3\gamma \preceq ab(a \oplus b)(ab\gamma)$ . Ainsi:

$$\mathcal{H}^3 = \begin{bmatrix} a^3 \oplus a^2b^2(a \oplus b)\gamma & ab(a \oplus b)^2\gamma \\ ab(a \oplus b)^2 & b^3 \oplus a^2b^2(a \oplus b)\gamma \end{bmatrix}$$

et via une récurrence immédiate:

$$\mathcal{H}^n = \begin{bmatrix} a^n \oplus a^2b^2(a \oplus b)^{n-2}\gamma & ab(a \oplus b)^{n-1}\gamma \\ ab(a \oplus b)^{n-1} & b^n \oplus a^2b^2(a \oplus b)^{n-2}\gamma \end{bmatrix}$$

Le taux de production est donc égal au min des poids des circuits de la matrice  $D\mathcal{H}^n$  ainsi que du circuit  $\pi_1$  déjà énuméré, soit

$$\lambda(q_1, q_2) = \sigma \begin{bmatrix} \gamma_1(a^n \oplus a^2b^2(a \oplus b)^{n-2}\gamma) & \gamma_1 ab(a \oplus b)^{n-1}\gamma \\ \gamma_2 ab(a \oplus b)^{n-1} & \gamma_2(b^n \oplus a^2b^2(a \oplus b)^{n-2}\gamma) \end{bmatrix} \oplus \sigma(ab\gamma) .$$

On a donc  $\lambda = \sigma(\pi_1) \oplus \sigma(\pi)$  où  $\pi$  est donné par 3.1.3:

$$\pi = \gamma_1 a^n \oplus a^2 b^2 (a \oplus b)^{n-2} \gamma \gamma_1 \oplus \gamma_2 b^n \oplus a^2 b^2 (a \oplus b)^{n-2} \gamma \gamma_2 \oplus a^2 b^2 (a \oplus b)^{2n-2} \gamma \gamma_1 \gamma_2$$

Supposons par exemple  $a \succeq b$ . On a  $\gamma_1 a^n \otimes a^2 b^2 (a \oplus b)^{n-2} \gamma \gamma_2 \succeq a^2 b^2 (a \oplus b)^{2n-2}$  d'où il résulte que le dernier terme de  $\pi$  est inessentiel. De même si  $a \preceq b$ . Ainsi,

$$\pi_1 \oplus \pi = ab\gamma \oplus \gamma_1 a^n \oplus a^2 b^2 (a \oplus b)^{n-2} \gamma \gamma_1 \oplus \gamma_2 b^n \oplus a^2 b^2 (a \oplus b)^{n-2} \gamma \gamma_2$$

et donc en revenant à l'algèbre habituelle, on a la formule (4.2.a). ■

### 4.3 Complexité

Pour un grand nombre de ressources indéterminées, la simplification modulo les congruences polyédriques sera ineffective. L'algorithme 3.2.9 sera pertinent lorsque le nombre  $p$  de ressources indéterminées sera petit, et lorsque par ailleurs le graphe d'événements temporisés sera grand. La section précédente représente un cas limite, où l'on a pu traiter une graphe d'événements de taille arbitrairement grande avec 2 ressources. Plus généralement, nous considérons un système sous la forme standard donnée sur la Figure IX.5.  $\text{diag}(\gamma_i)$  est une matrice diagonale de taille  $p$  dont les coef-

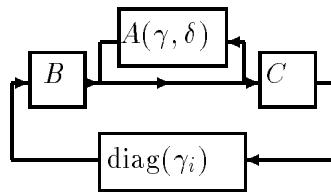


Figure IX.5: Forme standard d'un système à  $p$  ressources indéterminées

ficients diagonaux sont les  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ .  $A$  est une matrice de taille  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathcal{M}_{\max}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ , qui représente la partie “constante” du système.  $B$  et  $C$  sont des matrices à coefficients booléiens. Nous laissons le lecteur se convaincre que l'on peut toujours se ramener à une telle forme, au besoin en rajoutant des transitions en amont et en aval des places où les  $p$  ressources inconnues sont situées. Via (4.1.a), on se ramène à énumérer les circuits de  $A'' = D \oplus C A' B$ , où  $A'$  est une matrice énumérant les chemins de  $A$ . D'après 3.7.2, l'obtention de  $A'$ , et donc le calcul de  $D \oplus C A' B$  requiert de l'ordre de  $O(n^5 (\deg_{\gamma} A)^2)$  opérations. Le nombre de termes de chaque coefficient de  $A''$  est alors borné par  $n^2 \deg_{\gamma} A$ . Il reste à énumérer les circuits de  $A''$ . Nous supposons ici que cette énumération s'effectue sans utiliser les congruences. Comme  $A''$  résulte d'une agrégation,  $A''$  sera en général pleine, on a donc d'après 3.1.13  $O((p-1)!)$  circuits élémentaires, chacun somme au plus de  $(n^2 \deg_{\gamma} A)^p$  monômes, soit un nombre final de termes  $O((p-1)! (n^2 \deg_{\gamma} A)^p)$ . L'intérêt de cette borne, sans doute assez grossière, est de montrer que pour un nombre de ressources  $p$  fixé, la complexité est pseudo-polynomiale en la taille du système  $n$  (i.e. dépend polynomialement de  $n$ , mais également de la taille des données représentée par  $\deg_{\gamma} A$ ).

## 5 Application

### 5.1 Implémentation courante

La manipulation des polynômes et matrices dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_i, \delta]$  a été provisoirement développée en MAPLE pour être compatible avec MAX. Par contre, la simplification modulo les congruences polyédriques exige de savoir projeter sur un cône polyédrique. Cela relève du calcul numérique, et les programmes standard sont évidemment écrits en FORTRAN. Notre propos n'était pas ici d'écrire le code général et performant pour l'optimisation des ressources, mais de tester les algorithmes décrits plus haut sur des exemples raisonnables. Nous nous sommes résolus pour cela au compromis (provisoire) suivant: 1/ on simplifie en MAPLE modulo certaines règles "approchant" la congruence polyédrique modulo  $c$  (voir ci-dessous). 2/ on effectue l'énumération exhaustive selon la taille du système). 3/ on transmet de manière interactive les données à BASILE, par exemple à l'aide de l'interface BASILE-MAPLE. On effectue ensuite les simplifications exactes. On récupère le résultat en MAPLE. Cela sera illustré sur un exemple réel dans la section suivante.

Une implémentation définitive devrait inclure la projection sur des cônes polyédriques à coordonnées rationnelles, du moins si l'on prétend faire du calcul formel. Si l'on admet des erreurs d'arrondi, on pourrait écrire assez rapidement un programme BASILE gérant et simplifiant les matrices polynomiales, et utilisant les codes existants de programmation quadratique.

**5.1.1 Approximation de la congruence polyédrique modulo  $c$**  Soit  $c = \bigoplus_i c_i$  un polynôme. La congruence polyédrique modulo  $c$  est plus grossière que chacune des congruences associée à chaque monôme  $c_i$ . Soit  $c_i = \delta^{t_i} \gamma_0^{n_0} \dots \gamma_p^{n_p}$ . Il est immédiat de déterminer si

$$\delta^{t'} \gamma_0^{n'_0} \dots \gamma_p^{n'_p} \in \mathcal{C}_{\delta^{t_i} \gamma_0^{n_0} \dots \gamma_p^{n_p}}$$

Cela revient à vérifier si  $x$  tel que  $t' = xt$  satisfait

$$(n'_0, \dots, n'_p) \geq x(n_0, \dots, n_p) .$$

Ainsi, la simplification modulo la congruence associée à un seul monôme  $c_i$  est immédiate. En pourra donc effectuer l'approximation suivante de  $\mathcal{R}_c$ , qui consiste à simplifier successivement modulo chacun des monômes  $c_i$ . Les représentants obtenus de la sorte ne seront évidemment plus minimaux.

Soient par exemple  $c = \gamma_0 \delta + \gamma_1 \delta^3 = c_1 + c_2$ ,  $a = e + \gamma_2 \delta^5$  et  $a' = e + \gamma_0 \gamma_1^2 \delta^6$ . Modulo  $\mathcal{R}_c$ , on a  $a \equiv e$  car  $\gamma_1^2 \delta^5 \leq e \otimes c_2^2$ . Modulo  $\mathcal{R}_{c_1}$  et  $\mathcal{R}_{c_2}$ ,  $a'$  est minimal. Cependant,  $\gamma_0 \gamma_1^2 \delta^6 \leq c_1 c_2^2$  ce qui montre que  $a' \not\equiv e \pmod{\mathcal{R}_c}$ . Ainsi, l'approximation précédente ne simplifie pas  $a'$ .

**5.1.2 Définition des objets de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_i, \delta]$  en MAX** Les polynômes de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_i, \delta]$  sont définis comme suit:

**polynôme** = {liste de monômes de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_i, \delta]$ } | **eps**.

Le monôme  $\gamma_0^{n_0} \gamma_1^{n_1} \dots \gamma_p^{n_p} \delta^t$  est représenté par la liste  $[t, n_0, n_1, \dots, n_p]$ . Les listes de monômes sont ordonnées par  $t$  croissants. La fonction

**p21** {polynôme usuel},{dimension} → { polynôme dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_i, \delta]$ }  
convertit un polynôme usuel en les indéterminées  $g_0, \dots, g_p$  en un polynôme dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_0, \dots, \gamma_p, \delta]$ , où  $p$  est la dimension. L'indéterminée  $g$  est un synonyme de  $g_0$ . On a par exemple:

```

MAX> u:=g*g3*d^2+d+g3*d^2;
          2           2
          u := g g3 d + d + g3 d

MAX> w:=p21(u,3);
          w := [[1, 0, 0, 0, 0], [2, 0, 0, 0, 1]]
MAX> l2p(w);
          2
          d + g3 d

MAX> w1:=p21(u,4);
          w1 := [[1, 0, 0, 0, 0, 0], [2, 0, 0, 0, 1, 0]]
MAX> l2p(w1);
          2
          d + g3 d

MAX> u:=p21(g*g1*g2+d*g1,2):l2p(u);
          d g1

```

Les polynômes ainsi convertis sont sous forme minimale, comme on l'observe sur le dernier exemple.

Les opérateurs &+ et &\* de MAX reconnaissent les polynômes de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_i, \delta]$ . Par exemple:

```

MAX> u:=p21(g*g1+d*g2,2);
          u := [[0, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 1]]
MAX> l2p(u);
          g g1 + d g2

MAX> v:=p21(d*g2*g1+d^3*g1^2,2);
          v := [[1, 0, 1, 1], [3, 0, 2, 0]]
MAX> u&+ v;
          [[0, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 1], [3, 0, 2, 0]]
MAX> l2p("");
          3   2
          g g1 + d g2 + d g1
MAX> l2p(u&* v);
          2      2      3      3      4      2
          d g1 g2 + d g g1 + d g1 g2

```

### 5.1.3 La routine enum de MAX

La fonction

`enum : ( matrice) → ( polynôme)`

retourne un polynôme énumérant les circuits de la matrice, simplifié modulo l'approximation décrite plus haut. Par exemple

```

MAX> a:=p21(array([[g0*d ,g1*d^3],[g^2, g^2*g1^2*d^2]]),2);

          [ [[1, 1, 0, 0]]  [[3, 0, 1, 0]] ]
          a := [
          ]
          [ [[0, 2, 0, 0]]  [[2, 2, 2, 0]] ]

```

MAX> l2p(a);

$$\begin{bmatrix} \gamma\delta & \gamma_1\delta^3 \\ \gamma^2 & \gamma^2\gamma_1^2\delta^2 \end{bmatrix}$$

```
MAX> c:=enum(a);
      c := [[1, 1, 0, 0], [3, 2, 1, 0]]
MAX> l2p(c);
```

$$\gamma\delta \oplus \delta^3\gamma^2\gamma_1$$

`enum` admet également la syntaxe `enum(<matrice>, <polynome>)`, auquel cas les circuits énumérés sont également simplifiés modulo le polynôme passé en second paramètre. Par exemple, avec la matrice  $A$  ci-dessus, on a:

```
MAX> c:=enum(a,p2l(g1*d^2,2));
      c := [[1, 1, 0, 0], [2, 0, 1, 0]]
MAX> l2p(c);
```

$$\gamma\delta \oplus \gamma_1\delta^2$$

En effet, on a  $\delta^3\gamma^2\gamma_1 \preceq (\gamma\delta)(\gamma_1\delta^2)$ , et ce monôme redondant modulo la congruence associée à  $\gamma_1\delta^2$  a bien été éliminé.

#### 5.1.4 La routine `array2flex`

L'instruction `array2flex(A)` génère la matrice  $a \in \mathcal{M}_{ax}^{\text{in}}[\gamma_i, \delta]$  représentant un atelier flexible de type flowshop à  $n$  machines et  $p$  pièces, spécifié par une matrice  $A$  de taille  $n \times p$ .  $A_{ij}$  désigne le temps de passage (réel positif ou `eps`) de la pièce  $j$  sur la machine  $i$ . Si ce temps est égal à `eps`, on suppose que la pièce  $j$  ne passe pas sur la machine  $i$  et passe à la machine suivante. Les indéterminées  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  correspondent respectivement aux nombres de palettes de type  $1, \dots, p$ . Par exemple, la matrice  $a$  de l'exemple 2.3.1 a été produite par

```
MAX> A:=array([[9,2],[2,7],[1,10]]):
MAX> a:=array2flex(A);
      a := [eps, [[2, 1, 0, 0]], eps, eps, [[1, 0, 1, 0]], eps]
            [[[9, 0, 0, 0]], eps, eps, eps, [[10, 0, 0, 1]]]
            [[[9, 0, 0, 0]], eps, eps, [[7, 1, 0, 0]], eps, eps]
            [eps, [[2, 0, 0, 0]], [[2, 0, 0, 0]], eps, eps, eps]
            [eps, eps, [[2, 0, 0, 0]], eps, eps, [[10, 1, 0, 0]]]
            [eps, eps, eps, [[7, 0, 0, 0]], [[1, 0, 0, 0]], eps]
```

```
MAX> l2p(a);
```

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & \delta^2\gamma & \varepsilon & \varepsilon & \delta\gamma_1 & \varepsilon \\ \delta^9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^{10}\gamma_2 \\ \delta^9 & \varepsilon & \varepsilon & \delta^7\gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^2 & \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \delta^{10}\gamma \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^7 & \delta & \varepsilon \end{bmatrix}$$

On obtient le polynôme  $\pi^{(5)}$  énumérant les circuits de  $a$  donné en §3.4 de la manière suivante:

```
MAX> c:=enum(a);
c := [[11, 1, 0, 0], [12, 0, 1, 0], [19, 0, 0, 1], [29, 1, 1, 0]]

MAX> l2p(c);

$$\delta^{11}\gamma \oplus \delta^{12}\gamma_1 \oplus \delta^{19}\gamma_2 \oplus \delta^{29}\gamma\gamma_1 .$$

```

## 5.2 Un exemple réel

Nous traitons ici l'atelier flexible étudié par Cohen, Dubois, Quadrat et Viot en 83 [17]. On considère l'atelier flexible de type flowshop à 8 machines et 6 types de pièces, avec les temps de passage des pièces sur les machines décrits sur le tableau IX.1. On a pris les ordres de passage fixes et définis

temps de passage	pièce 1	pièce 2	pièce 3	pièce 4	pièce 5	pièce 6	charge totale
machine 1	2	3.9	0.95	1.1	0.7	1.4	10.05
machine 2	-	-	2	1.2	-	1.7	4.9
machine 3	3.7	-	2.2	-	6.4	-	12.3
machine 4	-	-	2	-	1	1	4
machine 5	1.7	3.1	3	-	1.3	-	9.1
machine 6	0.5	3.2	4.3	1.9	1.6	0.4	11.9
machine 7	1	1	1	1	1	1	6
machine 8	1.5	1.5	1.5	1.2	1.2	1.2	8.1
durée circuit pièce	10.4	12.7	16.95	6.4	13.2	6.7	

Table IX.1:

sur la table IX.2. La machine critique (de charge maximale 12.3) est la machine 3. On voit qu'une

machine 1	séquence	1 2 3 4 5 6
machine 2	séquence	3 4 6
machine 3	séquence	1 3 5
machine 4	séquence	3 5 6
machine 5	séquence	1 2 3 5
machine 6	séquence	1 2 3 4 5 6
machine 7	séquence	1 2 3 4 5 6
machine 8	séquence	1 2 3 4 5 6

Table IX.2:

seule palette par type de pièce est insuffisante pour saturer la machine 3. La durée du cycle de la pièce 3 est en effet de 16.95, et l'on a sait donc a priori que le taux de production avec 1 palette par type de pièce est inférieur à  $(16.95)^{-1}$ .

La matrice représentant le système est de taille  $48 \times 48$  (on a  $48 = 8 \times 6$  transitions). Une première approche consiste à appliquer l'algorithme d'énumération avec l'approximation 5.1.1. On obtient alors en utilisant la macro `enum` décrite ci-dessus au bout d'1h40 de MAPLE les 156 circuits donnés dans la Table IX.3

$c_1 = \delta^{6.4} \gamma_4$	$\oplus$	$\delta^{6.7} \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{10.4} \gamma_1$	$\oplus$
$\delta^{12.3} \gamma$	$\oplus$	$\delta^{12.7} \gamma_2$	$\oplus$	$\delta^{13.2} \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{16.95} \gamma_3$	$\oplus$	$\delta^{28.3} \gamma \gamma_4$	$\oplus$	$\delta^{28.75} \gamma \gamma_1$	$\oplus$
$\delta^{28.8} \gamma \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{28.65} \gamma \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{29.65} \gamma \gamma_2$	$\oplus$
$\delta^{30.05} \gamma \gamma_3$	$\oplus$	$\delta^{40.75} \gamma^2 \gamma_4$	$\oplus$	$\delta^{41.25} \gamma^2 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{41.35} \gamma \gamma_4 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{41.45} \gamma \gamma_1 \gamma_4$	$\oplus$	$\delta^{41.75} \gamma^2 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{41.85} \gamma^2 \gamma_1$	$\oplus$	$\delta^{42.85} \gamma \gamma_2 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{42.95} \gamma \gamma_1 \gamma_2$	$\oplus$
$\delta^{44.85} \gamma \gamma_2 \gamma_4$	$\oplus$	$\delta^{45.35} \gamma \gamma_2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{55.55} \gamma \gamma_2 \gamma_4 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{55.65} \gamma \gamma_1 \gamma_2 \gamma_4$	$\oplus$	$\delta^{58.50} \gamma \gamma_1 \gamma_3 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{70.0} \gamma^2 \gamma_1 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{71.20} \gamma^3 \gamma_2 \gamma_3$	$\oplus$	$\delta^{74.20} \gamma^2 \gamma_3 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{74.30} \gamma^2 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{79.50} \gamma^4 \gamma_3 \gamma_4$	$\oplus$	$\delta^{79.85} \gamma^2 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{81.90} \gamma^4 \gamma_2 \gamma_4$	$\oplus$
$\delta^{82.25} \gamma^2 \gamma_2 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{82.65} \gamma^2 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{82.70} \gamma^2 \gamma_1 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{82.75} \gamma^3 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{82.75} \gamma^2 \gamma_1 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{82.80} \gamma^2 \gamma_1^2 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{84.10} \gamma^2 \gamma_3^2 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{84.20} \gamma^2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{84.30} \gamma^2 \gamma_1^2 \gamma_2 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{85.55} \gamma^3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{85.60} \gamma^3 \gamma_1 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{85.65} \gamma^3 \gamma_1 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{86.50} \gamma^2 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{86.65} \gamma^2 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{86.75} \gamma^2 \gamma_1^2 \gamma_3 \gamma_4$	$\oplus$
$\delta^{86.90} \gamma^3 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{86.90} \gamma^2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{87.0} \gamma^2 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{87.30} \gamma^3 \gamma_3 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{87.40} \gamma^3 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{98.35} \gamma^3 \gamma_1 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{88.40} \gamma^2 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{88.50} \gamma^2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{90.60} \gamma^5 \gamma_1 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{95.40} \gamma^2 \gamma_1 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{95.45} \gamma^3 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{95.85} \gamma^4 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{96.90} \gamma^2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{97.0} \gamma^2 \gamma_1^2 \gamma_2 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{98.25} \gamma^4 \gamma_2 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{98.25} \gamma^3 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{98.65} \gamma^4 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{98.70} \gamma^4 \gamma_1 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{98.75} \gamma^4 \gamma_1 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{98.80} \gamma^4 \gamma_1^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{99.20} \gamma^3 \gamma_2 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{99.20} \gamma^2 \gamma_2 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{99.30} \gamma^2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{99.75} \gamma^3 \gamma_2 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{99.75} \gamma^3 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{99.80} \gamma^3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{99.85} \gamma^3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{99.85} \gamma^3 \gamma_1^2 \gamma_3 \gamma_4$	$\oplus$	$\delta^{100.0} \gamma^4 \gamma_2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{100.10} \gamma^4 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{100.40} \gamma^4 \gamma_3 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{100.50} \gamma^4 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{100.85} \gamma^2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{100.95} \gamma^2 \gamma_1^2 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$	$\oplus$	$\delta^{101.10} \gamma^3 \gamma_2^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{101.10} \gamma^2 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{101.20} \gamma^3 \gamma_1 \gamma_2^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{110.05} \gamma^5 \gamma_3^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{111.10} \gamma^5 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{111.20} \gamma^5 \gamma_1 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{111.80} \gamma^5 \gamma_1 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{112.05} \gamma^5 \gamma_2^2 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{112.45} \gamma^5 \gamma_2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{112.45} \gamma^3 \gamma_2 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{112.55} \gamma^5 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{112.55} \gamma^3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{112.85} \gamma^5 \gamma_3 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{112.95} \gamma^5 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{113.40} \gamma^2 \gamma_2^2 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{113.50} \gamma^2 \gamma_1 \gamma_2^2 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{113.55} \gamma^4 \gamma_2^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{113.65} \gamma^4 \gamma_1 \gamma_2^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{113.80} \gamma^3 \gamma_2^2 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{113.90} \gamma^3 \gamma_1 \gamma_2^2 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{123.55} \gamma^6 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{123.65} \gamma^6 \gamma_1 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{124.25} \gamma^6 \gamma_1 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{128.0} \gamma^3 \gamma_1^2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{128.10} \gamma^3 \gamma_1^3 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{131.05} \gamma^7 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{132.20} \gamma^3 \gamma_1 \gamma_3^2 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{132.30} \gamma^3 \gamma_1^2 \gamma_3^2 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{140.70} \gamma^3 \gamma_1^2 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{142.20} \gamma^3 \gamma_1^2 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{142.30} \gamma^3 \gamma_1^3 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{143.55} \gamma^4 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{143.65} \gamma^4 \gamma_1^2 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{144.50} \gamma^3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{144.60} \gamma^3 \gamma_1^2 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{145.30} \gamma^4 \gamma_1 \gamma_3^2 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{145.40} \gamma^4 \gamma_1^2 \gamma_3^2 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{146.40} \gamma^3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3^2 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{146.50} \gamma^3 \gamma_1^2 \gamma_2 \gamma_3^2 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{156.65} \gamma^5 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{156.70} \gamma^5 \gamma_1^2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{156.75} \gamma^5 \gamma_1^2 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{156.80} \gamma^5 \gamma_1^3 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{157.75} \gamma^4 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{157.85} \gamma^4 \gamma_1^2 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{158.0} \gamma^5 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{158.10} \gamma^5 \gamma_1^2 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{158.40} \gamma^5 \gamma_1 \gamma_3^2 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{158.50} \gamma^5 \gamma_1^2 \gamma_3^2 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{158.70} \gamma^3 \gamma_1 \gamma_2^2 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{158.80} \gamma^3 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{159.10} \gamma^4 \gamma_1 \gamma_2^2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{159.20} \gamma^4 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$
$\delta^{169.10} \gamma^6 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{169.20} \gamma^6 \gamma_1^2 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{170.45} \gamma^6 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{170.55} \gamma^6 \gamma_1^2 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{170.85} \gamma^6 \gamma_1 \gamma_3^2 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{170.90} \gamma^5 \gamma_1^2 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{171.65} \gamma^5 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{170.95} \gamma^6 \gamma_1^2 \gamma_3^2 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{171.55} \gamma^5 \gamma_1 \gamma_2^2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{181.55} \gamma^7 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{181.65} \gamma^7 \gamma_1^2 \gamma_3 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{182.25} \gamma^7 \gamma_1^2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{182.35} \gamma^7 \gamma_1^3 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{186.0} \gamma^4 \gamma_1^3 \gamma_3^2 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{189.80} \gamma^4 \gamma_1^2 \gamma_2 \gamma_3^2 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{189.90} \gamma^4 \gamma_1^3 \gamma_2 \gamma_3^2 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{199.10} \gamma^5 \gamma_1^3 \gamma_3^2 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{202.90} \gamma^5 \gamma_1^2 \gamma_2 \gamma_3^2 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$
$\delta^{203.0} \gamma^5 \gamma_1^3 \gamma_2 \gamma_3^2 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$	$\delta^{204.0} \gamma^4 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 \gamma_4^2 \gamma_5 \gamma_6$	$\oplus$	$\delta^{204.10} \gamma^4 \gamma_1^3 \gamma_2^2 \gamma_3^2 \gamma_4^2 \gamma_5$	$\oplus$

Table IX.3: Circuits avant simplification

On passe ensuite ces 156 circuits en BASILE, et l'on obtient après simplification exacte un ensemble minimal de 25 circuits.

$$\text{ensemble simplifié de circuits} = c = \delta^{6.4}\gamma_4 \oplus \delta^{6.7}\gamma_6 \oplus \delta^{10.4}\gamma_1 \oplus \delta^{12.3}\gamma \oplus \delta^{12.7}\gamma_2 \oplus \delta^{13.2}\gamma_5 \oplus \delta^{16.95}\gamma_3 \oplus \delta^{28.3}\gamma\gamma_4 \oplus \delta^{28.65}\gamma\gamma_6 \oplus \delta^{28.75}\gamma\gamma_1 \oplus \delta^{28.8}\gamma\gamma_5 \oplus \delta^{29.65}\gamma\gamma_2 \oplus \delta^{30.05}\gamma\gamma_3 \oplus \delta^{40.75}\gamma^2\gamma_4 \oplus \delta^{41.25}\gamma^2\gamma_5 \oplus \delta^{41.35}\gamma\gamma_4\gamma_6 \oplus \delta^{41.45}\gamma\gamma_1\gamma_4 \oplus \delta^{41.75}\gamma^2\gamma_6 \oplus \delta^{41.85}\gamma^2\gamma_1 \oplus \delta^{42.85}\gamma\gamma_2\gamma_6 \oplus \delta^{42.95}\gamma\gamma_1\gamma_2 \oplus \delta^{44.85}\gamma\gamma_2\gamma_4 \oplus \delta^{45.35}\gamma\gamma_2\gamma_5 \oplus \delta^{55.55}\gamma\gamma_2\gamma_4\gamma_6 \oplus \delta^{55.65}\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_4$$

Une autre approche consiste à appliquer l'algorithme de Gauss seulement jusqu'à l'itération 42, et à énumérer brutalement (i.e. sans simplifications) les 415 circuits de la matrice résiduelle  $A^{(42)}$  de taille  $6 \times 6$ . Les coefficients de  $A^{(42)}$  sont les suivants:

$$\begin{aligned} A_{11}^{(42)} &= \delta^{28.35}\gamma\gamma_1 \oplus \delta^{41.45}\gamma^2\gamma_1 \\ A_{12}^{(42)} &= \delta^{26.35}\gamma\gamma_2 \oplus \delta^{39.45}\gamma^2\gamma_2 \\ A_{13}^{(42)} &= \delta^{22.45}\gamma\gamma_3 \oplus \delta^{35.55}\gamma^2\gamma_3 \\ A_{14}^{(42)} &= \delta^{16.3}\gamma\gamma_4 \oplus \delta^{31.9}\gamma^2\gamma_4 \oplus \delta^{44.35}\gamma^3\gamma_4 \\ A_{15}^{(42)} &= \delta^{15.2}\gamma\gamma_5 \oplus \delta^{30.8}\gamma^2\gamma_5 \oplus \delta^{43.25}\gamma^3\gamma_5 \\ A_{16}^{(42)} &= \delta^{1.2}\gamma \oplus \delta^{11.5}\gamma\gamma_6 \oplus \delta^{29.45}\gamma^2\gamma_6 \oplus \delta^{42.55}\gamma^3\gamma_6 \\ \\ A_{21}^{(42)} &= \delta^{1.5} \oplus \delta^{16.2}\gamma_1 \oplus \delta^{31.65}\gamma\gamma_1 \\ A_{22}^{(42)} &= \delta^{27.35}\gamma\gamma_2 \oplus \delta^{40.45}\gamma^2\gamma_2 \\ A_{23}^{(42)} &= \delta^{25.75}\gamma\gamma_3 \\ A_{24}^{(42)} &= \delta^{22.1}\gamma\gamma_4 \oplus \delta^{34.55}\gamma^2\gamma_4 \\ A_{25}^{(42)} &= \delta^{21.0}\gamma\gamma_5 \oplus \delta^{33.45}\gamma^2\gamma_5 \\ A_{26}^{(42)} &= \delta^{17.3}\gamma\gamma_6 \oplus \delta^{32.75}\gamma^2\gamma_6 \\ \\ A_{31}^{(42)} &= \delta^{22.85}\gamma_1 \oplus \delta^{35.95}\gamma\gamma_1 \\ A_{32}^{(42)} &= \delta^{1.5} \oplus \delta^{20.85}\gamma_2 \oplus \delta^{33.95}\gamma\gamma_2 \\ A_{33}^{(42)} &= \delta^{24.45}\gamma\gamma_3 \oplus \delta^{37.55}\gamma^2\gamma_3 \\ A_{34}^{(42)} &= \delta^{26.4}\gamma\gamma_4 \oplus \delta^{38.85}\gamma^2\gamma_4 \\ A_{35}^{(42)} &= \delta^{25.3}\gamma\gamma_5 \oplus \delta^{37.75}\gamma^2\gamma_5 \\ A_{36}^{(42)} &= \delta^{23.95}\gamma\gamma_6 \oplus \delta^{37.05}\gamma^2\gamma_6 \\ \\ A_{41}^{(42)} &= \delta^{24.75}\gamma_1 \oplus \delta^{37.85}\gamma\gamma_1 \\ A_{42}^{(42)} &= \delta^{22.75}\gamma_2 \oplus \delta^{35.85}\gamma\gamma_2 \\ A_{43}^{(42)} &= \delta^{1.5} \oplus \delta^{18.85}\gamma_3 \oplus \delta^{31.95}\gamma\gamma_3 \\ A_{44}^{(42)} &= \delta^{19.3}\gamma\gamma_4 \oplus \delta^{34.9}\gamma^2\gamma_4 \oplus \delta^{47.35}\gamma^3\gamma_4 \\ A_{45}^{(42)} &= \delta^{27.2}\gamma\gamma_5 \oplus \delta^{39.65}\gamma^2\gamma_5 \\ A_{46}^{(42)} &= \delta^{25.85}\gamma\gamma_6 \oplus \delta^{38.95}\gamma^2\gamma_6 \\ \\ A_{51}^{(42)} &= \delta^{26.35}\gamma_1 \oplus \delta^{39.45}\gamma\gamma_1 \\ A_{52}^{(42)} &= \delta^{24.35}\gamma_2 \oplus \delta^{37.45}\gamma\gamma_2 \\ A_{53}^{(42)} &= \delta^{20.45}\gamma_3 \oplus \delta^{33.55}\gamma\gamma_3 \\ A_{54}^{(42)} &= \delta^{1.2} \oplus \delta^{14.3}\gamma_4 \oplus \delta^{29.9}\gamma\gamma_4 \oplus \delta^{42.35}\gamma^2\gamma_4 \\ A_{55}^{(42)} &= \delta^{19.2}\gamma\gamma_5 \oplus \delta^{34.8}\gamma^2\gamma_5 \oplus \delta^{47.25}\gamma^3\gamma_5 \\ A_{56}^{(42)} &= \delta^{27.45}\gamma\gamma_6 \oplus \delta^{40.55}\gamma^2\gamma_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{61}^{(42)} &= \delta^{27.35}\gamma_1 \oplus \delta^{40.45}\gamma\gamma_1 \\
A_{62}^{(42)} &= \delta^{25.35}\gamma_2 \oplus \delta^{38.45}\gamma\gamma_2 \\
A_{63}^{(42)} &= \delta^{21.45}\gamma_3 \oplus \delta^{34.55}\gamma\gamma_3 \\
A_{64}^{(42)} &= \delta^{15.3}\gamma_4 \oplus \delta^{30.9}\gamma\gamma_4 \oplus \delta^{43.35}\gamma^2\gamma_4 \\
A_{65}^{(42)} &= \delta^{1.2} \oplus \delta^{14.2}\gamma_5 \oplus \delta^{29.8}\gamma\gamma_5 \oplus \delta^{42.25}\gamma^2\gamma_5 \\
A_{66}^{(42)} &= \delta^{6.7}\gamma_6 \oplus \delta^{28.45}\gamma\gamma_6 \oplus \delta^{41.55}\gamma^2\gamma_6
\end{aligned}$$

On pourrait vérifier que le dernier coefficient  $A_{66}^{(42)}$  représente effectivement des circuits passant par la transition de sortie de la pièce 6 et par les transitions internes. En particulier, on a le monôme  $\delta^{6.7}\gamma_6$  qui correspond au circuit physique la pièce 6, ce qui est conforme avec la 6 ième colonne du tableau IX.1. On obtient alors en 20 mn à l'issue de cette énumération sans simplifications 338 circuits qui se réduisent via BASILE aux mêmes 25 circuits. Cette méthode est donc provisoirement plus rapide.

En traduisant l'ensemble minimal de 25 circuits obtenu plus haut, on obtient l'expression formelle suivante du taux de production comme min de 25 fonctions affines:

$$\begin{aligned}
\lambda(q) = \min(&0.1562500000q_4, 0.1492537313q_6, 0.09615384615q_1, 0.08130081301, \\
&0.07874015748q_2, 0.07575757576q_5, \\
&0.05899705015q_3, \\
&0.03533568905 + 0.03533568905q_4, \\
&0.03490401396 + 0.03490401396q_6, \\
&0.03478260870 + 0.03478260870q_1, \\
&0.03472222222 + 0.03472222222q_5, \\
&0.03372681282 + 0.03372681282q_2, \\
&0.03327787022 + 0.03327787022q_3, \\
&0.04907975460 + 0.02453987730q_4, \\
&0.04848484848 + 0.02424242424q_5, \\
&0.02418379686 + 0.02418379686q_4 + 0.02418379686q_6, \\
&0.02412545235 + 0.02412545235q_1 + 0.02412545235q_4, \\
&0.04790419162 + 0.02395209581q_6, \\
&0.04778972520 + 0.02389486260q_1, \\
&0.02333722287 + 0.02333722287q_2 + 0.02333722287q_6, \\
&0.02328288708 + 0.02328288708q_1 + 0.02328288708q_2, \\
&0.02229654404 + 0.02229654404q_2 + 0.02229654404q_4, \\
&0.02205071665 + 0.02205071665q_2 + 0.02205071665q_5, \\
&0.01800180018 + 0.01800180018q_2 + 0.01800180018q_4 + 0.01800180018q_6, \\
&0.01796945193 + 0.01796945193q_1 + 0.01796945193q_2 + 0.01796945193q_4)
\end{aligned}$$

Cohen, Dubois, Quadrat et Viot ont appliqué l'algorithme suivant pour saturer la machine menante:

### 5.2.1 Algorithme

- 1/ commencer avec 1 palette par type de pièce
- 2/ calculer le taux de production
- 3/ si la machine menante n'est pas saturée, rajouter une palette sur un circuit critique, et recommencer en 2/.

Cohen, Dubois, Quadrat et Viot calculaient le taux de production à chaque étape par l'algorithme de Karp (cf. VIII.2.2.2). Nous calculons ici ce taux de manière immédiate par évaluation de

l'expression formelle de  $\lambda$  ci-dessus. Nous reprenons la suite de répartitions des palettes obtenue dans [23] par application de 5.2.1, et donnons à chaque étape le taux de production. Les résultats coïncident avec ceux de [23].

répartition des palettes ( $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ )	$\lambda$ (unité de temps)
(1, 1, 1, 1, 1, 1)	16.95
(1, 1, 2, 1, 1, 1)	15.11666667
(1, 1, 2, 1, 2, 1)	14.95
(1, 2, 2, 1, 2, 1)	14.375
(2, 2, 2, 1, 2, 1)	14.325
(2, 2, 2, 1, 2, 2)	14.15
(2, 2, 2, 2, 2, 2)	12.3

Ainsi, on trouve que la machine menante est saturée pour la dernière répartition (deux palettes pour chaque type de pièce). Cependant, par l'algorithme itératif 5.2.1, on ne peut savoir s'il y a d'autres répartitions minimales saturantes. Nous montrons ce résultatat à l'aide de l'expression formelle de  $\lambda$ .

### 5.2.2 Proposition *L'unique répartition minimale des palettes saturant la machine menante est*

$$q = (2, 2, 2, 2, 2, 2) .$$

**Preuve** La machine menante est saturéessi  $\sigma(c)$  est égale à la pente correspondante à la partie constante de  $c$ , i.e.

$$\sigma(\gamma\delta^{12,3}) = \frac{1}{12.3} ,$$

ce qui est réaliséssi pour tout monôme  $m$  de  $c$ , on a  $\sigma(m) \geq \frac{1}{12.3}$ . Nous inspectons successivement les monômes, et prenons la plus petite valeur entière de  $q$  satisfaisant les inégalités.

$$\begin{aligned} \sigma(\delta^{6,4}\gamma_4) &= \frac{q_4}{6.6} \geq \frac{1}{12.3} &\Rightarrow q_4 \geq 1 \\ \sigma(\delta^{6,7}\gamma_6) &= \frac{q_6}{6.7} \geq \frac{1}{12.3} &\Rightarrow q_6 \geq 1 \\ \sigma(\delta^{10,4}\gamma_1) &= \frac{q_1}{10.4} \geq \frac{1}{12.3} &\Rightarrow q_1 \geq 1 \\ \sigma(\delta^{12,7}\gamma_2) &= \frac{q_2}{10.4} \geq \frac{1}{12.3} &\Rightarrow q_2 \geq 2 \\ \sigma(\delta^{13,2}\gamma_5) &= \frac{q_5}{13.2} \geq \frac{1}{12.3} &\Rightarrow q_5 \geq 2 \\ \sigma(\delta^{16,95}\gamma_3) &= \frac{q_3}{16.95} \geq \frac{1}{12.3} &\Rightarrow q_3 \geq 2 \\ \sigma(\delta^{28,3}\gamma\gamma_4) &= \frac{q_4+1}{28.3} \geq \frac{1}{12.3} &\Rightarrow q_4 \geq 2 \\ \sigma(\delta^{28,65}\gamma\gamma_6) &= \frac{q_6+1}{28.65} \geq \frac{1}{12.3} &\Rightarrow q_6 \geq 2 \\ \sigma(\delta^{28,75}\gamma\gamma_1) &= \frac{q_1+1}{28.75} \geq \frac{1}{12.3} &\Rightarrow q_1 \geq 2 \end{aligned}$$

Ainsi, une répartition saturante vérifie nécessairement  $q \geq (2, 2, 2, 2, 2, 2)$ . On a vu plus haut que cette répartition saturait effectivement la machine menante, d'où le résultat. ■

**5.2.3 Remarque** En général, on n'a pas unicité de la répartition minimale des ressources. Soit par exemple l'ensemble de circuits

$$c' = \gamma\delta^5 \oplus \delta^{10}\gamma_1\gamma_2 .$$

On trouve en raisonnant comme ci dessus les trois répartitions minimales suivante

$$q = (q_1, q_2) = (2, 0), \quad (1, 1), \quad (0, 2) .$$

## 6 Formulation en termes de vecteurs propres

Classiquement, on a au moins deux points de vue pour les problèmes de valeurs propres: a/ passer par le polynôme caractéristique, et b/ passer par une étude des vecteurs propres. Les développements qui précédent sont l'analogue de a/ (cf. en particulier 3.1.12). Nous allons voir que l'approche b/ conduit ici à un nouveau problème de programmation linéaire.

### 6.1 Equivalence à la recherche d'un sous-vecteur propre

**6.1.1 Position du problème** Dans la suite, nous considérons un graphe d'événements temporisé, représenté de la manière suivante:  $T_{ij}$  représente le temps de séjour dans la place<sup>3</sup> ( $ij$ ).  $N_{ij}$  représente le nombre de jetons du marquage initial de cette place. Si ce marquage est fixé,  $N_{ij}$  est une constante. Si la place ( $ij$ ) correspond à une ressource  $l$ , on aura  $N_{ij} = q_l$ , où  $q_l$  est l'indéterminée associée à cette ressource. On notera  $N(q)$  au lieu de  $N$  pour rappeler cette dépendance. On suppose que les transitions sont temporisées à 0, ce qui ne restreint pas la généralité (cf. [23]). Quitte à écrire autant de problèmes d'optimisation des ressources qu'il y a de composantes connexes dans le graphe, on pourra supposer le graphe connexe. On notera  $\lambda(q)$  le taux de production en fonction des ressources, et l'on se donne  $\lambda_0$  un taux de production souhaité.

Le résultat central est le suivant:

**6.1.2 Théorème** *Pour le système décrit en 6.1.1, les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i)  $\lambda(q) \geq \lambda_0$
- (ii)  $\rho(C(q)) \leq e$  dans  $\mathbb{R}_{\min}$ , où la matrice  $C(q)$  est donnée par  $C_{ij}(q) = N_{ij}(q) - \lambda_0 T_{ij}$ .
- (iii) il existe un vecteur  $u$  à coefficients dans  $\mathbb{R}_{\min}$  tel que  $C(q) \otimes u \leq u$ .

On a noté  $\rho(C)$  le rayon spectral de la matrice  $C$  dans  $\mathbb{R}_{\min}$  (cf. IV,1.3.1), i.e. dans l'algèbre habituelle:

$$\rho(C) = \min_{k \geq 1} \min_{i_1, \dots, i_k} \frac{C_{i_1 i_2} + C_{i_2 i_3} + \dots + C_{i_k i_1}}{k} . \quad (6.1.a)$$

La condition (iii) se réécrit dans l'algèbre habituelle<sup>4</sup>

$$\forall i, \quad \min_j (C_{ij}(q) + u_j) \geq u_i ,$$

soit

$$\forall i, j, \quad N_{ij}(q) - \lambda_0 T_{ij} + u_j \geq u_i . \quad (6.1.b)$$

En remplaçant  $N_{ij}(q)$  par l'inconnue  $q_l$  s'il y a lieu (cf. 6.1.1), on constate qu'il s'agit là d'un ensemble de contraintes linéaires en les variables  $u_i$  et  $q_l$ . On a donc comme conséquence immédiate de 6.1.2:

**6.1.3 Corollaire** *Le problème d'optimisation des ressources §1.3 est équivalent au problème de programmation linéaire suivant: "minimiser  $J(q)$ , sous l'ensemble de contraintes (6.1.b), où  $\forall i, u_i \in \mathbb{R}$  et  $\forall l, q_l \in \mathbb{N}$ ".*

---

<sup>3</sup>i.e. la place en aval de la transition  $j$  et en amont de la transition  $i$

<sup>4</sup>On rappelle que  $\preceq$  est l'ordre dual de  $\leq$

**Preuve** du Théorème 6.1.2. (i)  $\Leftrightarrow$  (ii). Etant donné une matrice  $B$ , on définit le poids  $w_B(\alpha)$  du circuit  $\alpha = (i_1, \dots, i_k)$  par  $w_B(\alpha) = B_{i_1 i_2} + \dots + B_{i_k i_1}$  (cf. IV, §1.3,(1.3.d)). D'après VII, §6.6,(6.6.a) on a

$$\lambda(q) = \min_{\alpha \text{ circuit}} \frac{w_N(\alpha)}{w_T(\alpha)}. \quad (6.1.c)$$

Les assertions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{aligned} & \lambda(q) \geq \lambda_0 \\ \text{Pour tout circuit } \alpha, \quad & \frac{w_N(\alpha)}{w_T(\alpha)} \geq \lambda_0 \quad (\text{par (6.1.c)}) \\ \text{Pour tout circuit } \alpha, \quad & w_N(\alpha) \geq \lambda_0 w_T(\alpha) \\ \text{Pour tout circuit } \alpha, \quad & w_N(\alpha) - \lambda_0 w_T(\alpha) \geq 0 \\ \text{Pour tout circuit } \alpha, \quad & w_C(\alpha) \geq 0 \\ & \rho(C) \geq 0. \quad (\text{d'après (6.1.a)}). \end{aligned}$$

On a montré (i)  $\Leftrightarrow$  (ii). L'équivalence de (ii) et de (iii) résulte du Lemme 1.3.8 du Chapitre IV. ■

## 6.2 Lien avec l'algorithme de Proth et Xie

Proth et Xie [83] ont proposé un algorithme réduisant le problème de l'optimisation des ressources à un problème de programmation linéaire mixte. Notre corollaire 6.1.3 constitue une généralisation de ce résultat. L'algorithme optimal que Proth et Xie donnent dans [83] n'est en effet valable que moyennant des restrictions fortes: 1/ il faut se restreindre à une sous classe de graphes d'événements temporisés<sup>5</sup> 2/ il faut supposer que *tous* les marquages initiaux sont indéterminés, ce qui revient à prendre autant de ressources inconnues que de places<sup>6</sup> 3/ il faut supposer que le critère est invariant par tir des transitions<sup>7</sup>. Ces restrictions sont rendues inutiles par le corollaire 6.1.3. En outre, la preuve algébrique de 6.1.3 nous paraît plus simple.

Nous conclurons ce chapitre en comparant les algorithmes d'énumération de circuits et la généralisation 6.1.3 de l'algorithme de Proth et Xie. Il est clair que lorsque le nombre de ressources inconnues est de l'ordre du nombre de places, l'algorithme 6.1.3 sera préférable. La simplification modulo les congruences polyédriques devient en effet rédhibitoire dès que la dimension (i.e. le nombre de ressources) est grande. Par contre, lorsque le nombre de ressources est petit devant la taille du système (i.e. le nombre de places) on pourra via les techniques d'agrégation décrites en §4.1, se ramener à un problème de programmation linéaire de type (1.3.a) dont le nombre d'inconnues est égal au nombre de ressources, et non pas à la taille du système. L'algorithme donné en §4.1 sera alors préférable. On aura en outre, via l'expression formelle  $\lambda(q)$ , une information plus précise sur le système.

---

<sup>5</sup> cf. [83], p. 797 "dans la suite, nous supposerons que le début d'un franchissement n'est possible que si la transition considérée n'est pas active". Une telle restriction interdit par exemple de modéliser le problème suivant: "sachant qu'une machine peut fabriquer une pièce par heure et que plusieurs machines peuvent travailler en parallèle, combien faut-il de machines pour produire 10 pièces par heure?"

<sup>6</sup> Une telle restriction est gênante si une partie du système est "fixée" et non indéterminée. Laftit, Proth et Xie doivent alors recourir à des techniques de pénalisation pour traiter ces cas (cf. [59]).

<sup>7</sup> Moyennant la restriction 2/, l'allocation des ressources  $q$  coïncide avec le marquage initial. On suppose que si  $q'$  est un marquage accessible depuis  $q$ , alors  $J(q') = J(q)$ . Cette restriction pose, entre autres, des problèmes d'initialisation du système. Cela signifie par exemple que l'on prend comme initial un état où les palettes peuvent être à un endroit quelconque de leur cycle, et portent donc des pièces semi-finies.



# Appendice A

## Etude d'une ligne de production déterministe gérée en “Kanban”

### Introduction

Cette étude a été réalisée à l'occasion d'un exposé au groupe de travail “Modélisation et évaluation de performance des systèmes à événements discrets”<sup>1</sup> sur les instances de René David, à qui l'auteur est reconnaissant d'avoir suggéré ce travail. Nous renvoyons le lecteur intéressé à Mascolo, [28], pour une description des systèmes gérés en “Kanban” et pour leur étude d'un point de vue probabiliste.

### 1 Modèle algébrique

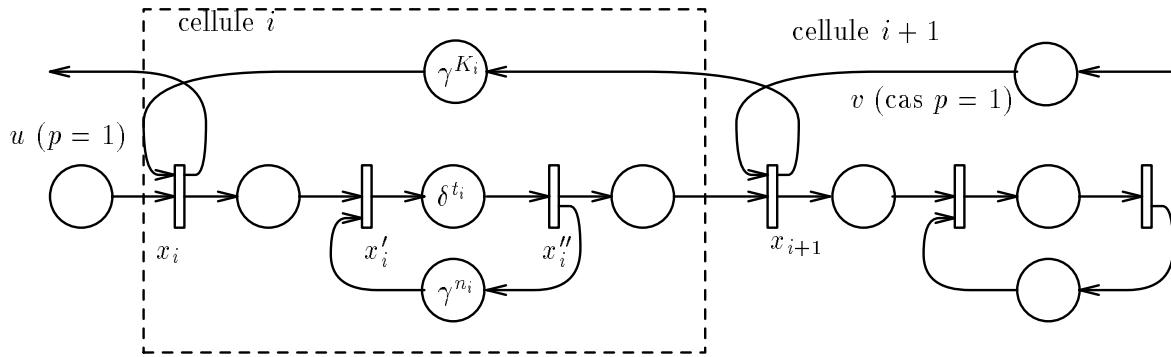
#### 1.1 Modélisation des cellules kanban

On considère la version suivante de la gestion dite “kanban”, tirée de [28]. Une ligne de production est formée de  $i$  cellules. Chaque cellule contient  $n_i$  machines fonctionnant en parallèle. Chaque machine peut traiter une pièce, le traitement prenant un temps  $t_i$ . La pièce traitée est mise dans le stock en amont de la cellule suivante. On suppose en outre que les débuts de tâche sont effectués selon la politique suivante: on fixe un nombre de “kanban” (mot japonais signifiant étiquette)  $K_i$  par cellule. Au départ, les  $K_i$  kanbans sont disposés sur un tableau. Lorsque qu'un nouvelle pièce rentre dans la cellule  $i$  (venant de la cellule  $i - 1$ ), on lui attribue un kanban, que l'on enlève du tableau. S'il n'y a pas de kanban de disponible, on ne prend pas la pièce. Lorsque la pièce est acceptée par la cellule suivante, on enlève le kanban de la pièce, et on remet le kanban libéré sur le tableau. Pour la dernière cellule, on supposera que la gestion des kanbans est conditionnée par la demande, i.e. que l'on libère un kanban lorsqu'une pièce a été demandée. Nous laissons le lecteur se convaincre que le graphe d'événements temporisé représenté sur la Figure A.1 représente effectivement ce système. On trouvera un graphe équivalent dans [28]. On observe que le circuit  $(x_i, x'_i, x''_i, x_{i+1})$  représente le parcours effectif des kanbans de la cellule  $i$ .

En introduisant une entrée  $u$  (correspondant aux pièces entrant dans la première cellule) et une seconde entrée  $v$  (correspondant à la demande reçue par la dernière cellule), représentée sur la Figure dans le cas d'une seul cellule, on obtient le système d'équations suivant décrivant la solution

---

<sup>1</sup>GT1, Pôle Systèmes à événements discrets, Groupement de Recherche Automatique



$K_i$ : nombre de kanbans dans la cellule  $i$

$n_i$ : nombre de machines dans la cellule  $i$

$t_i$ : temps de l'opération  $i$

Figure A.1: Ligne de production générique gérée en "kanban"

au plus tôt:

$$\begin{cases} x_i = x''_{i-1} \oplus \gamma^{K_i} x_{i+1} \\ x'_i = x_i \oplus \gamma^{n_i} x''_i \\ x''_i = \delta^{t_i} x'_i \\ x_1 = u \oplus \gamma^{K_1} x_2 \\ x_{p+1} = v \end{cases}$$

En éliminant  $x''_i$ :

$$x'_i = x_i \oplus \gamma^{n_i} \delta^{t_i} x'_i = (\gamma^{n_i} \delta^{t_i})^* x_i$$

Finalement,

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \delta^{t_i} (\gamma^{n_i} \delta^{t_i})^* x_i \oplus \gamma^{K_{i+1}} x_{i+2} \\ x_1 &= \gamma^{K_1} x_2 \oplus u \\ x_{p+1} &= v \end{aligned} \tag{1.1.a}$$

où  $u$  représente les matières premières et  $v$  la demande. Il résulte en particulier de (1.1.a) que la ligne de production se représente par le graphe d'événements équivalent donné sur la Figure A.2 (lequel donne lieu aux mêmes équations).

## 1.2 Transfert d'une ligne kanban

On peut écrire pour (1.1.a) l'équation matricielle  $X = AX \oplus BU$ ,  $y = CX$ , avec:

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma^{K_1} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \delta^{t_1} (\gamma^{n_1} \delta^{t_1})^* & \varepsilon & \gamma^{K_2} & \varepsilon & \vdots \\ \varepsilon & \delta^{t_2} (\gamma^{n_2} \delta^{t_2})^* & \varepsilon & \gamma^{K_3} & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & & \gamma^{K_p} \\ \varepsilon & \dots & \varepsilon & \delta^{t_p} (\gamma^{n_p} \delta^{t_p})^* & \varepsilon \end{bmatrix}$$

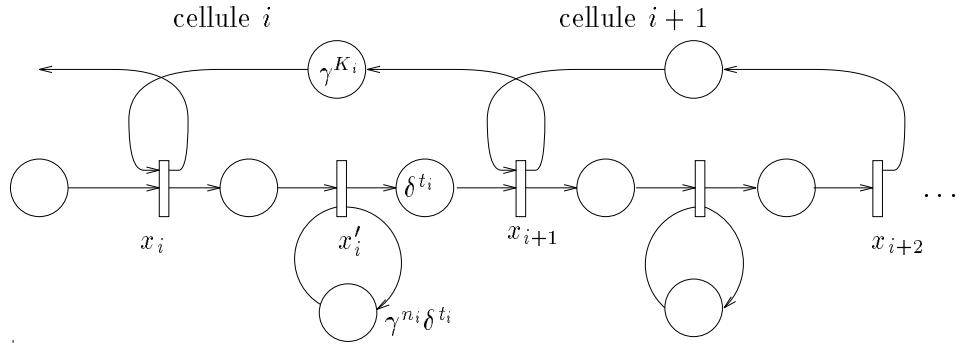


Figure A.2: Ligne de production équivalente à A.1

$$B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \varepsilon & \dots & \varepsilon & e \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

Soit la relation  $y = CA^*BU$ .

### 1.2.1 Cas à une cellule

On a alors

$$x_2 = (\gamma^{n_1} \delta^{t_1})^* \delta^{t_1} (u \oplus \gamma^{K_1} x_2) \oplus \gamma^{K_2} v$$

Il résulte de  $(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^*$  et  $b^*(ab^*)^* = (a \oplus b)^*$  avec  $a = \gamma^{K_1} \delta^{t_1}$  et  $b = \gamma^{n_1} \delta^{t_1}$  (cf. 0.4.1.6) que

$$(a \oplus b)^* = (\gamma^{K_1} \delta^{t_1} \oplus \gamma^{n_1} \delta^{t_1})^* = (\gamma^{\min(K_1, n_1)} \delta^{t_1})^*.$$

D'où le transfert:

$$y = \delta^{t_1} (\gamma^{\min(K_1, n_1)} \delta^{t_1})^* u \oplus [e \oplus \gamma^{K_1} \delta^{t_1} (\gamma^{\min(K_1, n_1)} \delta^{t_1})^*] v$$

## 1.3 Équations générales du transfert

On peut voir (1.1.a) comme un système avec des conditions limites aux deux bouts. Une manière de le résoudre sans inverser brutalement la matrice  $A$  consiste à chercher  $x_i$  sous la forme

$$x_i = \alpha_i u_i \oplus \beta_i x_{i+1} .$$

### 1.3.1 Théorème

*Le transfert de la ligne kanban à  $n$  cellules est donné par*

$$y = \alpha_{p+1} u \oplus \beta_{p+1} v$$

où les  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  vérifient la récurrence suivante:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= e, \quad \beta_1 = \gamma^{K_1} \\ 2 \leq i \leq p-1 : & \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{i+1} = (\beta_i \delta^{t_i} (\gamma^{n_i} \delta^{t_i})^*)^* \delta^{t_i} (\gamma^{n_i} \delta^{t_i})^* \alpha_i \\ \beta_{i+1} = (\beta_i \delta^{t_i} (\gamma^{n_i} \delta^{t_i})^*)^* \gamma^{K_{i+1}} \end{array} \right. \\ \beta_{p+1} &= (\beta_p \delta^{t_p} (\gamma^{n_p} \delta^{t_p})^*)^*, \quad \alpha_{p+1} = (\beta_p \delta^{t_p} (\gamma^{n_p} \delta^{t_p})^*)^* \delta^{t_p} (\gamma^{n_p} \delta^{t_p})^* . \end{aligned}$$

**Preuve** On a en effet:

$$x_{i+1} = \delta^{t_1}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*x_i \oplus \gamma^{K_{i+1}}x_{i+2} = \delta^{t_1}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*(\alpha_i u_i \oplus \beta_i x_{i+1}) \oplus \gamma^{K_{i+1}}x_{i+2} .$$

La récurrence ci-dessus s'obtient en éliminant  $x_{i+1}$  du second membre (cf. 0.4.1.1) et en identifiant les coefficients de  $u$  et  $v$ . ■

**1.3.2 Remarque** On peut voir la récurrence donnée dans le théorème 1.3.1 ci-dessus comme une inversion "creuse" de la matrice bi-diagonale  $A$ .

**1.3.3 Cas de  $p$  cellules identiques** On a alors l'expression simple du transfert:

$$y = \delta^{pt}(\gamma^{\min(K,n)}\delta^t)^*u \oplus [e \oplus \gamma^K\delta^t(\gamma^{\min(K,n)}\delta^t)^*]v ,$$

comme il résulte d'une récurrence immédiate.

Nous interprétons maintenant ces résultats.

## 1.4 Réponse à la demande d'une cellule Kanban

On a représenté sur la Figure A.3 le transfert associé à une seule cellule. On considère le cas où

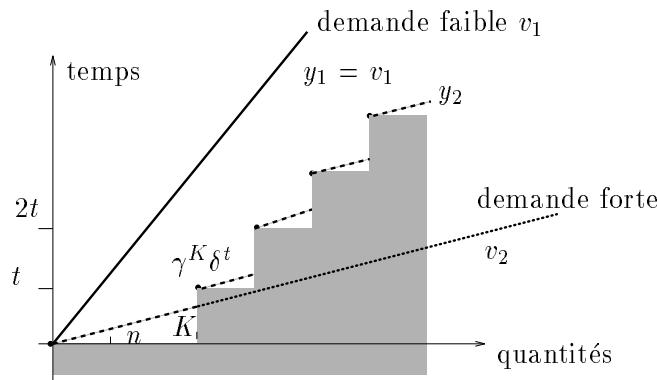


Figure A.3: Transfert d'un cellule Kanban

$u = \varepsilon$  (i.e. l'approvisionnement est non contraignant), ce qui revient à isoler le transfert liant la demande à la sortie, i.e.

$$y = [e \oplus \gamma^K\delta^t(\gamma^{\min(K,n)}\delta^t)^*]v .$$

On a pris le cas particulier où la demande est constante (et donc la demande cumulée  $v$  est une droite). On constate qu'une demande au plus égale au taux de production de la cellule est servie instantanément, i.e. que la sortie est égale à l'entrée (courbe pleine). Si la demande est plus forte, on sert instantanément les  $K$  pièces en stock, et le service a ensuite lieu aux taux moyen de la cellule (courbe pointillée). La partie grisée représente la série de transfert (cf. VII, Figure VII.4).

## 1.5 Cas à $p$ cellules

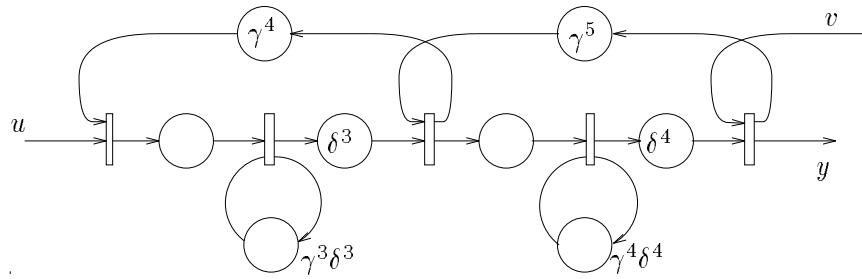
On considère maintenant une demande infinie  $v = \varepsilon$ . On a alors la relation fort simple:

$$y = \delta^{pt}(\gamma^{\min(K,n)}\delta^t)^*u .$$

Le retard  $\delta^{pt}$  correspond au temps de traversée de la chaîne de production. Le terme  $(\gamma^{\min(K,n)}\delta^t)^*$  est l'analogue discret du limiteur de débit au taux  $\min(K,n)/t$  étudié au chapitre V.

## 2 Exemples

### 2.1 Un exemple de calcul de transfert



On a écrit une routine `makekanban` qui génère le triplet  $(A, B, C)$  relatif à la ligne de production donnée par la liste des  $[K_i, t_i, n_i]$ .

```
MAX> Cells_list:=[[4,3,3],[5,4,4]];
MAX> s:=makekanban(Cells_list): 12p(s);

$$\left[ \begin{array}{ccc} \varepsilon & \gamma^4 & \varepsilon \\ \delta^3 (\gamma^3 \delta^3)^* & \varepsilon & \gamma^5 \\ \varepsilon & \delta^4 (\gamma^4 \delta^4)^* & \varepsilon \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{array} \right], \left[ \begin{array}{ccc} \varepsilon & \varepsilon & e \end{array} \right]$$

MAX> h:=evald(s[3]&star(s[1]) &s[2]): 12p(h);

$$[\delta^7 \oplus \gamma^3 \delta^{10} \oplus \gamma^4 \delta^{11} \oplus \gamma^6 \delta^{13} (\gamma \delta)^*, \quad e \oplus \gamma^5 \delta^4 \oplus \gamma^9 \delta^8 \oplus \gamma^{12} \delta^{10} (e \oplus \gamma \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^3) (\gamma^4 \delta^4)^*]$$


```

On a également programmé la récurrence du Théorème 1.3.1. La routine `kanban2bidiag` génère sous forme creuse la matrice bi-diagonale  $A$  et la routine `invertbidiag` calcule le couple  $[\alpha_{p+1}, \beta_{p+1}]$ .

```
MAX> m:=kanban2bidiag(Cells_list): 12p(m);

$$[[\gamma^4, \delta^3 (\gamma^3 \delta^3)^*], [\gamma^5, \delta^4 (\gamma^4 \delta^4)^*]]$$

MAX> t:=invertbidiag(m): 12p(t);

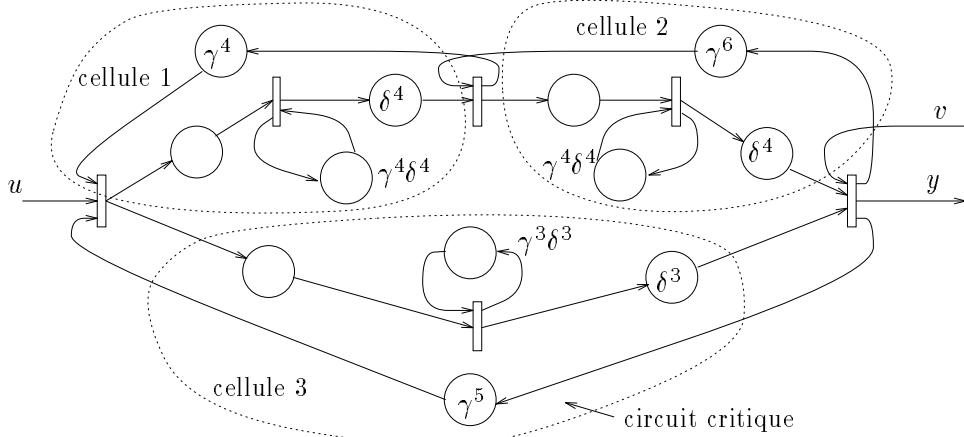
$$[\delta^7 \oplus \gamma^3 \delta^{10} \oplus \gamma^4 \delta^{11} \oplus \gamma^6 \delta^{13} (\gamma \delta)^*, \quad e \oplus \gamma^5 \delta^4 \oplus \gamma^9 \delta^8 \oplus \gamma^{12} \delta^{10} (e \oplus \gamma \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^3) (\gamma^4 \delta^4)^*]$$


```

qui coïncide avec le résultat précédent. On constate que la période du transfert liant  $u$  à la sortie est le pgcd des longueurs des circuits du graphe (“effet Frobenius”). Si la demande  $v$  est infinie, et pour une impulsion  $u = e$ , on aura donc un régime périodique ultime de 1 pièce produite par unité de temps.

## 2.2 Un exemple d'optimisation des kanbans

Afin de compliquer la situation, on a mis deux lignes de production kanban en parallèle. Le graphe d'événements ci-dessous représente ainsi un système démarrant deux tâches lorsque qu'une pièce rentre. On aura par exemple un tel système lorsque les pièces sont formées de deux parties complémentaires, et que chaque partie est traitée par une ligne de production distincte.



$$a = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma^4 & \gamma^5 \\ \delta^4 (\gamma^4\delta^4)^* & \varepsilon & \gamma^6 \\ \delta^3 (\gamma^3\delta^3)^* & \delta^4 (\gamma^4\delta^4)^* & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} \delta^8 (e \oplus \gamma^4\delta^4) (\gamma^5\delta^8)^* & e \oplus \gamma^5\delta^8 (e \oplus \gamma^4\delta^4) (\gamma^5\delta^8)^* \end{bmatrix}$$

Avec 8 kanbans au lieu de 5 dans la cellule 3

$$a' = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma^4 & \gamma^8 \\ \delta^4 (\gamma^4\delta^4)^* & \varepsilon & \gamma^6 \\ \delta^3 (\gamma^3\delta^3)^* & \delta^4 (\gamma^4\delta^4)^* & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$h' = \begin{bmatrix} \delta^8 (\gamma^4\delta^4)^* & e \oplus \gamma^6\delta^4 \oplus \gamma^8\delta^8 (\gamma^4\delta^4)^* \end{bmatrix}$$

Toutes les cellules deviennent saturées avec cette allocation de kanbans.

On peut retrouver ce résultat en introduisant des indéterminées  $\gamma_i = \gamma^{K_i}$ , où  $K_i$  dénote le nombre de kanbans dans la cellule  $i$ , et en optimisant les ressources. Soit

```
MAX> a:=p21(array( [[eps,g1,g3],[d^4,eps,g2],[d^3, d^4,eps]]),3);
```

$$a = \begin{bmatrix} \varepsilon & \gamma_1 & \gamma_3 \\ \delta^4 & \varepsilon & \gamma_2 \\ \delta^3 & \delta^4 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

MAX> c:=enum(a,p2l(g<sup>3</sup>\*d<sup>3</sup>+g<sup>4</sup>\*d<sup>4</sup>))  
 (on énumère les circuits modulo les circuits locaux).

$$c = \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^4 \oplus \delta^4\gamma_1 \oplus \delta^4\gamma_2 \oplus \delta^8\gamma_3$$

MAX> l:= p2const(c)

$$l = \min\left(1, \frac{K_1}{4}, \frac{K_2}{4}, \frac{K_3}{8}\right)$$

En retrouve bien la contrainte  $K_3 \geq 8$  pour que le taux de production soit optimal ( $l = 1$ ).

### 2.3 Annexe: les routines kanban2bidiag et invertbidiag

Nous donnons à titre d'exemple de programmes MAX les deux routines qui permettent de calculer le transfert d'une ligne de production d'après la récurrence du Théorème 1.3.1.

```

#
# CALLING SEQUENCE:
#   kanban2bidiag(<list of cells>)
#
# SYNOPSIS
#   returns the bidiagonal matrix associated to the kanban line
#   described by the list of cells.
#
# PARAMETERS
#   the list of cells has the following form:
#   [CELL1,CELL2,...,CELLp]
#   where CELLi=[number of kanbans in cell i,
#   processing time in cell i
#   number of machines in cell i]
#   e.g. <list of cells>= [[3,2,2],[5,3,2]] describes two cells
#   second cell with 5 kanbans, proc. time 3, 2 machines.
#
#   kanban2bidiag:=proc(C_LIST)
map(proc(u) [p2l(g^u[1]), p2l(d^u[2])&*star(p2l(g^u[3]*d^u[2]))] end,C_LIST)
end:
#
#
# CALLING SEQUENCE:
#   invertbidiag(<bidiagonal matrix>)
#
# SYNOPSIS
#   Returns the two coeffs (n+1,1) and (n+1,n+1)
#   of the star of the bidiagonal matrix
#   (0, a_1, 0, ... 0)
#   (b_1, 0, a_2, ... 0)
#   (0, b_2, 0, ... 0)
#   (0, ... 0, a_n)
#   (0, ... 0, b_n, 0)
#   given in sparse form u=[[a_1,b_1],...,[a_n,b_n]]
#   u can be produced as the output of kanban2bidiag
#
#   invertbidiag:=proc(u)

local i,current_star,alpha,beta,n;
n:=nops(u);
alpha:=p2l(e);
beta:=u[1][1];

```

```
for i from 1 to n-1 do
    current_star:=star(u[i][2]&*beta);
    alpha:=current_star&*u[i][2]&*alpha;
    beta:=current_star&*u[i+1][1];
od;
current_star:=star(u[n][2]&*beta);
alpha:=current_star&*u[n][2] &*alpha;
[alpha,current_star];
end;
```

## Appendice B

# Questions algorithmiques

### Introduction

Nous avons rassemblé dans cette annexe les problèmes algorithmiques liés à l'algèbre rationnelle des opérateurs  $\gamma$  et  $\delta$  étudiés au Chapitre VII ainsi qu'à l'optimisation des ressources. Le trait commun est de travailler dans des dioïdes de polynômes et séries formelles quotientés. On montre sous des hypothèses assez générales l'existence d'un unique représentant minimal d'un polynôme, qui géométriquement s'obtient en supprimant les monômes dominés pour une relation d'ordre naturelle, dite de redondance. On donne ensuite les règles de calcul sur ces représentants. La seconde partie de cette annexe produit des formes canoniques pour les séries périodiques et les algorithmes de réduction pour les sommes, produit et autres opérations sur les séries périodiques. Nous concluons en indiquant comment les cyclicités des matrices peuvent être calculées à l'aide d'algorithmes classiques.

### 1 Calcul dans des dioïdes de polynômes quotientés

#### 1.1 Représentant canonique d'un polynôme

On a eu au Chapitre VII à manipuler des polynômes de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ , et plus généralement, des polynômes à  $n$  variables modulo certaines congruences (par exemple dans le chapitre sur l'optimisation des ressources). Il est pour cela utile d'avoir une forme canonique de ces objets (test d'égalité dans le dioïde quotient, etc). Dans le cas du dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ , on a pu prendre pour forme canonique d'un polynôme son représentant minimal, qui se déterminait aisément "géométriquement". Nous donnons trois autres exemples de dioïdes quotients pour lesquels on cherche des résultats analogues de représentant minimal.

**1.1.1 Exemple (Congruence modulo  $p^*$ )** Soit un polynôme  $p \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ , et

$$\varphi_p : \quad \varphi_p(s) = sp^* .$$

Soit  $q \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . Existe-t-il un élément minimal dans la classe d'équivalence de  $q$  modulo  $\varphi_p$ .

**1.1.2 Exemple (Dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_i, \delta]]$ )** Soient  $p+2$  indéterminées  $\delta, \gamma_0, \dots, \gamma_p$ . On introduit l'application:

$$\varphi : \mathbb{B}[[\gamma_i, \delta]] \rightarrow \mathbb{B}[[\gamma_i, \delta]], \quad s \mapsto (\bigotimes_i \gamma_i^*)(\delta^{-1})^* s$$

et l'on note  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma_i, \delta]] = \mathbb{B}[[\gamma_i, \delta]]/\varphi$  (généralisation de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ ). Un polynôme  $p \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma_i, \delta]$  admet-il un représentant minimal?

**1.1.3 Exemple (Congruence polyédrique modulo  $\mathcal{C}_u$ )** Soient  $u_1, \dots, u_k$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathcal{C}$  le cône polyédrique

$$\mathcal{C}_u = \mathbb{R}^+ u_1 + \dots + \mathbb{R}^+ u_k .$$

On considère le morphisme

$$\varphi : (\mathcal{P}(\mathbb{R}^p), \cup, +) \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{R}^p) + \mathcal{C}_u, \cup, +), \quad \varphi(s) = s + \mathcal{C}_u .$$

Une partie *finie* de  $\mathbb{R}^p$  admet-elle un représentant minimal modulo la congruence associée à  $\varphi$ ?

## 1.2 Un résultat général de représentant minimal

La notion suivante jouera pour nous un rôle important:

**1.2.1 Définition (d-primalité)** L'élément  $a$  d'un dioïde complet  $\mathcal{D}$  est dit<sup>1</sup> d-premier si pour toute famille  $\{p_i\}_{i \in I}$  d'éléments de  $\mathcal{D}$ , on a:

$$a \preceq \bigoplus_{i \in I} p_i \implies \exists i \in I, \quad a \preceq p_i . \quad (1.2.a)$$

On notera  $\text{DP } \mathcal{D}$  l'ensemble des éléments d-premiers de  $\mathcal{D}$ .

**1.2.2 Exemple** Dans  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ , les éléments d-premiers sont les monômes. Même résultat dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . Dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ , tous les éléments sauf  $+\infty$  sont d-premiers. Dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ , il n'y a pas d'élément d-premiers (car  $x \preceq \sup\{t \mid t \prec x\}$  et  $x$  n'est majoré par aucun des  $t \prec x$ ).

**1.2.3 Remarque** En Théorie des Treillis, cf. [43], on appelle *co-premiers* les éléments  $a$  vérifiant la propriété (1.2.a) avec des familles  $\{p_i\}_{i \in I}$  finies. Si l'on qualifie de *compacts* les éléments  $a$  vérifiant  $a \preceq \bigoplus_{i \in I} p_i \Rightarrow \exists J \subset I$  finie t.q.  $a \preceq \bigoplus_{j \in J} p_j$ , on constate que les éléments d-premiers sont exactement les co-premiers compacts. Le lecteur pourra vérifier que les résultats de représentation minimale qui suivent restent vrais si l'on ne suppose pas le dioïde  $\mathcal{D}$  complet, à condition de ne considérer que des sommes finies.

Pour simplifier le discours, nous ferons l'hypothèse suivante:

**1.2.4 Hypothèse**  $\mathcal{D}$  est un dioïde complet et tout élément de  $\mathcal{D}$  est somme (éventuellement infinie) de d-premiers.

On a donc un morphisme continu et surjectif de demi-treillis:

$$\psi : \begin{cases} (\mathcal{P}(\text{DP } \mathcal{D}), \cup) & \longrightarrow (\mathcal{D}, \oplus) \\ S & \longmapsto \bigoplus S = \bigoplus_{s \in S} s . \end{cases} \quad (1.2.b)$$

On a en particulier<sup>2</sup>  $x = \bigoplus((\text{DP } \mathcal{D}) \cap \downarrow(x))$ .

---

<sup>1</sup>d comme dioïde

<sup>2</sup>On rappelle la notation  $\downarrow(x) = \{u \mid u \preceq x\}$

**1.2.5 Définition (Partie génératrice)** Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $\mathcal{D}$ . Soit  $S$  un ensemble de  $d$ -premiers. Nous dirons que  $S$  est une partie génératrice de  $x$  modulo  $\mathcal{R}$  si  $(\bigoplus S) \mathcal{R} x$ .

**1.2.6 Exemple** Soit  $E$  un module,  $\mathcal{D} = (\mathcal{P}(E), \cup)$ , et définissons la relation  $\mathcal{R}$ :  $X \mathcal{R} Y$  ssi  $\text{vect}\langle X \rangle = \text{vect}\langle Y \rangle$ . Soit  $x$  une partie de  $E$ . Une partie  $Y \subset E$  est une partie génératrice minimale de  $x$  modulo  $\mathcal{R}$  ssi c'est une partie génératrice minimale (au sens usuel) du module engendré par  $x$ . On a coïncidence avec la notion classique.

On étudie l'existence éventuelle d'une partie génératrice minimale. On a tout d'abord:

**1.2.7 Proposition** La somme des éléments d'une partie génératrice minimale de  $x$  est un représentant minimal de  $x$  (i.e. un élément minimal dans la classe d'équivalence de  $x$  modulo  $\mathcal{R}$ ).

**Preuve** si  $y \mathcal{R} x$ , avec  $x = \bigoplus S$  ( $S$  minimal) et  $y = \bigoplus T$ , on a d'après 1.2.5  $T \supset S$  et par croissance de l'application  $\psi$  donnée en (1.2.b),  $y \succeq x$ . ■

Nous exhibons une classe de congruences pour laquelle on a un résultat simple et effectif de représentant minimal.

**1.2.8 Définition (Bonne congruence)** Nous dirons que  $\mathcal{R}$  est une bonne congruence pour le demi-treillis complet  $(\mathcal{D}, \bigoplus)$  s'il existe une application  $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  telle que  $a \mathcal{R} b$  ssi  $\varphi(a) = \varphi(b)$  et

- (i)  $\varphi$  est croissante et continue (cf. 0.2.3.1).
- (ii)  $\varphi \succeq \text{Id}$ ,
- (iii)  $\varphi \circ \varphi = \varphi$ ,
- (iv)  $\varphi(u) = \varphi(v)$  pour  $u$  et  $v$   $d$ -premiers entraîne  $u = v$ .

On en particulier par (i),(ii) et (iii) que  $\varphi$  est une fermeture (cf. 0.5.1.11). Par (i),  $\mathcal{R}_\varphi$  est compatible avec la structure de demi-treillis complet. On notera indifféremment le demi-treillis quotient  $\mathcal{D}/\varphi$  ou  $\mathcal{D}/\mathcal{R}_\varphi$ . On a clairement l'isomorphisme

$$\mathcal{D}/\varphi \simeq \varphi(\mathcal{D}) . \quad (1.2.c)$$

Notons que la  $d$ -primalité est conservée par passage au quotient:

**1.2.9 Lemme** Si  $x$  est un élément  $d$ -premier de  $\mathcal{D}$ , alors la classe d'équivalence de  $x$  est un  $d$ -premier dans le demi-treillis quotient de  $\mathcal{D}$  par une bonne congruence.

**Preuve** On n'utilise que (i),(ii) et (iii). Si  $\bar{a} \preceq \bigoplus_i \bar{p}_i$  dans  $\mathcal{D}/\varphi$ , on a  $\bar{a} \oplus \bigoplus_i \bar{p}_i = \bigoplus_i \bar{p}_i$ , soit  $\varphi(a \oplus \bigoplus_i p_i) = \varphi(\bigoplus_i p_i)$  d'où comme  $\text{Id} \preceq \varphi$  et par continuité de  $\varphi$ ,  $a \preceq \bigoplus_i \varphi(p_i)$ . Par  $d$ -primalité de  $a$ ,  $a$  est majoré par l'un de ces termes, disons  $\varphi(p_k)$ , d'où  $\varphi(a) \preceq \varphi^2(p_k) = \varphi(p_k)$  d'où  $\bar{a} \preceq \bar{p}_k$ . ■

**1.2.10 Théorème (Partie génératrice minimale)** Tout élément  $a$  somme finie d'éléments  $d$ -premiers admet une unique partie génératrice minimale modulo une bonne congruence.

Le lemme suivant et la notion de redondance associée sont la clé de 1.2.10.

**1.2.11 Lemme** Si  $\varphi$  est une fermeture, alors

$$u \preceq \varphi(v) \Leftrightarrow \varphi(u) \preceq \varphi(v) . \quad (1.2.d)$$

La relation  $\leq_\varphi$  définie par  $u \leq_\varphi v \Leftrightarrow u \preceq \varphi(v)$  est une relation de préordre sur l'ensemble des éléments  $d$ -premiers. En outre, sous l'hypothèse 1.2.8,(iv), c'est une relation d'ordre.

**Preuve** du Lemme. Par 1.2.10,(i)  $\varphi$  est croissante, donc  $u \preceq \varphi(v)$  entraîne  $\varphi(u) \preceq \varphi^2(v) = \varphi(v)$  par 1.2.10,(iii)). Réciproquement, par 1.2.10,(ii)),  $\varphi(u) \preceq \varphi(v)$  entraîne  $u \preceq \varphi(u) \preceq \varphi(v)$ , ce qui montre (1.2.d). Comme  $u \leq_\varphi v \Leftrightarrow \varphi(u) \preceq \varphi(v)$ , il est clair que  $\leq_\varphi$  est réflexive et transitive. L'antisymétrie résulte de 1.2.10,(iv). ■

On a:

- 1.2.12 Propriétés**
- (i) Si  $\varphi$  est une fermeture, alors  $u \preceq v \Rightarrow u \leq_\varphi v$ .
  - (ii) Si  $\varphi$  vérifie 1.2.8,(i), alors  $u$  d-premier et  $u \leq_\varphi \bigoplus_{i \in I} a_i$  entraîne  $\exists j \in I, u \leq_\varphi a_j$ .

**Preuve** (i): résulte seulement de  $\varphi \succeq \text{Id}$ .

(ii): on a  $u \preceq \varphi(\bigoplus_i a_i)$  ssi  $u \preceq \bigoplus_i \varphi(a_i)$  (car  $\varphi$  continu), ce qui est équivalent à  $\exists j \in I, u \preceq \varphi(a_j)$  (par d-primalité de  $u$ ). ■

**1.2.13 Définition ( $\varphi$ -redondance)** Soit  $X = \{x_k\}$  un ensemble de d-premiers. On dira que  $x_i$  est  $\varphi$ -redondant dans  $X$ , ou plus simplement redondant, si  $x_i \leq_\varphi \bigoplus_{k \neq i} x_k$ .

**1.2.14 Lemme** Soit  $\mathcal{R}$  une bonne congruence induite par  $\varphi$ , et  $X$  un ensemble de d-premiers.  $x_i$  est redondant dans  $X$  ssi on a un élément de  $X$ ,  $x_j$ , distinct de  $x_i$ , tel que  $x_i \leq_\varphi x_j$ .

**Preuve** Comme  $x_j \preceq \bigoplus_{k \neq i} x_k$ , la condition  $x_i \leq_\varphi x_j$  entraîne via 1.2.12,(i)  $x_i \leq_\varphi \bigoplus_{k \neq i} x_k$ . Réciproquement, si  $x_i \leq_\varphi \bigoplus_{k \neq i} x_k$ , on a  $j \neq i$  tel que  $x_i \leq_\varphi x_j$  par 1.2.12,(ii). ■

**1.2.15 Lemme** Soit  $\varphi$  une fermeture. Une partie  $X = \{x_i\}_{i \in I}$  génératrice de  $x \in \mathcal{D}/\varphi$  est minimale ssi elle est sans éléments redondants.

**Preuve** Si  $x_i$  est redondant, alors

$$\bigoplus_k x_k = \bigoplus_{k \neq i} x_k \oplus x_i \leq_\varphi \bigoplus_{k \neq i} x_k \quad (1.2.e)$$

L'autre inégalité étant triviale, on a que  $X \setminus \{x_i\}$  est un représentant de  $X$ , et donc  $X$  n'est pas minimal. Réciproquement, si  $X$  n'est pas minimal, on a un représentant de la forme  $X \setminus \{x_i\}$ , d'où  $\bigoplus_k x_k \leq_\varphi \bigoplus_{k \neq i} x_k$ , et donc a fortiori  $x_i \leq_\varphi \bigoplus_{k \neq i} x_k$ . ■

**1.2.16 Proposition** Soit  $\varphi$  une fermeture,  $X \subset \mathbf{DPD}$ . On ne change pas la classe d'équivalence de  $\bigoplus X$  modulo  $\mathcal{R}_\varphi$  en retirant de  $X$  un élément redondant.

**Preuve** On l'a montré incidemment en prouvant l'égalité des membres extrêmes de (1.2.e). ■

**1.2.17 Lemme** Sous l'hypothèse 1.2.4, on a unicité de la partie génératrice minimale d'un élément  $x$  modulo une bonne congruence.

**Preuve** Soient  $S$  et  $T$  deux représentants minimaux de  $a$ . On a  $\bigoplus S \leq_\varphi \bigoplus T$ , d'où par 1.2.12,(ii),

$$\forall s \in S, \exists t_s \in T, s \leq_\varphi t_s . \quad (1.2.f)$$

Semblablement

$$\forall t \in T, \exists s_t \in S, t \leq_\varphi s_t . \quad (1.2.g)$$

On a alors  $s \leq_{\varphi} t_s \leq_{\varphi} s_{t_s}$ , et comme  $s$  ne peut être redondant,  $s = s_{t_s}$ , d'où  $s = t_s$ . Ainsi  $S \subset T$ , et par symétrie,  $S = T$ . ■

**Preuve** du Théorème 1.2.10. 1/ Existence. Il résulte de 1.2.16 et de 1.2.15 qu'en retirant successivement de  $X$  les éléments redondants, on aboutit à un représentant minimal. L'unicité résulte de 1.2.17 . ■

**1.2.18 Définition** Soit  $x \in \mathcal{D}/\varphi$  somme finie de d-premiers, de partie génératrice minimale  $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ . On appellera forme canonique de  $x$  l'écriture suivante:

$$x = \bigoplus_{i=1}^p x_i .$$

**1.2.19 Remarque** Si  $\varphi$  ne vérifie pas la condition d'injectivité sur les d-premiers (iv), on a toujours l'existence (mais non l'unicité) d'un représentant minimal de  $a$ . Deux représentants minimaux  $S$  et  $S'$  sont alors égaux modulo  $\varphi$  (i.e. les ensembles  $\{\varphi(s) \mid s \in S\}$  et  $\{\varphi(s') \mid s' \in S'\}$  coïncident).

**1.2.20 Remarque** La partie “existence” de la preuve ci-dessus ne requiert que le fait que  $\varphi$  soit une fermeture. Soit par exemple dans  $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \cup)$   $\varphi(X) = \text{conv}(X)$  (enveloppe convexe). Les d-premiers sont les singletons.  $\text{conv}$  est clairement une fermeture, mais on n'a pas  $\text{conv}(A \cup B) = \text{conv}(A) \cup \text{conv}(B)$ , ce qui contredit (i). On retrouve de la sorte l'existence d'un ensemble minimal de points ayant même enveloppe convexe que la partie finie  $X$ . Cependant, l'argument d'unicité ci-dessus n'est pas valide: il faudra par exemple plus finement caractériser le représentant minimal comme ensemble des point extrémaux. De même, soit  $E$  un module. Dans  $\mathcal{P}(E)$ , les d-premiers sont les singletons, et en prenant  $\varphi(X) = \text{vect}\langle X \rangle$ , l'argument redonne l'existence d'une famille génératrice minimale d'un sous-module de type fini (l'unicité étant ici notoirement fausse).

**1.2.21 Remarque** On donnera en §1.3 une généralisation partielle du Théorème 1.2.10 aux sommes infinies.

La preuve de 1.2.10 se traduit par l'algorithme suivant:

**1.2.22 Algorithme (Réduction sous forme minimale)** On part d'une partie génératrice de  $a$ ,  $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ .

Soit  $S_i$  le d-premier terme non encore examiné de  $S$

si  $S_i$  est redondant dans  $S$ , alors

supprimer  $S_i$  de  $S$

sinon

$S_i$  a été examiné et l'on recommence une itération.

A l'issue,  $S$  est la partie génératrice minimale de  $a$ .

Dans tous les cas, l'algorithme effectue  $n$  itérations. Dans chaque itération, on compare l'élément  $S_i$  à tous les autres éléments de  $S$ , soit au plus  $n-1$  comparaisons par itération. En tout, l'algorithme requiert  $n \times (n-1)$  comparaisons. Un exemple d'application de cet algorithme est donné ci-dessous en 1.2.24.

### 1.2.23 Application au dioïde $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{B}[[\gamma, \delta]] & \longrightarrow \mathbb{B}[[\gamma, \delta]] \\ a & \longmapsto a\gamma^*(\delta^{-1})^*. \end{cases} \quad (1.2.h)$$

On a  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]] = \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]/\varphi$ . Comme  $\gamma^*(\delta^{-1})^* \succeq e$  et  $(\gamma^*(\delta^{-1})^*)^2 = \gamma^*(\delta^{-1})^*$ ,  $\varphi$  est une fermeture. En outre, on a

$$\varphi(\gamma^n \delta^t) = \bigoplus_{\tau, \nu \geq 0} \gamma^{n-\nu} \delta^{t+\tau}, \quad (1.2.i)$$

et donc  $(n, t)$  est égal à la borne sup (dans  $(\mathbb{Z}, \geq) \times (\mathbb{Z}, \leq)$ ) du support de  $\varphi(\gamma^n \delta^t)$ , ce qui montre que la restriction de  $\varphi$  aux monômes (i.e. aux éléments d-premiers) est injective. On a par 1.2.10 l'existence d'un représentant minimal pour tous les polynômes de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ .

Il résulte immédiatement de (1.2.i) que dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ , la relation  $\leq_\varphi$  s'obtient de la sorte:

$$\gamma^n \delta^t \leq_\varphi \gamma^{n'} \delta^{t'} \Leftrightarrow n \geq n' \text{ et } t \leq t'. \quad (1.2.j)$$

Plus généralement, il suffira pour chacun des dioïdes quotients considérés en 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 de produire un test pour  $u \leq_\varphi v$ ,  $u$  et  $v$  étant des d-premiers, pour appliquer l'algorithme de réduction ci-dessus, ce que nous ferons le moment venu.

**1.2.24 Exemple** Soit à déterminer dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  le représentant minimal de  $p = e + \gamma^3 \delta^3 + \gamma^4 \oplus \gamma^2 \delta^3$ . Comme  $e$  est de plus petite valuation, en appliquant le Lemme 1.2.j, on voit qu'on ne peut avoir  $e \leq_\varphi \gamma^3 \delta^3 + \gamma^4 \oplus \gamma^2 \delta^3$  donc  $e$  est non redondant. On constate ensuite que  $\gamma^3 \delta^3 = \gamma \gamma^2 \delta^3 \leq_\varphi \gamma^2 \delta^3$ , donc on élimine ce monôme, et parmi  $e, \gamma^4, \gamma^2 \delta^3$  qui restent, on constate encore que  $\gamma^4 \leq_\varphi e$ , soit le nouvel ensemble formé de  $e$  et  $\gamma^2 \delta^3$  qui s'avère minimal, car  $\gamma^2 \delta^3 \not\leq_\varphi e$ .

## 1.3 Représentant minimal des séries formelles dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$

Nous montrons dans quelle mesure le Théorème 1.2.10 de représentation minimale des polynômes s'étend aux séries formelles.

**1.3.1 Théorème** Soit  $s \in \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $s$  admet une partie génératrice minimale modulo  $\mathcal{R}_\varphi$  (cf. 1.2.5)
- (ii)  $\forall n, t \in \mathbb{Z}, \text{dat } s(n) < +\infty, \text{compt } s(t) > -\infty$  (cf. 2.2.7).

**Preuve** de 1.3.1 Via 1.2.17, on a l'unicité de la partie génératrice minimale, si elle existe.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Soit  $X = \{x_i \mid i \in I\}$  une partie génératrice de  $s$ . A tout  $x_i$ , on associe une suite  $\{u_k^i\}_{k \geq 1}$  définie comme suit. On pose  $u_1^i = x_i$ . Si  $x_i$  n'est pas redondant, alors on pose  $u_k^i = x_i$  pour tout  $k \geq 2$ . Supposons  $x_i$  redondant. On a alors un  $x' \in X$  avec  $x' \neq x$  tel que  $u_1^i \preceq \varphi(x')$ , i.e.  $u_1^i = \gamma^{n_1} \delta^{t_1} x'$  pour un certain  $(n_1, t_1) \in \mathbb{N} \setminus \{(0, 0)\}$ . On pose alors  $u_2^i = x'$ . Si  $u_2^i$  n'est pas redondant, on pose  $u_k^i = u_2^i$  pour  $k \geq 3$ , sinon on choisit de même  $u_3^i \in X$  tel que  $u_2^i = \gamma^{n_2} \delta^{t_2} u_3^i$  avec  $(n_2, t_2) \in \mathbb{N} \setminus \{(0, 0)\}$ , et ainsi de suite.

1/ chaque suite  $\{u_k^i\}_k$  est constante à partir d'un certain rang. En effet, on peut écrire  $u_k^i = x_i \gamma^{-\nu_k} \delta^{\tau_k}$  avec  $\nu_k = n_1 + \dots + n_{k-1}$  et  $\tau_k = t_1 + \dots + t_{k-1}$ , ces deux suites étant croissantes. Si la suite  $\{u_k^i\}_k$  a un nombre infini de valeurs, l'une au moins des suites  $\nu_k$  et  $\tau_k$  tend vers l'infini, par exemple  $\tau_k$ . Soit  $x_i = \gamma^u \delta^v$ . On a alors par 2.2.7  $\text{dat } x(u) \geq v + \tau_k$ , d'où  $\text{dat } x(u) = +\infty$  ce qui

contredit la première condition de (ii). De manière analogue, si  $\nu_k$  tend vers l'infini, on contredit la condition relative à **compt**  $s$ .

2/ On pose  $u_\infty^i = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k^i$ , qui existe trivialement d'après 1/, et l'on définit  $U = \{u_\infty^i \mid i \in I\}$ .

3/ Comme  $U \subset X$ , on a  $\varphi(\bigoplus U) \preceq \varphi(\bigoplus X)$ .

4/ Par construction,  $U$  est sans monômes redondants, donc minimal.

5/ Pour chaque  $i$ , la suite  $\{\varphi(u_k^i)\}_k$  est croissante. Cela résulte clairement de la croissance des suites  $\nu_k$  et  $\tau_k$  et de la caractérisation de  $\varphi$  donnée en (1.2.i).

6/ Soit un monôme  $m \preceq \varphi(\bigoplus X)$ . On a  $m \preceq \varphi(x_i)$  pour un certain  $x_i$ , et donc par 5/  $m \preceq \varphi(u_\infty^i) \preceq \varphi(\bigoplus U)$ . En sommant sur tous les  $m$  vérifiant  $m \preceq \varphi(\bigoplus X)$ , on obtient  $\varphi(\bigoplus X) \preceq \varphi(\bigoplus U)$ .

Par 3/ et 6/,  $U$  est un représentant de  $s$ , par 4/, il est minimal.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Supposons par exemple **dat**  $s(n) = +\infty$ . Soit  $X = \{\gamma^{n_i} \delta^{t_i} \mid i \in I\}$  un représentant de  $s$ . On a d'après 2.2.7:

$$\forall t \geq 0, \exists i \in I, n_i \leq n \text{ et } t_i \geq t \quad (1.3.a)$$

On a donc  $i_0$  tel que  $t_{i_0} \geq 0, n_{i_0} \leq n$ , et de même  $i_1$  tel que  $t_{i_1} > t_{i_0}, t_{i_1} \leq n$ . Supposons  $X$  minimal. On ne peut avoir  $n_{i_1} \leq n_{i_0}$  (sinon  $\gamma^{n_{i_0}} \delta^{t_{i_0}}$  serait redondant). On a donc  $n_{i_1} > n_{i_0}$ . De même, on a  $i_2$  tel que  $t_{i_2} > t_{i_1}, n_{i_2} \leq n$ , et  $n_{i_2} > n_{i_1}$ . On trouve de la sorte une suite infinie d'entiers strictement croissante  $n_{i_0} < n_{i_1} < \dots$  et majorée par  $n$ : absurde. Preuve analogue si **compt**  $s(t) = -\infty$ . ■

**1.3.2 Remarque** On peut généraliser le Théorème 1.3.1. Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde complet tel que tout élément est somme de d-premiers. Soit  $a$  un d-premier inversible,  $\varphi_a(x) = a^*x$ . Soit  $x = \bigoplus_{i \in I} x_i$  somme de d-premiers. On a la proposition suivante: (P) Si pour tout  $i$ , l'ensemble  $\{a^{-n}x_i\} \cap \downarrow(x)$  est fini, alors  $x$  admet un représentant minimal. La propriété (P) s'obtient en adaptant la preuve de (ii)  $\Rightarrow$  (i) ci dessus. Réciproquement, on obtient la propriété (ii)  $\Rightarrow$  (i) du Théorème 1.3.1 à partir de (P) en remarquant que  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]/\varphi_{\gamma \oplus \delta^{-1}} \simeq (\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]/\varphi_\gamma)/\varphi_{\delta^{-1}}$ , et en appliquant la proposition (P) successivement à  $a = \gamma$  et  $a = \delta^{-1}$ .

**1.3.3 Remarque** Voir aussi [3] pour une autre preuve de 1.3.1. Soit  $Y$  un représentant de  $s$ , et  $y = \bigoplus Y$ . On montre sous des conditions équivalentes que le représentant minimal  $X$  de  $s$  satisfait

$$\bigoplus X = y \boxminus (\gamma \oplus \delta^{-1})^+ y .$$

**1.3.4 Exemple** Soit:

$$s = (\gamma^2 \delta^3)^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \gamma^{2i} \delta^{3i} . \quad (1.3.b)$$

Via 1.2.j, on a que  $\gamma^{2i} \delta^{3i} \leq_\varphi \gamma^{2j} \delta^{3j}$  entraîne  $2i \geq 2j$  et  $3i \leq 3j$ , i.e.  $i = j$ . Ainsi, la somme à droite de (1.3.b) ne contient pas de monômes redondants. C'est donc l'écriture minimale de  $s$ .

**1.3.5 Contre exemple** La série causale  $s = \delta^*$  vérifie **dat**  $s(0) = +\infty$ . Elle n'admet pas de représentant minimal (toute série de la forme  $s_N = \delta^N(\delta)^* \in \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  est un représentant de  $s$ , mais la borne-inf de la famille  $\{s_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  est  $\varepsilon$ ). De même,  $(\gamma^{-1})^*$  n'admet pas de représentant minimal.

## 1.4 Somme modulo une bonne congruence

On considère un demi-treillis  $\mathcal{D}$  quotienté par une bonne congruence (cf. 1.2.8).

**1.4.1 Algorithme (Forme canonique de la somme)** *On part de deux parties génératrices minimales de  $a$  et  $b$ , respectivement  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  et  $B = \{b_1, \dots, b_p\}$ . La partie génératrice minimale de  $a \oplus b$  est donné par l'algorithme suivant:*

*prendre le  $d$ -premier terme non encore examiné de  $B$ , soit  $b_i$  :*

*si  $b_i \leq_{\varphi} a$ , supprimer  $b_i$  de  $B$*

*sinon*

*éliminer les éléments de  $A$  dominés par  $b_i$ ,*

*$b_i$  a été examiné, et recommencer une itération.*

*A l'issue,  $A \cup B$  est la famille génératrice minimale de la somme.*

Chaque itération de l'algorithme requiert au plus  $\text{compl}(a)$  comparaisons, soit dans le pire des cas  $\text{compl}(b) \times \text{compl}(a)$  comparaisons.

**1.4.2 Exemple** Soient dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$

$$a = \gamma\delta \oplus \gamma^5\delta^4 \oplus \gamma^6\delta^5 \oplus \gamma^8\delta^8, \quad b = \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^9\delta^7.$$

$$A = \{\gamma\delta, \gamma^5\delta^4, \gamma^6\delta^5, \gamma^8\delta^8\}, \quad B = \{\gamma^2\delta^3, \gamma^5\delta^6, \gamma^9\delta^7\}.$$

Pas 1: On a  $B_1 = \gamma^2\delta^3 \not\leq_{\varphi} a$  (il suffit de vérifier  $B_1 \not\leq_{\varphi} A_1 = \gamma\delta$  en raison du lemme 1.2.j). En outre  $B_1$  ne domine aucun terme de  $A$ .

Pas 2: de même, en comparant  $B_2$  à  $A_1$  et  $A_2$  seulement, on constate  $B_2 \not\leq_{\varphi} a$ . Par contre,  $A_2 = \gamma^5\delta^4 \leq_{\varphi} \gamma^5\delta^6 = B_2$  et  $A_3 = \gamma^6\delta^5 \leq_{\varphi} B_2$ . On remplace donc  $A$  par

$$A' = \{\gamma\delta, \gamma^8\delta^8\}.$$

Pas 3:  $B_3$  est dominé par  $A'_2 = \gamma^8\delta^8$ . On remplace donc  $B$  par

$$B' = \{\gamma^2\delta^3, \gamma^5\delta^6\}.$$

Le représentant minimal de  $a \oplus b$  est donné par  $A' \cup B'$ , i.e.

$$a \oplus b = \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^8\delta^8.$$

Cela se vérifie sur le dessin de la Figure B.1. On a représenté  $a$  par l'ensemble des disques noirs,  $b$  par l'ensemble des carrés noirs. Le représentant minimal de  $a \oplus b$  est donné par l'ensemble des coins “en haut à gauche” de l'union de ces deux ensembles.

## 1.5 Dioïde quotienté par une bonne congruence

Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde,  $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ , induisant une bonne congruence pour la structure de demi-treillis sous-jacent, et vérifiant en outre:

**1.5.1 Hypothèse**  $\forall(a, x) \in \mathcal{D}^2, \quad \varphi(ax) = a\varphi(x).$

Il résulte de 1.5.1 que  $\mathcal{R}_\varphi$  et des conditions 1.2.8 que  $\mathcal{R}_\varphi$  est compatible avec la structure de dioïde de  $\mathcal{D}$ .

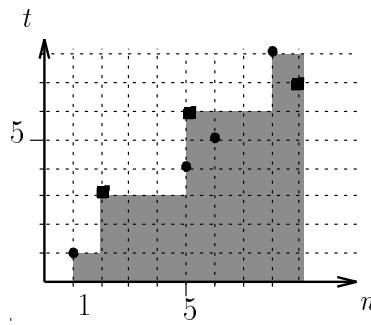


Figure B.1: Somme de  $a = \gamma\delta \oplus \gamma^5\delta^4 \oplus \gamma^6\delta^5 \oplus \gamma^8\delta^8$  et  $b = \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^9\delta^7$

**1.5.2 Lemme** Soit  $\varphi$  une bonne congruence vérifiant 1.5.1. Soit  $a$  un  $d$ -premier inversible et un élément  $b \in \mathcal{D}/\varphi$  s'écrivant sous forme canonique  $b_1 \oplus \dots \oplus b_n$ . On a alors la forme canonique  $ab = ab_1 \oplus \dots \oplus ab_n$ .

**Preuve** Les propositions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{aligned} ab_i &\text{ redondant} \\ ab_i &\leq \varphi(\bigoplus_{j \neq i} ab_j) \\ b_i &\leq a^{-1}\varphi(\bigoplus_{j \neq i} ab_j) \\ b_i &\leq \varphi(\bigoplus_{j \neq i} b_j) \quad (\text{via 1.5.1}) \\ b_i &\text{ redondant} \end{aligned}$$

d'où la conclusion. ■

**1.5.3 Algorithme (Forme canonique du produit)** Soient  $a$  et  $b$  écrits sous forme minimale  $a = \bigoplus_{i=1}^k a_i$  et  $b = \bigoplus_j b_j$ . Sous l'hypothèse (1.5.1), on obtient la forme canonique de  $ab$  en sommant les  $a_i b$  à l'aide de l'algorithme 1.4.1.

**1.5.4 Exemple** Soient les deux polynômes dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$

$$a = \gamma^0\delta^0 \oplus \gamma^2\delta^2, \quad b := \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^3.$$

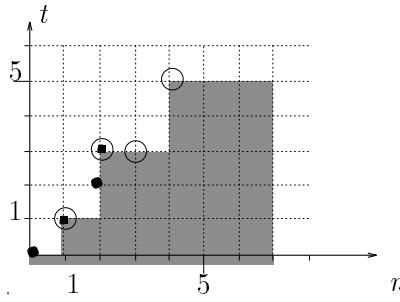
On a  $ab = a_1b \oplus a_2b = (\gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^3) \oplus (\gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^5) = \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5$ . On a représenté sur la Figure B.2 les polynômes  $a$  (disques noirs) et  $b$  (carrés noirs). On obtient graphiquement  $ab$  en prenant les coins “en haut à gauche” de la somme vectorielle des parties associées à  $a$  et à  $b$  (points cerclés).

Nous étudions maintenant le calcul des lois  $\wedge$ ,  $\boxplus$  et  $\backslash$ .

**1.5.5 Lemme** Soit  $\mathcal{D}$  un demi-treillis complet, et  $\varphi$  une bonne congruence.  $\mathcal{D}/\varphi$  est un demi-treillis complet, où la borne inf est donnée par:

$$\bigwedge_i \overline{a_i} = \overline{\bigwedge_i \varphi(a_i)} . \tag{1.5.a}$$

En outre, si les bornes inf distribuent par rapport à la somme dans  $\mathcal{D}$  (cf. 0.5.2.2), alors de même dans  $\mathcal{D}/\varphi$ .

Figure B.2: Produit  $(\gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^2 \delta^2)(\gamma \delta \oplus \gamma^2 \delta^3)$ 

**Preuve** On commence par noter que  $\varphi(\varphi(a) \wedge \varphi(b)) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$ , et plus généralement que

$$\varphi\left(\bigwedge_{i \in I} \varphi(a_i)\right) = \bigwedge_{i \in I} \varphi(a_i) . \quad (1.5.b)$$

Soient en effet  $\alpha$  le membre de gauche de (1.5.b) et  $\beta$  le membre de droite. Comme  $\varphi \succeq \text{Id}$ ,  $\alpha \succeq \beta$ . Comme pour tout  $j \in I$ , on a  $\varphi(\bigwedge_i \varphi(a_i)) \preceq \varphi^2(a_j) = \varphi(a_j)$ , on a  $\alpha \preceq \bigwedge_{j \in I} \varphi(a_j) = \beta$ , d'où l'égalité (1.5.b).

D'autre part, les assertions suivantes sont équivalentes

$$\begin{aligned} & \forall i \in I, \bar{x} \preceq \bar{a_i} \\ & \forall i \in I, \varphi(x) \preceq \varphi(a_i) \\ & \varphi(x) \preceq \bigwedge_{i \in I} \varphi(a_i) \\ & \varphi(x) \preceq \varphi\left(\bigwedge_{i \in I} \varphi(a_i)\right) \quad (\text{par (1.5.b)}) \\ & \bar{x} \preceq \varphi\left(\bigwedge_{i \in I} \varphi(a_i)\right) \quad . \end{aligned}$$

On a prouvé (1.5.a). Supposons la distributivité de la borne inf. Les propositions suivantes sont équivalentes

$$\begin{aligned} (D) : & \bar{b} \oplus \bigwedge_i \bar{a_i} = \overline{\bar{b} \oplus \bigwedge_i a_i} \\ & \overline{\bar{b} \oplus \bigwedge_i \varphi(a_i)} = \overline{\bar{b} \oplus \bigwedge_i a_i} \quad (\text{par (1.5.a)}) \\ & \bar{b} \oplus \bigwedge_i \varphi(a_i) = \bigwedge_i (\bar{b} \oplus a_i) \quad (\mathcal{D} \text{ distributif}) \\ & \varphi(\bar{b} \oplus \bigwedge_i \varphi(a_i)) = \varphi(\bigwedge_i \varphi(\bar{b} \oplus a_i)) \quad (\text{par (1.5.a)}) \\ & \varphi(\bar{b}) \oplus \bigwedge_i \varphi(a_i) = \bigwedge_i (\varphi(\bar{b}) \oplus \varphi(a_i)) \quad (\text{par (1.5.b), compte tenu de } \varphi^2 = \varphi) \end{aligned}$$

La dernière proposition étant vraie par distributivité de  $\mathcal{D}$ , la propriété (D), i.e. la distributivité de la borne inf par rapport à la somme dans  $\mathcal{D}/\varphi$ , est établie. ■

Nous nous cantonnerons dans la suite à  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$  pour la simplicité de l'exposé.

### 1.5.6 Algorithme (Inf de polynômes dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ ) On a (i):

$$\gamma^n \delta^t \wedge \gamma^{n'} \delta^{t'} = \gamma^{\max(n, n')} \delta^{\min(t, t')} .$$

Pour des polynômes généraux, (ii):

$$\left( \bigoplus_i \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \right) \wedge \left( \bigoplus_j \gamma^{n_j} \delta^{t_j} \right) = \bigoplus_{ij} (\gamma^{n_i} \delta^{t_i} \wedge \gamma^{n'_j} \delta^{t'_j}) .$$

**Preuve** On a en passant au support  $\text{supp}(\varphi(\gamma^n \delta^t) \wedge \varphi(\gamma^{n'} \delta^{t'})) = \text{supp}(\varphi(\gamma^n \delta^t)) \cap \text{supp}(\varphi(\gamma^{n'} \delta^{t'})) = \{(\nu, \tau) \mid \nu \geq n, \tau \leq t\} \cap \{(\nu, \tau) \mid \nu \geq n', \tau \leq t\} = \{(\nu, \tau) \mid \nu \geq \max(n, n'), \tau \leq \min(t, t')\}$  d'où  $\varphi(\gamma^n \delta^t) \wedge \varphi(\gamma^{n'} \delta^{t'}) = \varphi(\gamma^{\max(n, n')} \delta^{\min(t, t')})$ . Le point (i) résulte ainsi de 1.5.5. Le point (ii) résulte du fait que  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ , donc par 1.5.5,  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ , est distributif. ■

**1.5.7 Exemple** On a  $(e \oplus \gamma^{10} \delta^{10}) \wedge (\delta \oplus \gamma^{11} \delta^{12}) = (e \wedge \delta) \oplus (\gamma^{10} \delta^{10} \wedge \delta) \oplus (e \wedge \gamma^{11} \delta^{12}) \oplus (\gamma^{10} \delta^{10} \wedge \gamma^{11} \delta^{12}) = e \oplus \gamma^{10} \delta \oplus \gamma^{11} \delta^{10} = e \oplus \gamma^{10} \delta \oplus \gamma^{11} \delta^{10}$ .

Si la borne inf de  $\mathcal{D}$  distribue par rapport à la somme, il résulte de la Proposition 0.5.2.3, et du Lemme 1.5.5 ci-dessus que l'opération différence résiduée  $\boxminus$  dans  $\mathcal{D}/\varphi$  est bien définie.

**1.5.8 Proposition** Soient  $a = \bigoplus_i a_i \in \mathcal{D}/\varphi$  une somme de  $d$ -premiers et  $b \in \mathcal{D}/\varphi$ . On a

$$a \boxminus b = \bigoplus_{a_i \not\leq b} a_i . \quad (1.5.c)$$

En outre, si l'écriture  $a = \bigoplus_i a_i$  est minimale, alors l'écriture (1.5.c) de  $a \boxminus b$  l'est aussi.

**Preuve** On a en effet  $a \preceq b \oplus x$  ssi pour tout  $i \in I$ ,  $a_i \preceq b$  ou  $a_i \preceq x$ . La caractérisation (1.5.c) en résulte. D'autre part, il est clair qu'en retirant des termes à une somme non redondante, celle-ci reste non redondante, donc minimale (cf. 1.2.15). ■

**1.5.9 Exemple** Soit  $a = \gamma \delta \oplus \gamma^5 \delta^7 \oplus \gamma^{10} \delta^{10}$ ,  $b = \delta \oplus \gamma^9 \delta^{11}$ .  $a_1$  est dominé par  $\delta$ ,  $a_3$  par  $\gamma^9 \delta^{11}$ , d'où par application de 1.5.8,  $a \boxminus b = \gamma^5 \delta^7$ .

Nous concluons par une formule donnant le quotient résidué dans le seul dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ .

**1.5.10 Algorithme (Quotient résidué dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ )** Soient  $a = \bigoplus_i a_i$  et  $b = \bigoplus_j b_j$  deux sommes finies de monômes. On obtient  $a/b$  en réduisant

$$a/b = \bigwedge_j \bigoplus_i a_i b_j^{-1} .$$

**Preuve** Résulte immédiatement des propriétés 0.5.3.3,(x) et (iii). ■

**1.5.11 Exemple** On a par application de 1.5.10 et de 1.5.6,(i):

$$e / (\gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus \gamma^8 \delta^9) = \gamma^{-2} \delta^{-3} \wedge \gamma^{-4} \delta^{-5} \wedge \gamma^{-8} \delta^{-9} = \gamma^{-2} \delta^{-9} .$$

Plus généralement, soit  $P = \bigoplus_i \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$  un polynôme. On a  $e/P = M^{-1}$  où  $M = \gamma^{\min(n_i)} \delta^{\max(t_i)}$  est le plus petit monôme majorant  $P$ .

## 1.6 Quelques raffinements dans $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$

On utilise le fait qu'un polynôme se représente comme une liste de monômes totalement ordonnée par le degré (cf. VII,2.3.3). Soit:

$$a = \gamma^{n_1} \delta^{t_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{n_k} \delta^{t_k}$$

une somme de monôme non nécessairement minimale. Après un tri éventuel, et en réduisant les monômes de même  $n$  (compte tenu de  $\gamma^n \delta^t \oplus \gamma^{n'} \delta^t = \gamma^{\min(n, n')} \delta^t$ ), on peut supposer  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ .

**1.6.1 Algorithme (mise sous forme minimale de  $a$ )** Commencer avec  $i = 2$ . Si  $t_i \leq t_{i-1}$  éliminer le  $i$ -ième monôme, sinon passer au  $i$  suivant.

Cet algorithme considère une unique fois chaque monôme, soit  $k$  itérations, et une complexité négligeable devant celle du tri initial. La complexité de la mise sous forme minimale est donc celle d'un tri, i.e.  $O(k \log k)$ .

Soient maintenant les deux écritures minimales

$$a = \gamma^{n_1} \delta^{t_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{n_r} \delta^{t_r} \quad \text{et} \quad a' = \gamma^{n'_1} \delta^{t'_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{n'_l} \delta^{t'_l} .$$

La remarque suivante résulte immédiatement de (1.2.j).

**1.6.2 Lemme Supposons**

$$n_k \leq n'_i < n_{k+1} .$$

De deux choses l'une: soit  $t_k \geq t'_i$  auquel cas  $\gamma^{n'_i} \delta^{t'_i}$  est redondant dans  $a \oplus b$ , soit  $\gamma^{n'_i} \delta^{t'_i}$  est un point extrémal de  $a \oplus b$  et les monômes de  $a$  éventuellement dominés par  $\gamma^{n'_i} \delta^{t'_i}$  ont des indices  $k' \geq k$ .

On a alors l'algorithme suivant, plus fin que 1.5.3.

**1.6.3 Algorithme (Somme dans  $M_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]$ )** 1/ Considérer le  $i$ -ème monôme de  $b$ , à partir de  $i = 1$ . Trouver  $k$  tel que  $n_k \leq n'_i < n_{k+1}$ . Si  $\gamma^{n_i} \delta^{t_i}$  est dominé par  $\gamma^{n_k} \delta^{t_k}$ , aller en 2/, sinon, éliminer les monômes  $\gamma^{n_l} \delta^{t_l}$  dominés par  $\gamma^{n'_i} \delta^{t'_i}$  (pour  $l \geq k$ ), rajouter  $\gamma^{n'_i} \delta^{t'_i}$  à  $a$ , et 2/ passer au  $i$  suivant en recommençant la recherche de  $k$  seulement à partir de la valeur du denier  $l$  éliminé, ou à défaut, de la dernière valeur de  $k$ .

**1.6.4 Exemple** On reprend l'exemple 1.4.2.

$$a = \gamma \delta \oplus \gamma^5 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^5 \oplus \gamma^8 \delta^8, \quad b = \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^6 \oplus \gamma^9 \delta^7 .$$

pas 1:  $k = 1$ ,  $b_1 = \gamma^2 \delta^3$  n'est pas dominé par le d-premier monôme de  $a$ , donc il n'est pas dominé par  $a$ .  $a_2 = \gamma^5 \delta^4$  n'est pas dominé par  $b_1$ , a fortiori, les monômes suivants ne sont pas dominés par  $b_1$ . On insère donc  $b_1$ , i.e. on remplace  $a$  par

$$a' = \gamma \delta \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^5 \oplus \gamma^8 \delta^8 .$$

pas 2 Pour  $b_2$ , on a  $k = 3$  (position dans  $a'$ ). On constate que  $a'_3 = \gamma^5 \delta^4$  ainsi que  $a'_4 = \gamma^6 \delta^5$  est dominé par  $b_2 = \gamma^5 \delta^6$ . Le monôme suivant  $a'_5$  n'est pas dominé. On supprime donc  $a'_3, a'_4$  seulement et l'on insère  $b_2$ , soit

$$a'' = \gamma \delta \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^6 \oplus \gamma^8 \delta^8 .$$

pas 3 Pour  $b_3$ , on a  $k = 4$ . On constate que  $b_3$  est dominé par  $\gamma^8 \delta^8$ , on élimine  $b_3$ . Finalement

$$a \oplus b = a'' = \gamma \delta \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^6 \oplus \gamma^8 \delta^8 .$$

L'intérêt de 1.6.3 par rapport à 1.4.1 tient à ce qu'il n'est besoin de considérer que les monômes voisins dans le test de domination, comme l'énonce le lemme 1.6.2. Autrement dit, l'algorithme consiste à parcourir de la gauche vers la droite les monômes de  $a$  et  $b$  sans jamais revenir en arrière, soit un nombre de comparaisons pour la somme de l'ordre de  $O(\text{compl}(a) + \text{compl}(b))$ . En conséquence, le produit donné par l'algorithme 1.5.3 requiert maintenant  $O(\text{compl}(a)\text{compl}(b))$  comparaisons.

## 1.7 Extension des degrés à $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$

Nous étendons les notions de degré et valuation au dioïde  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . Le seul point délicat est qu'en raison du quotient par  $\gamma^*(\delta^{-1})^*$ , les degrés en  $\delta$  et valuation en  $\gamma$  sont intrinsèques, alors que les degrés et valuations duales dépendent du représentant. On appelle *monôme* un polynôme de support réduit à un élément. On définit le *degré*  $\deg s$  et la *valuation*  $\text{val } s$  d'une série formelle comme les deux couples suivants:

$$\deg s = \sup \text{supps}, \quad \text{val } s = \inf \text{supps} ,$$

les couples de  $\mathbb{Z}^2$  étant partiellement ordonnés par l'ordre usuel composante par composante. On posera  $\deg s := (\deg_\gamma s, \deg_\delta s)$  et  $\text{val } s := (\text{val}_\gamma s, \text{val}_\delta s)$ . On note  $\text{compl } s$  le nombre de monômes de  $s$  (i.e. le cardinal de  $\text{supps}$ ). On dira que la série  $s$  est *causale* lorsque  $\text{supps} \subset \mathbb{N}^2$ , ce qui est équivalent à  $\text{val}_\gamma(s) \geq 0$  et  $\text{val}_\delta(s) \geq 0$ . Les propriétés suivantes sont immédiates:

**1.7.1 Propriétés** (i)  $s \mapsto \deg s$  croissante,

(ii)  $\deg(s \oplus s') = \max(\deg s, \deg s')$  (*max composante par composante*),

(iii)  $\deg(ss') = \deg(s) + \deg(s')$  (*somme composante par composante et convention  $-\infty + (+\infty) = -\infty$* ),

(iv)  $s \neq \varepsilon \Rightarrow \text{val } s \leq \deg s$ ,

(v)  $\text{compl}(p \oplus q) \leq \text{compl}(p) + \text{compl}(q)$ ,

(vi)  $\text{compl}(p \otimes q) \leq \text{compl}(p)\text{compl}(q)$ .

Propriétés et conventions duales pour la valuation.

**1.7.2 Exemple**  $\varepsilon \oplus \gamma^n \delta^t = \gamma^n \delta^t$ ,  $\text{val } \varepsilon = (+\infty, +\infty)$ ,  $\deg \gamma^n \delta^t = \text{val } \gamma^n \delta^t = (n, t)$ ,  $(e \oplus \gamma^3 \delta^2)(\delta^{-4} \oplus \gamma^5 \delta^{-4}) = \delta^{-4} \oplus \gamma^5 \delta^{-4} \oplus \gamma^3 \delta^{-2} \oplus \gamma^8 \delta^{-2}$ . Noter que  $\gamma^{-1}$  est un polynôme (et même un monôme).

**1.7.3 Proposition** *Les seules séries formelles inversibles dans  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  sont les monômes.*

**Preuve** Si  $ss' = e$ , il résulte de (iii) et de la formule duale que

$$\deg s + \deg s' = \text{val } s + \text{val } s' = 0 \tag{1.7.a}$$

Via (iv), on a  $\text{val } s \leq \deg s$ , idem pour  $s'$ . (1.7.a) entraîne donc  $\deg s = \text{val } s$ ,  $\deg s' = \text{val } s'$ , ce qui signifie que  $s$  et  $s'$  sont des monômes. Réciproque triviale. ■

**1.7.4 Proposition** *Soit  $s \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ , et un représentant de  $s$ ,  $s_0 \in \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ .  $\deg_\delta s_0$  et  $\text{val}_\gamma s_0$  ne dépendent pas du choix de  $s_0$ .*

**Preuve** Soient  $s_0 = \bigoplus_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$  et  $s_1 = \bigoplus_{j \in J} \gamma^{n'_j} \delta^{t'_j}$  telles que  $\varphi(s_0) \preceq \varphi(s_1)$ . Montrons que  $\deg_\delta(s) \leq \deg_\delta(s')$ . On a:

$$\forall i \in I, \exists j \in J, k, l \geq 0, \quad \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \preceq \gamma^{n'_j} \delta^{t'_j} \gamma^k \delta^{-l}$$

d'où

$$t_i \leq t'_j - l \leq t'_j \leq \deg_\delta s'$$

et en passant au sup  $\deg_\delta s \leq \deg_\delta s'$ . Ainsi,  $\varphi(s_0) = \varphi(s_1)$  entraîne l'égalité des degrés en  $\delta$ . ■

Par contre, les autres degrés et valuations ne passent pas au quotient. On a par exemple

$$\deg_\gamma e = 0, \quad \deg_\gamma \gamma^* = +\infty$$

quoique  $e$  et  $\gamma^*$  appartiennent à la même classe d'équivalence. On se restreindra dans la suite aux polynômes et l'on définira le degré en  $\gamma$  d'un polynôme  $p$  comme le degré en  $\gamma$  de son représentant minimal  $p_0$ . Définitions analogues pour la valuation  $\text{val}$  et le nombre de termes  $\text{compl}$ . Enfin, nous définirons les séries *causales* de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  comme les images des séries causales de  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  (cf. §1.7) par la projection canonique. Si  $s$  admet un représentant minimal  $s_0 \in \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ , alors  $s$  est causale ssi  $s_0$  est causale.

**1.7.5 Exemple** Soient  $p = e \oplus \gamma^8 \delta^{10}$  et  $q = \gamma^6 \delta^{12}$ . On a  $\deg_\gamma(p \oplus q) = \deg_\gamma(e \oplus \gamma^6 \delta^{12}) = 6 < \max(\deg_\gamma p, \deg_\gamma q)$ . Pour le polynôme  $p$  de la Figure VII.4, on a par exemple  $\deg p = (3, 3)$ ,  $\text{val } p = (0, 0)$ ,  $\text{compl } p = 3$ . La série  $s = e \oplus \delta^{-1}$  est causale (l'écriture minimale est  $s = e$ ), mais  $s' = \gamma^{-1}$  ne l'est pas.

On montre sans difficulté les propriétés suivantes.

**1.7.6 Propriétés** *On a pour  $s, s' \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ :*

- (i)  $\deg_\delta(s \oplus s') = \max(\deg_\delta s, \deg_\delta s')$ ,
- (ii)  $\deg_\delta(s \otimes s') = \deg_\delta s + \deg_\delta s'$ ,
- (iii)  $\text{val}_\gamma(s \oplus s') = \min(\text{val}_\gamma s, \text{val}_\gamma s')$ ,
- (iv)  $\text{val}_\gamma(s \otimes s') = \text{val}_\gamma s + \text{val}_\gamma s'$ .

*En outre, lorsque  $s$  et  $s'$  sont des polynômes:*

- (v)  $\deg_\gamma(p \oplus p') \leq \max(\deg_\gamma p, \deg_\gamma p')$ ,
- (vi)  $\deg_\gamma(p \otimes p') = \deg_\gamma p + \deg_\gamma p'$ ,
- (vii)  $\text{val}_\delta(p \oplus p') \geq \min(\text{val}_\delta p, \text{val}_\delta p')$ ,
- (viii)  $\text{val}_\delta(p \otimes p') = \text{val}_\delta p + \text{val}_\delta p'$ ,
- (ix)  $\text{compl}(p \oplus q) \leq \text{compl } p + \text{compl } q$
- (x)  $\text{compl}(p \otimes q) \leq \text{compl } p \times \text{compl } q$ .

Les quatre premières formules s'obtiennent de manière analogue à 1.7.4. Les deux suivantes s'obtiennent en prenant les représentants minimaux  $p_0$  et  $q_0$  de  $p$  et  $q$  et en remarquant que le représentant minimal de  $p \oplus q$  s'obtient en retirant des termes à  $p_0 \oplus q_0$ , ce qui diminue le degré et augmente la valuation. Les dernières sont laissées au lecteur. ■

## 2 Algorithmes relatifs aux séries périodiques

Nous élaborons ici des formes canoniques pour les séries périodiques déjà traitées au Chapitre VII. Ces formes canoniques sont à la base de l'implémentation de ces séries décrite au Chapitre VIII.

## 2.1 Séries causales

Les systèmes que nous considérons admettent à la fois des représentations dateur et compteur causales. Nous introduisons donc la notion suivante:

**2.1.1 Définition (Fonctions causales)** *La fonction compteur  $k \in \text{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Z}}_{\min})$  est dite causale ssi*

$$k(t) = k(0) \text{ pour } t < 0, \quad k(t) \geq 0 \text{ pour } t \geq 0.$$

*La fonction dateur  $k \in \text{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Z}}_{\max})$  est dite causale ssi*

$$k(n) = -\infty \text{ pour } n < 0, \quad k(n) \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\} \text{ pour } n \geq 0. \quad (2.1.a)$$

**2.1.2 Remarque** En V.3.3.3, on avait caractérisé les réponses impulsionales des systèmes linéaires causaux sur  $\text{Croiss}(\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Z}}_{\min})$  par  $k(t) = \text{cte}$  pour  $t \leq 0$ . Ici, on exige en outre que  $k(t)$  prenne des valeurs positives ou nulles.

**2.1.3 Définition** *La série  $s \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  est dite causale ssi elle admet un représentant  $s_0 \in \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  causal (i.e. à exposants positifs ou nuls).*

**2.1.4 Proposition** *Soit  $s \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ . Les trois propositions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *s est causale,*
- (ii) *la fonction dateur associée à s est causale,*
- (iii) *la fonction compteur associée à s est causale.*

**Preuve** (ii) $\Rightarrow$ (i): via 2.2.5 et la propriété (2.1.a) on a le représentant causal de  $s$ :

$$s_0 = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n \delta^{\text{dat}_s(n)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \gamma^n \delta^{\text{dat}_s(n)}.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Soit  $s_0 = \bigoplus_i \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$  avec  $n_i \geq 0, t_i \geq 0$  un représentant causal de  $s$ . On a

$$\text{dat}_s(n) = \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid \gamma^n \delta^t \preceq s_0\}. \quad (2.1.b)$$

Si  $n < 0$ , l'ensemble ci-dessus est vide (sinon  $\gamma^n \delta^t \preceq \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ , d'où  $n_i \leq n < 0$  ce qui contredit la causalité de  $s_0$ ). On a donc  $\text{dat}_s(n) = -\infty$  pour  $n < 0$ . Si  $n \geq 0$  et  $\gamma^n \delta^t \preceq s_0$ , on a  $\gamma^n \delta^t \preceq \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ , d'où  $n \leq n_i$ , d'où  $\gamma^n \delta^t \preceq \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ . Ainsi,  $\text{dat}_s(n) \geq t_i \geq 0$ . Les conditions de (2.1.a) sont réalisées.

Arguments analogues pour (i) $\Leftrightarrow$ (iii). ■

## 2.2 Représentations périodiques

Nous reprenons en détail la notion de périodicité mise en évidence au Chapitre VII.

**2.2.1 Définition (Dateurs périodiques)** *Soit  $(\nu, \tau) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . une fonction dateur  $n \mapsto d(n)$  est dite  $(\nu, \tau)$ -périodique à partir de  $N$  si elle est causale et*

$$(\forall n \geq N) \quad d(n + \nu) = d(n) + \tau \quad (2.2.a)$$

*Si le  $N$  n'est pas précisé, on dira simplement  $(\nu, \tau)$ -périodique.*

Si  $(\nu, \tau)$  est une période de  $s$ , les couples  $(k\nu, k\tau)$  avec  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  sont aussi des périodes. Une telle fonction est représentée sur la Figure VII.5.

### 2.2.2 Périodes dégénérées

(i): Si  $\nu = 0$  et  $\tau > 0$ , de deux choses l'une: soit  $d(n) = -\infty$ , auquel cas  $d(n + \nu) = d(n + 2\nu) = \dots = -\infty$ , et  $d$  étant croissante,  $d$  vaut identiquement  $-\infty$ . soit  $d(n) > -\infty$ , auquel cas (2.2.a)) entraîne  $d(n) = +\infty$  pour  $n \geq N$ .

(ii): Si  $\nu > 0$  et  $\tau = 0$ , on a que  $d$  est constante à partir de  $n$ .

**2.2.3 Remarque** les dateurs vérifiant (2.2.a) devraient être qualifiées de “fonctions à accroissements ultimement périodiques” au sens classique. Notons en effet que la fonction accroissement de  $d$ ,  $\tilde{d}$  définie par  $\tilde{d}(n) = d(n + 1) - d(n)$ , vérifie:

$$(\forall n \geq N) \quad \tilde{d}(n + \nu) = \tilde{d}(n) . \quad (2.2.b)$$

**2.2.4 Définition (Séries  $(\nu, \tau)$ -périodiques)** Une série  $s \in \mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  est  $(\nu, \tau)$ -périodique (à partir de  $N$ ) si sa fonction dateur associée  $\text{dat}_s$  est  $(\nu, \tau)$ -périodique (à partir de  $N$ ).  $s$  est dite non-dégénérée si la période de  $\text{dat}_s$  ne relève pas des cas 2.2.2.

**2.2.5 Théorème** Les propositions suivantes sont équivalentes:

- (i) La série  $s$  est  $(\nu, \tau)$ -périodique
- (ii) On a deux polynômes causaux  $p_0$  et  $q_0$  tels que  $s = p_0 \oplus q_0(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ .
- (iii) On a deux polynômes causaux  $p_1$  et  $q_1$  avec  $\deg p_1 \leq \text{val } q_1 - (1, 1)$ ,  $\deg q_1 - \text{val } q_1 \leq (\nu - 1, \tau - 1)$  tels que  $s = p_1 \oplus q_1(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$
- (iv) On a  $(N, T) \in \mathbb{N}^2$ , un polynôme causal  $p$  avec  $\deg p \leq (N - 1, T - 1)$ , un polynôme causal  $q = e \oplus q'$  où  $(1, 1) \leq \text{val } q'$  et  $\deg q' \leq (\nu - 1, \tau - 1)$  tels que  $s = p \oplus \gamma^N \delta^T q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ .

**2.2.6 Remarque** On constate qu'en vertu de la caractérisation (ii), la terminologie est cohérente avec la notion de périodicité introduite en VII.3.3.7. Une série  $s$  est périodique ssi il existe  $(\nu, \tau) \in \mathbb{N}^2$  telle que  $s$  soit  $(\nu, \tau)$ -périodique.

**Preuve** du Théorème 2.2.5. Nous supposerons  $\nu \neq 0$  et  $\tau \neq 0$ , les cas dégénérés (triviaux) étant traités séparément dans la remarque 2.2.10 ci-dessous. On passe trivialement de (iv) à (iii) en posant  $q_1 = \gamma^N \delta^T q$ . En outre, (iii) étant un cas particulier de (ii): (iv)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (ii).

(i)  $\Rightarrow$  (iv). Supposons  $s$  causale et  $(\nu, \tau)$ -périodique à partir de  $N_0$ .

( $\alpha$ ): on pose  $N = \min\{n \geq N_0 \mid \text{dat}_s(n + \nu - 1) < \text{dat}_s(n + \nu)\}$ .

( $\beta$ ): on écrit par 2.2.5

$$s = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \gamma^n \delta^{\text{dat}_s(n)} = \left( \bigoplus_{0 \leq n \leq N-1} \gamma^n \delta^{\text{dat}_s(n)} \right) \oplus \gamma^N \delta^{\text{dat}_s(N)} \left( \bigoplus_{N \leq n} \gamma^n \delta^{\text{dat}_s(n) - \text{dat}_s(N)} \right)$$

On obtient la représentation de type (iv) en posant  $T = \text{dat}_s(N)$  et en observant que la seconde parenthèse est de la forme  $q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$  avec

$$q = \left( \bigoplus_{N \leq n \leq N+\nu-1} \gamma^{n-N} \delta^{k(n)-T} \right) ,$$

qui satisfait les conditions de degré à cause du choix ( $\alpha$ ).

(ii) $\Rightarrow$ (i): on a les deux lemmes immédiats suivants:

**2.2.7 Lemme** Soit  $p$  un polynôme causal et  $m$  un monôme causal. La fonction dateurs associée à  $p \oplus m(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$  est  $(\nu, \tau)$ -périodique à partir de  $\max(\deg_\gamma p, \deg_\gamma m)$ .

**2.2.8 Lemme** Le max de deux dateurs  $(\nu, \tau)$ -périodiques (respectivement à partir de  $N$  et  $N'$ ) est  $(\nu, \tau)$  périodique à partir de  $\max(N, N')$

En conséquence,  $p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$  est  $(\nu, \tau)$  périodique à partir de  $\max(\deg_\gamma(p), \deg_\gamma(q))$ . ■

On appellera représentation périodique de  $s$  une écriture de la forme 2.2.5.(iv). Le polynôme  $p$  sera appelé transitoire,  $q$  motif périodique et  $(N, T)$  début du périodique.

La preuve ci-dessus s'écrirait de même avec les compteurs. On a donc:

**2.2.9 Corollaire**  $\text{dat } s$  est  $(\nu, \tau)$ -périodiquessi la fonction  $\text{compt } s$  est  $(\tau, \nu)$ -périodique.<sup>3</sup>

**2.2.10 Remarque (Cas dégénérés)** Si  $\tau = 0$ , on a  $\text{dat } s$  constante à partir de  $N$ , d'où

$$s = \bigoplus_{0 \leq n \leq N} \gamma^n \delta^{\text{dat } s(n)} .$$

$\tau$  est donc nulssi  $s$  est un polynôme. Si  $\nu = 0$ , on peut écrire

$$s = \bigoplus_{0 \leq n \leq N-1} \gamma^n \delta^{\text{dat } s(n)} \oplus \gamma^N \delta^\infty .$$

Ces cas dégénérés généralisent respectivement les éléments simples dégénérés de type monomial et de type infini (cf. VII,4.0.1).

**2.2.11 Remarque** On passe de 2.2.5.(iii) à 2.2.5.(iv) en posant  $q = \gamma^{-\text{val}_\gamma q_1} \delta^{-\text{val}_\delta q_1} q_1$ . Les représentations (iii) et (iv) sont donc équivalentes à une normalisation du motif près. Le terme “motif” pour  $q$  dans (iv) s’interprète en effet si l’on écrit

$$\gamma^N \delta^T q (\gamma^\nu \delta^\tau)^* = \gamma^N \delta^T q \gamma^\nu \delta^\tau \oplus \gamma^N \delta^T q \gamma^{2\nu} \delta^{2\tau} \dots ,$$

i.e. le polynôme  $q$  est “répété” à partir de la position  $(N, T)$  avec les translations successives de vecteurs  $(0, 0), (\nu, \tau), (2\nu, 2\tau), \dots$ . La condition  $\deg p \leq (N-1, T-1)$  exprime que le dernier monôme du transitoire ne recouvre pas le premier monôme du motif. La condition  $\deg q \leq (\nu-1, \tau-1)$  exprime que les motifs translatés successifs ne se recouvrent pas. Ceci est illustré par le dessin suivant, où l’on a représenté une fonction dateur périodique (on a fait abstraction du caractère discret). On a de la sorte une généralisation dans  $\mathbb{N}^2$  de la notion de partie périodique de  $\mathbb{N}$  étudiée en VII,§3.3

**2.2.12 Proposition** Soit  $s$  une série  $(\nu, \tau)$ -périodique à partir de  $N$ . Il existe une seule représentation périodique de type 2.2.5.(iii).

**Preuve** résulte du lemme immédiat suivant:

---

<sup>3</sup>noter la transposition.

**2.2.13 Lemme** Si  $s$  admet une représentation périodique de la forme (iii), alors nécessairement

$$p = \bigoplus_{k=0}^{N-1} \gamma^k \delta^{\text{dat } s(k)} \quad q = \bigoplus_{k=N}^{N+\nu-1} \gamma^k \delta^{\text{dat } s(k)} .$$

■

**2.2.14 Exemple** La proposition 2.2.12 énonce l'unicité de la représentation périodique,  $\nu, \tau$  et  $N$  étant fixés. On peut cependant avoir des représentations différentes pourvu que les  $\nu, \tau, N$  soient distincts. Via  $(\gamma\delta)^* = \varepsilon \oplus \gamma^0\delta^0 \cdot e \cdot (\gamma\delta)^* = \varepsilon \oplus \gamma^0\delta^0 \cdot (e \oplus \gamma\delta)(\gamma^2\delta^2)^*$ , on a en effet deux représentations périodiques de la même série.

**2.2.15 Exemple** On a les différentes représentations périodiques de la série donnée sur la Figure B.3. On a encadré les différents motifs:  $\gamma^2\delta^2(e \oplus \gamma\delta^2)$  (cadre hachuré épais),  $\gamma^3\delta^4(e \oplus \gamma^2\delta)$  (cadre en pointillé), et  $\gamma^2\delta^2(e \oplus \gamma\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5)$  (cadre fin).

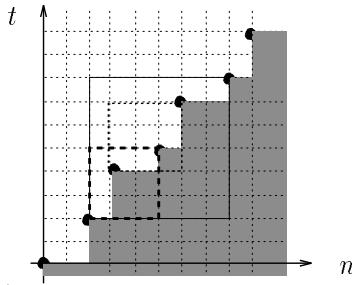


Figure B.3: Diverses représentations périodiques d'une même série

$$s = e \oplus \gamma^2\delta^2(e \oplus \gamma\delta^2)(\gamma^3\delta^3)^* \tag{2.2.c}$$

$$s = e \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^4(e \oplus \gamma^2\delta)(\gamma^3\delta^3)^* \tag{2.2.d}$$

$$s = e \oplus \gamma^2\delta^2(e \oplus \gamma\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5)(\gamma^6\delta^6)^* \tag{2.2.e}$$

Cependant, la représentation (2.2.c) paraît “plus simple” que les deux autres. Nous formalisons maintenant cette notion et montrons l’existence d’une unique représentation périodique “minimale”.

### 2.3 Représentation périodique minimale

**2.3.1 Définition (Représentation plus simple)** On dit que la représentation périodique  $p \oplus \gamma^N\delta^T q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$  est plus simple que  $p' \oplus \gamma^{N'}\delta^{T'} q'(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^*$ , si  $(\nu, \tau) | (\nu', \tau')$  et si  $(N, T) \leq (N', T')$ .

**2.3.2 Proposition** La relation de plus grande simplicité est une relation d’ordre sur l’ensemble des représentations périodiques de  $s$ .

**Preuve** La réflexivité et la transitivité sont immédiates. L’antisymétrie résulte du lemme 2.2.13 ci-dessus.

**2.3.3 Théorème** *Une série périodique non dégénérée admet une plus simple représentation périodique.*

**Preuve** Soit  $d$  le dateur associé à  $s$ . Il suffit de voir qu'il existe un plus petit triplet  $(N, \nu, \tau)$  vérifiant (2.2.a), ou de manière équivalente (2.2.b). Supposons

$$\begin{aligned} \forall n \geq N, \tilde{d}(n + \nu) &= \tilde{d}(n) \\ \forall n \geq N', \tilde{d}(n + \nu') &= \tilde{d}(n) \end{aligned} \quad (2.3.a)$$

On a donc pour  $n \geq \max(N, N')$ ,  $\tilde{d}(n + \alpha\nu + \beta\nu') = \tilde{d}(n)$ , et par application de 3.3.6

$$\exists K_0, \forall k \geq K_0, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}, k \operatorname{pgcd}(\nu, \nu') = \alpha\nu + \beta\nu'$$

et donc pour  $n \geq K_1 = \max(N, N') + K_0 \operatorname{pgcd}(\nu, \nu')$ ,

$$\tilde{d}(n + \operatorname{pgcd}(\nu, \nu')) = \tilde{d}(n) . \quad (2.3.b)$$

Supposons par exemple  $\max(N, N') = N'$ . Quitte à agrandir  $K_1$ , on peut supposer  $K_1$  de la forme  $N + x\nu$  ( $x \in \mathbb{N}$ ), et en utilisant la  $\nu$ -périodicité à partir de  $N$ , on note que (2.3.b) est valable dès  $n \geq \min(N, N')$ . Ainsi, si  $(N, \nu, \tau)$  et  $(N', \nu', \tau')$  vérifient (2.3.a), leur borne-inf<sup>4</sup> vérifie la même propriété. La conclusion en résulte. ■

**2.3.4 Définition (Plus petite période  $\varpi_\infty$ )** *On notera  $\varpi_\infty(s)$  la plus petite période de  $s$ .*

Nous donnons maintenant des algorithmes pour obtenir la plus simple représentation périodique.

**2.3.5 Algorithme (Minimisation du transitoire)** *Soit*

$$s = p \oplus p_k \oplus \gamma^n \delta^t (q \oplus q_l) (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$$

*une représentation périodique de  $s$ , où  $p_k$  (resp.  $q_l$ ) est le monôme de plus haut degré du transitoire (resp. du motif). On obtient un représentant périodique de transitoire minimal en appliquant l'itération suivante: Si*

$$p_k \neq \gamma^n \delta^t q_l \gamma^{-\nu} \delta^{-\tau}$$

*alors le transitoire  $p \oplus p_k$  est minimal. Sinon, recommencer une itération avec la représentation suivante:*

$$s = p \oplus p_k (e \oplus \gamma^N \delta^T p_k^{-1} q) (\gamma^\nu \delta^\tau)^* .$$

Le nombre d'itérations est majoré par le nombre de termes du transitoire.

**2.3.6 Exemple** On applique l'algorithme à la représentation (2.2.d). On a:

$$p = e, p_2 = \gamma^2 \delta^2, q = e, q_2 = \gamma^2 \delta, \gamma^n \delta^t = \gamma^3 \delta^4, \gamma^\nu \delta^\tau = \gamma^3 \delta^3 .$$

Comme  $p_2 = \gamma^n \delta^t q_2 \gamma^{-\nu} \delta^{-\tau}$ , on a la représentation (2.2.c). Soit  $p_1 = e, q = e, q_2 = \gamma \delta^2, \gamma^n \delta^t = \gamma^2 \delta^2$ . Comme  $p_1 \neq \gamma^n \delta^t q_2 \gamma^{-\nu} \delta^{-\tau}$ , le transitoire de (2.2.c) est minimal.

Le problème de la minimisation du périodique peut s'interpréter comme une "mise en facteur" d'un type particulier. Il est clair qu'une période minimale divisera toute autre période, mais aussi que le nombre de termes du motif minimal divisera le nombre de termes de tout autre motif. Notons  $q_{\deg<(n,t)}$  la troncature de  $q$  au degré  $(n, t)$  (i.e. le polynôme formé des monômes de  $q$  de degré au plus  $(n-1, t-1)$ ). On a l'algorithme suivant.

---

<sup>4</sup>i.e.  $(\min(N, N'), \operatorname{pgcd}(\nu, \nu'), \operatorname{pgcd}(\tau, \tau'))$

### 2.3.7 Algorithme (Minimisation du périodique) Soit

$$s = q(\gamma^\nu \delta^\tau)^* . \quad (2.3.c)$$

(1): Pour  $p$  premier diviseur  $\nu, \tau$  et  $\text{compl } q$ , faire:

$\nu' = \nu/p, \tau' = \tau/p$ . Si  $q = q_{\deg < (\nu', \tau')} (e \oplus \gamma^{\nu'} \delta^{\tau'} \oplus \dots \gamma^{\nu'(p-1)} \delta^{\tau'(p-1)})$ , alors remplacer (2.3.c) par  $s = q_{\deg < (\nu', \tau')} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^*$  et recommencer (1) avec le même  $p$ ,

sinon

recommencer (1) avec le diviseur  $p$  suivant.

La plus simple représentation d'une série  $s$  s'obtient en appliquant d'abord 2.3.5 à  $s$ , puis 2.3.7 à la partie périodique de  $s$ . L'ordre inverse est également licite.

### 2.3.8 Exemple

Soit la partie périodique de (2.2.e):

$$s = (e \oplus \gamma \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^5)(\gamma^6 \delta^6)^* =: q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$$

On a  $\nu = \tau = 6$  et  $\text{compl } p = 4$  d'où  $D = \{2\}$ . On constate que  $q = (e \oplus \gamma \delta^2)(e \oplus \gamma^3 \delta^3)$ , et donc on repart de  $s = (e \oplus \gamma \delta^2)(\gamma^3 \delta^3)^*$ . Comme 2 ne divise pas 3, on ne peut refactoriser ce motif (on ne peut calculer les nouveaux  $\nu'$  et  $\tau'$ ). Le motif est donc minimal.

## 2.4 Somme de séries périodiques

L'opération inverse de la minimisation du transitoire (cf. 2.3.5) nous sera utile.

**2.4.1 Lemme (Développement d'une série périodique)** Soient  $n_0, t_0 \geq 0$  et la série sous forme périodique minimale  $s = p \oplus \gamma^N \delta^T q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$  avec  $\nu \neq 0$  et  $\tau \neq 0$ . Il existe une plus simple représentation périodique

$$s = p' \oplus \gamma^{N'} \delta^{T'} q'(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$$

telle que  $N' \geq n_0, T' \geq t_0$ . On l'appelle développement de  $s$  à l'ordre  $(n_0, t_0)$ .

**Preuve** Soit  $k$  entier tel que  $N + k\nu \geq n_0$  et  $T + k\tau \geq t_0$ . On a la représentation périodique:

$$s = p \oplus \gamma^N \delta^T q(e \oplus \gamma^\nu \delta^\tau \oplus \dots \oplus \gamma^{(k-1)\nu} \delta^{(k-1)\tau}) \oplus \gamma^{N+k\nu} \delta^{T+k\tau} q(\gamma^\nu \delta^\tau)^* .$$

On obtient le développement de  $s$  en appliquant l'algorithme de minimisation du transitoire 2.3.5 à la série ci-dessus, sous la contrainte  $\deg p_k \geq (n_0, t_0)$ . ■

**2.4.2 Exemple** Soit  $s = \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^7 (e \oplus \gamma^2 \delta)(\gamma^3 \delta^3)^*$ . Le développement de  $s$  à l'ordre (7,5) est le suivant:

$$s = \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^7 \oplus \gamma^7 \delta^8 (e \oplus \gamma^2 \delta)(\gamma^3 \delta^3)^* . \quad (2.4.a)$$

**2.4.3 Cas d'une pente ultime infinie** Nous évacuons le cas où l'une des deux séries, disons  $s$ , a une pente ultime infinie, i.e. via 2.2.10:

$$s = p \oplus \gamma^N \delta^{+\infty} .$$

Soit  $s' = p' \oplus q'(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$  et  $p'_1$  le transitoire associé au développement de  $s'$  à l'ordre  $(N, 0)$ . On a clairement:

$$s \oplus s' = p \oplus p'_1 \oplus \gamma^N \delta^{+\infty} .$$

Le principe des algorithmes de somme de séries périodiques est contenu dans le lemme suivant.

**2.4.4 Lemme** *Soit  $s$  une série  $(\nu, \tau)$  périodique à partir de  $(N, T)$ . Soit  $P$  le développement de  $s$  à l'ordre  $(N + \nu - 1, 0)$ ,*

$$P = p \oplus q , \quad (2.4.b)$$

où  $\deg_\gamma(p) \leq N - 1$  et  $\text{val}_\gamma q \geq N$ . On a la représentation périodique de  $s$ :

$$s = p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^* . \quad (2.4.c)$$

La décomposition (2.4.b) consiste à séparer les termes du représentant minimal de  $P$  d'exposant en  $\gamma$  plus petit que  $N - 1$  des autres.

**Preuve** de 2.4.4. Il résulte de 2.2.13 que

$$s = P \oplus Q(\gamma^\nu \delta^\tau)^* \quad (2.4.d)$$

où  $P = \bigoplus_{k=0}^{N+\nu-1} \gamma^k \delta^{\text{dat } s(k)}$  et  $Q = \bigoplus_{k=N+\nu}^{N+2\nu-1} \gamma^k \delta^{\text{dat } s(k)}$ . On a donc

$$p = \bigoplus_{k=0}^{N-1} \gamma^k \delta^{\text{dat } s(k)}, \quad q = \bigoplus_{k=N}^{N+\nu-1} \gamma^k \delta^{\text{dat } s(k)} . \quad (2.4.e)$$

Comme  $\text{dat } s(k + \nu) = \text{dat } s(k) + \tau$  pour  $k \geq N$ , on a  $Q = \gamma^\nu \delta^\tau q$ , et donc (2.4.d) se réécrit  $s = p \oplus q(e \oplus \gamma^\nu \delta^\tau (\gamma^\nu \delta^\tau)^*) = p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ . En outre, d'après (2.4.e)  $p$  et  $q$  vérifient les conditions de degré et de valuation 2.2.5,(iii). ■

On a donc l'algorithme suivant:

**2.4.5 Algorithme (Somme de séries périodiques)** *Soient  $s$  et  $s'$  deux séries périodiques. Déterminer une borne supérieure a priori pour le début du périodique de  $s \oplus s'$ . Appliquer le Lemme 2.4.4, et réduire (2.4.c) via les Algorithmes 2.3.5 et 2.3.7.*

Il nous reste à produire des bornes à priori.

**2.4.6 Lemme** *Si  $s$  et  $s'$  sont deux séries de même pentes ultime périodiques à partir, respectivement, de  $N$  et  $N'$ , alors  $s \oplus s'$  est périodique à partir de  $\max(N, N')$ .*

**Preuve** C'est un avatar de 2.2.8. ■

**2.4.7 Lemme** *Soient deux représentations périodiques de type 2.2.5,(iii),  $s = p \oplus \gamma^N \delta^T q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$  et  $s' = p' \oplus \gamma^{N'} \delta^{T'} q'(\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^*$ , avec  $0 < \sigma_\infty(s) < \sigma_\infty(s')$ . La série  $s \oplus s'$  est périodique à partir de*

$$K = \max(N, N + \nu \lfloor \frac{T'_T + 1}{\tau} \rfloor, \lfloor (-T - \frac{\tau N}{\nu} - \tau, -T' - \tau' + 1 + \frac{\tau' N'}{\nu'} + \frac{\tau'}{\nu'}) \left( \frac{\tau}{\nu} - \frac{\tau'}{\nu'} \right)^{-1} \rfloor) , \quad (2.4.f)$$

où  $|x| := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$ .

**Preuve** Les majorations et minorations suivantes résultent immédiatement des conditions de degré et valuation 2.2.5,(iii).

$$\begin{aligned} s &\succeq p \oplus \gamma^N \delta^T q(\gamma^\nu \delta^\tau)^* =: s_1 \\ s' &\preceq \delta^{T'} \oplus \gamma^{N'+1} \delta^{T'+\tau'-1} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* =: s'_1 . \end{aligned}$$

Si l'on a  $K \geq N$  tel que

$$\text{dat } s_1(k) \geq \text{dat } s'_1(k) \quad \text{pour } k \geq K , \quad (2.4.g)$$

on aura  $\text{dat } s(k) \geq \text{dat } s_1(k) \geq \text{dat } s'_1(k) \geq \text{dat } s'(k)$ , et donc  $\text{dat}(s \oplus s') = \max(\text{dat } s, \text{dat } s')$  sera égal à  $\text{dat } s$  pour  $k \geq K$ .  $s \oplus s'$  sera donc périodique à partir de  $K$ . La condition  $K \geq N$  rend compte du d-premier terme du max à droite de (2.4.f). Il reste à vérifier (2.4.g). Nous faisons pour cela appel au Lemme élémentaire suivant:

**2.4.8 Lemme** Soit  $s = \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ . On a:

$$\text{dat } s(p) = t + \tau \left[ \frac{p - n}{\nu} \right] + \chi_{[n, +\infty[}(p) ,$$

où  $\chi_I$  désigne la fonction indicatrice de l'ensemble  $I$ , valant 0 pour  $p \in I$  et  $-\infty$  sinon.

**Preuve** résulte immédiatement de (2.2.b) et de l'écriture

$$s = \gamma^n \delta^t \oplus \gamma^{n+1} \delta^t \oplus \gamma^{n+\nu-1} \delta^t \oplus \gamma^{n+\nu} \delta^{t+\tau} \oplus \gamma^{n+\nu+1} \delta^{t+\tau} \oplus \dots \gamma^{n+2\nu-1} \delta^{t+\tau} \oplus \gamma^{n+2\nu} \delta^{t+2\tau} \oplus \dots .$$

■

Via 2.4.8, la condition (2.4.g) est équivalente à:

$$T + \tau \left[ \frac{k - N}{\nu} \right] \geq \max(T', T' + \tau' - 1 + \tau' \left[ \frac{k - N' - 1}{\nu'} \right]) \quad \text{pour } k \geq K .$$

La condition  $T + \tau \left[ \frac{K-N}{\nu} \right] > T'$  est équivalente à  $\frac{K-N}{\nu} \geq \lfloor \frac{T'-T+1}{\tau} \rfloor$  ce qui justifie le second terme à droite de (2.4.f). On trouve le troisième terme en déterminant le plus petit  $k$  tel que:  $T + \tau \left( \frac{k-N}{\nu} - 1 \right) \geq T' + \tau' - 1 + \tau' \frac{k-N'-1}{\nu'}$ .

■

**2.4.9 Remarque** Le lemme 2.4.7 ne fait qu'exprimer effectivement que si la pente ultime de  $s$  est inférieure à celle de  $s'$ , alors  $\text{dat } s(n) > \text{dat } s'(n)$  à partir d'un certain rang.

**2.4.10 Exemple** Soit  $s$  comme en 2.4.2 et  $p' = \gamma \delta^4 \oplus \gamma^7 \delta^5$ . On a en ajoutant  $p'$  à (2.4.a):

$$s \oplus p' = \gamma \delta^4 \oplus \gamma^7 \delta^8 (e \oplus \gamma \delta^2) (\gamma^3 \delta^3)^* .$$

Ici, le transitoire est minimal.

**2.4.11 Exemple** Soient

$$s = (e \oplus \gamma \delta) \left( \gamma^4 \delta^4 \right)^* \quad s' = \gamma \delta^2 \left( \gamma^3 \delta^3 \right)^* .$$

Ces deux séries étant de même pente, on sait par 2.4.6 que  $s \oplus s'$  est périodique à partir de  $\max(0, 1) = 1$ , de période  $\gamma^3 \delta^3 \sqcup \gamma^4 \delta^4 = \gamma^{12} \delta^{12}$ . Les termes de  $s \oplus s'$  de degré en  $\gamma$  inférieur ou égal à  $N + \nu - 1 = 1 + 12 - 1 = 12$  sont les suivants:

$$P = e \oplus \gamma \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus \gamma^7 \delta^8 \oplus \gamma^9 \delta^9 \oplus \gamma^{10} \delta^{11} \oplus \gamma^{12} \delta^{12} .$$

En partitionnant  $P$  comme en 2.4.4, on trouve

$$p = e, \quad q = \gamma \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus \gamma^7 \delta^8 \oplus \gamma^9 \delta^9 \oplus \gamma^{10} \delta^{11} \oplus \gamma^{12} \delta^{12} .$$

Ainsi

$$s \oplus s' = e \oplus (\gamma \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus \gamma^7 \delta^8 \oplus \gamma^9 \delta^9 \oplus \gamma^{10} \delta^{11} \oplus \gamma^{12} \delta^{12}) (\gamma^{12} \delta^{12})^*$$

Le transitoire n'est pas minimal. On trouve après réduction:

$$s \oplus s' = \left( e \oplus \gamma \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus \gamma^7 \delta^8 \oplus \gamma^9 \delta^9 \oplus \gamma^{10} \delta^{11} \right) \left( \gamma^{12} \delta^{12} \right)^*$$

#### 2.4.12 Exemple

Soit à calculer  $s \oplus s'$ , avec

$$s = e \oplus \gamma^3\delta^4 \oplus \gamma^5\delta^5 (e \oplus \gamma\delta^2) (\gamma^2\delta^3)^*, \quad s' = \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^6\delta^6 \oplus \gamma^7\delta^{10} (\gamma\delta^5)^*.$$

On a

$$\gamma^5\delta^5 (e \oplus \gamma\delta^2) (\gamma^2\delta^3)^* \oplus \gamma^7\delta^{10} (\gamma\delta^5)^* = \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^6\delta^7 \oplus \underline{\gamma^7\delta^8(e \oplus \gamma\delta^2)(\gamma^2\delta^3)^*} \oplus \gamma^7\delta^{10}(\gamma\delta^5)^*.$$

On observe que le terme souligné est dominé. On a donc

$$s \oplus s' = e \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^4 \oplus \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^6\delta^7 \oplus \gamma^7\delta^{10} (\gamma\delta^5)^*.$$

## 2.5 Autres opérations sur les séries périodiques

Nous notons ici brièvement que la périodicité est préservée par les opérations  $\wedge, \boxminus$  et  $\backslash$ . On peut déduire ces résultats de théorèmes généraux (par exemple l'inf de deux séries rationnelles correspond à l'intersection de deux parties rationnelles de  $\mathbb{Z}^2$ , et l'on peut appliquer un Théorème d'Eilenberg et Schützenberger [32]). De manière plus spécifique, on a les résultats suivants.

**2.5.1 Proposition** Soit  $s = p \oplus qr^*$ ,  $s' = p' \oplus q'(r')^*$ . La série  $s \wedge s'$  est périodique. Si  $\sigma_\infty(s) > \sigma_\infty(s')$ , on a  $\varpi_\infty(s \wedge s') = \varpi_\infty(s)$ . Si  $\sigma_\infty(s) = \sigma_\infty(s')$ ,  $\varpi_\infty(s \wedge s')$  divise  $\varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$ .

**2.5.2 Proposition** Soit  $s = p \oplus qr^*$ ,  $s' = p' \oplus q'(r')^*$ . La série  $s \boxminus s'$  est périodique. Si  $\sigma_\infty(s) < \sigma_\infty(s')$ , alors  $\varpi_\infty(s \boxminus s') = \varpi_\infty(s)$ . Si  $\sigma_\infty(s) = \sigma_\infty(s')$ , alors  $\varpi_\infty(s \boxminus s')$  divise  $\varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$ , ou bien  $s \boxminus s'$  est un polynôme. Si  $\sigma_\infty(s) > \sigma_\infty(s')$ ,  $s \boxminus s'$  est un polynôme.

**2.5.3 Proposition** Soit  $s = p \oplus qr^*$ ,  $s' = p' \oplus q'(r')^*$ . On a  $s/s' = \gamma^n\delta^t s''$ , où  $(n, t) \in (-\mathbb{N})^2$  et  $s''$  est périodique. Si  $\sigma_\infty(s) < \sigma_\infty(s')$ , alors  $\varpi_\infty(s'') = \varpi_\infty(s)$ . Si  $\sigma_\infty(s) = \sigma_\infty(s')$ , alors  $\varpi_\infty(s'')$  divise  $\varpi_\infty(s) \sqcup \varpi_\infty(s')$ . Si  $\sigma_\infty(u) > \sigma_\infty(s')$ ,  $s''$  est nul.

Au lieu de montrer cette dernière proposition, nous préférons traiter deux exemples.

#### 2.5.4 Exemple

$$e/(e \oplus \gamma\delta) = e/e \wedge (e/\gamma\delta) = e \wedge \gamma^{-1}\delta^{-1} = \delta^{-1}.$$

#### 2.5.5 Exemple

Soient

$$s = (\gamma\delta)^*, \quad s' = \gamma^2 (e \oplus \gamma^2\delta) (\gamma^3\delta^3)^*.$$

On a

$$(\gamma\delta)^*/(\gamma^2(e \oplus \gamma^2\delta)(\gamma^3\delta^3)^*) = \gamma^{-2}(\gamma\delta)^*/(\gamma^3\delta^3)^* \wedge \gamma^{-4}\delta^{-1}(\gamma\delta)^*/(\gamma^3\delta^3)^*. \quad (2.5.a)$$

Par monotonie, on a  $(\gamma\delta)^* \succeq (\gamma\delta)^*/(\gamma^3\delta^3)^* \succeq (\gamma\delta)^*/(\gamma\delta)^* = (\gamma\delta)^*$ . En outre,  $\gamma^{-4}\delta^{-1}(\gamma\delta)^* \succeq \gamma^{-4}\delta^{-1}\gamma\delta(\gamma\delta)^* = \gamma^{-3}(\gamma\delta)^* \succeq \gamma^{-2}(\gamma\delta)^*$ . Ainsi, le second terme à gauche de (2.5.a) est supérieur au premier. On a donc:

$$s/s' = \gamma^{-2} (\gamma\delta)^*.$$

## 2.6 Etoiles de polynômes

On a vu en VII.5.4 que le calcul de l'étoile d'une série rationnelle se ramenait à celle d'un polynôme. Soit  $p = \bigoplus_{i=1}^n p_i$ . On peut naïvement écrire

$$p^* = p_1^* p_2^* \dots p_n^* . \quad (2.6.a)$$

Si l'on applique cette règle au polynôme  $p = \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma\delta$ , on a en laissant au lecteur les calculs intermédiaires

$$p^* = ((\gamma^3\delta^3)^*(\gamma^2\delta^2)^*)(\gamma\delta)^* = \dots = (e \oplus \gamma^2\delta^2(\gamma\delta)^*)(\gamma\delta)^* = \dots = (\gamma\delta)^* .$$

Il est plus rapide de remarquer que  $\gamma^2\delta^2 \preceq (\gamma\delta)^*$  et  $\gamma^3\delta^3 \preceq (\gamma\delta)^*$ , d'où

$$(\gamma\delta)^* = e.e.(\gamma\delta)^* \preceq (\gamma^3\delta^3)^*(\gamma^2\delta^2)^*(\gamma\delta)^* \preceq ((\gamma\delta)^*)^*((\gamma\delta)^*)^*(\gamma\delta)^* = ((\gamma\delta)^*)^3 = (\gamma\delta)^* = p^* ,$$

et l'on pouvait conclure sans calcul. Nous généralisons ci-après cette remarque.

**2.6.1 Définition (\*-Minimalité)** *Le polynôme  $p$  est dit \*-minimal si*

$$p' \preceq p \text{ et } p^* = (p')^* \Rightarrow p = p' . \quad (2.6.b)$$

Autrement dit, il n'existe pas de polynôme plus petit que  $p$  engendrant la même étoile. De manière classique (cf. [62], Chapitre 1), si  $A$  est un alphabet et  $M \subset A^*$ , le plus petit ensemble engendrant  $M^*$  est  $(M - \{e\}) - ((M - \{e\})^+)^2$ , où  $-$  dénote la différence ensembliste. Ce résultat devient faux pour des parties rationnelles de monoïdes plus généraux (prendre  $M = \mathbb{Z}$ ). Nous donnons ici un résultat analogue dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ .

**2.6.2 Définition (\*-redondance)** *Soit  $\varphi : x \mapsto x^*$ . Soit  $p = \bigoplus_{i=1}^n m_i$  somme de monômes causaux. Le monôme  $m_i$  est dit \*-redondant s'il est  $\varphi$ -redondant (cf. 1.2.13), i.e. si on a  $m_i \preceq \varphi(\bigoplus_{j \neq i} m_j)$ .*

**2.6.3 Théorème** *Soit  $p$  un polynôme causal sans monôme de pente nulle. Il existe un unique polynôme causal  $p_0$  \*-minimal tel que  $p_0^* = p^*$ .*

**Preuve** 1/ Existence. L'application  $x \mapsto \varphi(x) = x^*$  est une fermeture. On peut donc appliquer les résultats d'existences d'une famille génératrice minimale donnés en 1.2.15 et 1.2.16. Précisément, on obtient un polynôme  $p_0$  vérifiant (2.6.b) en supprimant successivement tous les monômes \*-redondants.

2/ Unicité Soit  $p_0$  un polynôme \*-minimal tel que  $p_0^* = p^*$ . Comme  $p$  n'a aucun monôme de pente nulle, il résulte de 5.4.3 et de 5.4.4,(ii) que  $\sigma_\infty(p^*) = \sigma_\infty(p_0^*)$  est non nulle, et donc que  $s = p^*$  vérifie la condition du Théorème 1.3.1. Ainsi,  $p^*$  admet un représentant minimal, et l'on écrira  $p^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$  où les suites  $n_i$  et  $t_i$  sont strictement croissantes. Soit d'autre part la forme canonique de  $p_0$ :

$$p_0 = \gamma^{\nu_1} \delta^{\tau_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{\nu_q} \delta^{\tau_q} .$$

On a alors:

$$p^* = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^q} \gamma^{\alpha_1 \nu_1} \delta^{\alpha_1 \tau_1} \otimes \dots \otimes \gamma^{\alpha_q \nu_q} \delta^{\alpha_q \tau_q} . \quad (2.6.c)$$

Les deux d-premiers monômes de (2.6.c), i.e.  $e$  et  $\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1}$  sont non redondants (cela résulte de 1.2.j). On a donc  $\gamma^{n_0}\delta^{t_0} = e$  et  $\gamma^{n_1}\delta^{t_1} = \gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1}$ . Formons  $p_1 = p^* \boxminus (\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*$ . On a  $\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2} \preceq p^*$  et  $\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2} \not\leq (\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*$  (sinon, on contredirait l'\*-minimalité de  $p$ ). Il résulte de (1.5.c) et de (2.6.c) que

$$p_1 = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N}^{q-1} \setminus \{0\})} \gamma^{\alpha_1 \nu_1} \delta^{\alpha_1 \tau_1} \otimes \dots \otimes \gamma^{\alpha_q \nu_q} \delta^{\alpha_q \tau_q}$$

Comme  $\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2}$  est le terme de plus petite valuation de cette somme, il est non redondant. Ainsi,  $\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2}$  est le premier terme de la forme canonique de  $p_1$ . On monterait de même que  $\gamma^{\nu_3}\delta^{\tau_3}$  est le premier terme de la forme canonique de  $p_2 = p_1 \boxminus (\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1} \oplus \gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^*$ . On obtient de la sorte tous les monômes de  $p_0$  connaissant seulement  $p^*$ . L'unicité de  $p_0$  en résulte. ■

Nous montrons maintenant comment calculer le polynôme \*-minimal associé à  $p$ .

#### 2.6.4 Test de \*-redondance

On veut tester si

$$\gamma^n \delta^t \preceq (\gamma^{n_1} \delta^{t_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{n_k} \delta^{t_k})^*. \quad (2.6.d)$$

Ce problème est équivalent à l'existence d'une solution entière au système de deux inéquations linéaires à  $k$  inconnues positives ou nulles:

$$x \in \mathbb{N}^k, \quad \begin{cases} n \geq x_1 n_1 + \dots + x_k n_k \\ t \leq x_1 t_1 + \dots + x_k t_k \end{cases}. \quad (2.6.e)$$

En observant que le volume du simplexe

$$x_i \geq 0, \quad n \geq x_1 n_1 + \dots + x_k n_k$$

est  $\frac{1}{k!} \frac{n^k}{n_1 \dots n_k}$ , on a une estimation du nombre de points à énumérer pour vérifier (2.6.e).

#### 2.6.5 Exemple

Soit à calculer

$$p^* \quad \text{où} \quad p = \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^4 \oplus \gamma^7 \delta^6 \oplus \gamma^{10} \delta^{10}.$$

On observe que

$$\begin{cases} 10 = 3 \times 2 + 4 \times 1, \\ \text{i.e. } \gamma^{10} \delta^{10} \preceq (\gamma^3 \delta^3)^2 (\gamma^4 \delta^4) \end{cases}.$$

Ainsi,  $\gamma^{10} \delta^{10}$  est \*-redondant, et l'on a  $p^* = (p')^*$  avec  $p' = \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^4 \oplus \gamma^7 \delta^6$ . En outre,

$$\begin{cases} 7 \geq 3 \times 2, \\ 6 \leq 3 \times 2 \\ \text{i.e. } \gamma^7 \delta^6 \preceq (\gamma^3 \delta^4)^2, \end{cases}$$

et donc  $\gamma^7 \delta^6$  est \*-redondant dans  $p'$ . On a finalement:

$$p^* = (\gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^4)^* = e \oplus \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^6 (\gamma \delta)^*,$$

la dernière égalité résultant de 5.3.1.

**2.6.6 Exemple** Etant donnée une série rationnelle  $s$ , on peut en adaptant la preuve du Théorème 2.6.3 trouver un éventuel polynôme  $p$  tel que  $p^* = s$ . Soit la série

$$s = e \oplus \gamma^4\delta^4 \oplus \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^7\delta^6 \oplus \gamma^8\delta^8 \oplus \gamma^9\delta^9 \oplus \gamma^{10}\delta^{10} \oplus \gamma^{12}\delta^{12} (\gamma\delta)^* .$$

Le premier monôme critique de  $s$  est  $p_1 = \gamma^4\delta^4$ . On a

$$s_1 = s \boxminus (\gamma^4\delta^4)^* = \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^7\delta^6 \oplus \gamma^9\delta^9 \oplus \gamma^{10}\delta^{10} \oplus \gamma^{13}\delta^{13} (e \oplus \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^2) (\gamma^4\delta^4)^* .$$

Le second monôme de  $p$  est le premier de  $s_1$ , d'où  $p_2 = \gamma^5\delta^5$ ,

$$s_2 = s_1 \boxminus (p_1 \oplus p_2)^* = \gamma^7\delta^6 .$$

On a donc  $p_3 = \gamma^7\delta^6$ . Réciproquement, soit  $p = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3$ . On vérifie que  $p^* = s$ .

**2.6.7 Contre exemple** Soit  $s = e \oplus \gamma^6\delta (\gamma\delta)^*$ . La pente ultime de  $s$  ( $\sigma_\infty(s) = 1$ ) n'est pas atteinte par un monôme, et l'on voit facilement que  $s$  n'est pas l'étoile d'un polynôme. On a cependant  $s = s^*$ .

## 2.7 Quelques raffinements possibles

Nous montrons comment le produit

$$(p \oplus qr^*)q'(m)^* \quad (2.7.a)$$

qui intervenait dans la preuve de VII,5.2.1 pour le calcul de  $ss'$  peut se calculer en introduisant une nouvelle congruence.

**2.7.1 Définition (Congruence modulo  $m^*$ )** Soit  $m$  un monôme. On appelle congruence modulo  $m^*$  la relation associée à

$$\varphi_m : \varphi_m(s) = sm^* .$$

On constate que le calcul de (2.7.a) peut s'effectuer dans le dioïde quotient de  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$  par  $\varphi_m$ .

**2.7.2 Test de redondance dans  $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta]/m^*$**  Soit  $\mu = \gamma^\nu\delta^\tau$ . On a

$$\gamma^n\delta^t \preceq \gamma^{n'}\delta^{t'}\mu^* \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{l} n + k\nu \geq n' \\ t + k\tau \leq t' \end{array} \right\} \Leftrightarrow n + \nu[\frac{t' - t}{\tau}] \geq n' .$$

**2.7.3 Exemple** Soit à calculer (2.7.a) avec  $s = p \oplus qr^* = \delta^5 \oplus \gamma\delta^8 \oplus \gamma^2\delta^{12}(e \oplus \gamma^3\delta^5)(\gamma^4\delta^6)^*$ ,  $q' = e$  et  $m = (\gamma\delta^2)$ . On a  $p \equiv \delta^5$  et  $q \equiv e$ , d'où

$$sm^* = (\delta^5 \oplus \gamma^2\delta^{12}(\gamma^4\delta^6)^*)m^* .$$

En outre,

$$\delta^5 \oplus \gamma^2\delta^{12}(\gamma^4\delta^6)^* = \delta^5 \oplus \gamma^2\delta^{12} \oplus \gamma^6\delta^{18} \oplus \gamma^{10}\delta^{24}(\gamma^4\delta^6)^* \equiv \delta^5 \oplus \gamma^2\delta^{12} \oplus \gamma^6\delta^{18}$$

car  $\gamma^{10}\delta^{24}(\gamma^4\delta^6)^*(\gamma\delta^2)^* = \gamma^{10}\delta^{24}(\gamma\delta^2)^* \preceq \delta^5(\gamma\delta^2)^{10}(\gamma\delta^2)^* \preceq \delta^5(\gamma\delta^2)^*$ . Finalement

$$sm^* = (\delta^5 \oplus \gamma^2\delta^{12} \oplus \gamma^6\delta^{18})(\gamma\delta^2)^* = \delta^5 \oplus \gamma^2\delta^{12} \oplus \gamma^6\delta^{18}(\gamma\delta^2)^* .$$

Si le temps et les quantités peuvent prendre des valeurs irrationnelles, la relation entre rationalité et périodicité tombe (considérer la somme  $(\gamma\delta)^* \oplus (\gamma^{\sqrt{2}}\delta^{\sqrt{2}})^*$ ). Cette difficulté n'est pas artificielle dans la mesure où on peut l'interpréter comme le cas limite d'une pathologie qui se produit avec des temps et quantités entiers. Lorsque les pentes des séries sont proches, la taille du transitoire devient importante et les représentations périodiques deviennent peu pratiques. Cette difficulté est illustrée par l'exemple suivant:

**2.7.4 Exemple** On a  $(\gamma^{20}\delta)^* \oplus \delta(\gamma^{21}\delta)^* = \delta \oplus \gamma^{21}\delta^2 \oplus \gamma^{42}\delta^3 \oplus \gamma^{63}\delta^4 \oplus \gamma^{84}\delta^5 \oplus \gamma^{105}\delta^6 \oplus \gamma^{126}\delta^7 \oplus \gamma^{147}\delta^8 \oplus \gamma^{168}\delta^9 \oplus \gamma^{189}\delta^{10} \oplus \gamma^{210}\delta^{11} \oplus \gamma^{231}\delta^{12} \oplus \gamma^{252}\delta^{13} \oplus \gamma^{273}\delta^{14} \oplus \gamma^{294}\delta^{15} \oplus \gamma^{315}\delta^{16} \oplus \gamma^{336}\delta^{17} \oplus \gamma^{357}\delta^{18} \oplus \gamma^{378}\delta^{19} \oplus \gamma^{399}\delta^{20} \oplus \gamma^{420}\delta^{21}(\gamma^{20}\delta)^*$ .

Une manière d'esquiver la difficulté décrite ci-dessus consisterait à abandonner les représentations de type périodique, et de représenter une série par une décomposition en éléments simples non redondante:

$$s = \bigoplus_{i=1}^k m_i r_i^*. \quad (2.7.b)$$

A la différence de la forme générale des rationnels donnée en §3.2,(3.2.a), le test  $m \preceq s$ , où  $m$  est un monôme n'exigera que la résolution d'inéquations linéaires diophantiennes à une inconnue, et l'on pourra concevoir pour les formes de type (2.7.b) des algorithmes de calcul rationnel assez simples. La somme d'étoiles non redondantes  $(\gamma^{20}\delta)^* \oplus \delta(\gamma^{21}\delta)^*$  sera alors considérée comme primitive, fournissant un codage plus économique que 2.7.4 Cependant, une difficulté analogue se poserait à nouveau pour ces représentations. On montre aisément que pour  $N$  grand,  $s = (\gamma\delta \oplus \gamma^N\delta^{2N})^*$  ne se représente comme une somme de type (2.7.b) ayant un petit nombre de termes.

### 3 Calcul de la cyclicité

On a vu au Chapitre VII les deux résultats de cyclicité suivants pour des matrices irréductibles.

$A \in (\mathcal{P}_{\text{finies}}(\mathbb{N}))^{n \times n}$	$A \in (\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[\gamma, \delta])^{n \times n}$
la période de $A_{ij}^*$ divise $\text{ppcm}_C \text{pgcd}_{c \in C} w(c)$	la période de $A_{ij}^*$ divise $\sqcup_C \sqcap_{c \in C} w(c)$ .

Dans le premier cas, on majore la période de  $A_{ij}^*$  par le ppcm sur les composantes fortement connexes  $C$  du multigraphe associé à  $A$  des pgcd des poids des circuits de la composante fortement connexe  $C$ . Dans le second cas, on donne une majoration analogue mais restreinte aux composantes fortement connexes et circuits du graphe critique et faisant intervenir les lois  $\sqcup$  et  $\sqcap$  (qui coïncident avec les ppcm et pgcd composante par composante pour les circuits critiques). On se ramène de la sorte aux deux problèmes suivants: 1/ déterminer le multigraphe critique et 2/ déterminer le pgcd des poids des circuits d'une composante fortement connexe d'un multigraphe (la détermination des composantes fortement connexes étant par ailleurs aisée et classique, cf. Tarjan [92]).

#### 3.1 Détermination du multigraphe critique

On considère un multigraphe dont chaque arc est valué par un monôme  $\gamma^n\delta^t$ .

**3.1.1 Réduction à un graphe** Quitte à rajouter des sommets comme sur la Figure B.4, on pourra se ramener à un graphe orienté (i.e. avec au plus un arc de  $j$  à  $i$  pour chaque couple de sommets  $(i, j)$ ). On pourra alors noter  $\gamma^{n_{ij}}\delta^{t_{ij}}$  le monôme valuant l'unique arc  $j \mapsto i$ .

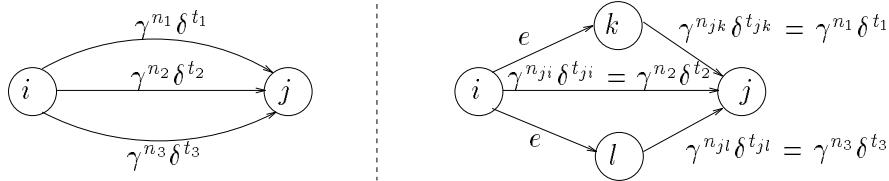


Figure B.4: Réduction d'un multigraphe à un graphe

On considère

$$\lambda = \min_c \sigma(w(c)) = \min_k \min_{i_1 \dots i_k} \frac{n_{i_1 i_2} + \dots + n_{i_k i_1}}{t_{i_1 i_2} + \dots + t_{i_k i_1}} \quad (3.1.a)$$

(pente minimale des circuits du graphe, égale à la pente minimale des circuits du multigraphe original). On rappelle que le circuit  $c = (i_1, \dots, i_k)$  est critique s'il réalise le min à droite de (3.1.a). On cherche l'ensemble des arcs et sommets appartenant à un circuit critique. Lorsque tous les  $t_i$  sont égaux à 1, l'algorithme de Karp (cf. [54] ainsi que VIII,2.2.2) permet de calculer  $\lambda$ . De manière plus générale, on pourra utiliser l'un des algorithmes pour les problèmes de ratio minimum donnés par Gondran et Minoux dans l'Annexe V de [48] ou énumérer les circuits d'après l'algorithme 3.2.9 du Chapitre IX. Formons (comme en IX,§6) la matrice  $C$  à coefficients dans  $\mathbb{R}_{\min}$  telle que:

$$C_{ij} = n_{ij} - \lambda t_{ij} .$$

Les circuits de la matrice  $C$  ont pour poids moyen  $e$ , donc  $C^+ = \bigoplus_{n \geq 1} C^n$  converge (et se calcule en  $O(n^3)$  via un algorithme de Gauss (cf. 0.4.2.1), où  $n$  est la taille de la matrice). L'observation suivante détermine immédiatement les arcs et sommets critiques:

**3.1.2 Proposition** *L'arc  $j \mapsto i$  appartient à un circuit critique ssi  $C_{ij} \otimes C_{ji}^+ = e$ .*

**Preuve** Il suffit de remarquer qu'un circuit est critique dans le graphe initial ssi il est de poids  $e$  pour la matrice  $C$ . ■

### 3.2 Calcul de la cyclicité d'un graphe valué par des naturels

On considère le problème suivant: étant donné un graphe fortement connexe dont les arcs sont valués par des naturels, trouver le pgcd des poids (additifs) des circuits du graphe. En adjoignant à  $\mathbb{N}$  un élément  $\varepsilon$  tel que par convention  $\gcd(\varepsilon, x) = x$  et  $\varepsilon + x = \varepsilon$ , et en formant la matrice  $A$  telle que  $A_{ij}$  soit égale à la valuation de l'arc de  $j$  à  $i$  s'il existe et à  $\varepsilon$  sinon, on se ramène à l'expression suivante:

$$c(A) = \text{pgcd}_c w(c) = \text{pgcd}_k \text{pgcd}_{i_1, \dots, i_k} (A_{i_1 i_2} + \dots + A_{i_k i_1}) . \quad (3.2.a)$$

La cyclicité des matrices dans la théorie de Perron-Frobenius correspond au cas particulier où les  $A_{ij}$  ne prennent que les valeurs 1 et  $\varepsilon$ . On doit à Atallah et Denardo [1, 27] un algorithme dans ce dernier cas. En apportant une modification minime à cet algorithme, on peut calculer (3.2.a).

Atallah et Denardo partent d'un arbre extrait du graphe et recouvrant tous les sommets (un tel arbre s'obtient sans difficulté à l'aide d'un algorithme de Tarjan [92]). On a donné un exemple d'un tel arbre (arcs en traits gras) sur la Figure B.5. Soit  $r$  la racine de l'arbre. On notera  $v(j)$  la valuation de l'unique chaîne de l'arbre allant de  $r$  à  $j$ . Soit  $\Gamma(j)$  l'ensemble des successeurs d'un sommet  $j$  (i.e.  $\Gamma(j) = \{k \mid A_{kj} \neq \varepsilon\}$ ). On a alors:

### 3.2.1 Proposition (Atallah et Denardo modifié) On a

$$c(A) = \gcd_j \gcd_{i \in \Gamma(j)} [v(j) - v(i) + A_{ij}] . \quad (3.2.b)$$

**Preuve** Soit  $c'$  le second membre de (3.2.b). Pour tout  $j$ , notons  $p_j$  la chaîne de l'arbre de  $r$  à  $j$ . Comme le graphe est fortement connexe, il existe également un chemin du graphe (mais en général pas de l'arbre) allant de  $j$  à  $r$ , soit  $q_j$ . On a les deux circuits  $q_i p_i$  et  $q_i(i,j)p_j$ , d'où:

$$\begin{array}{l|l} c & w(q_i p_i) = w(q_i) + w(p_i) = w(q_i) + v(i) \\ c & w(q_i(i,j)p_j) = w(q_i) + w((i,j)) + w(p_j) = w(q_i) + A_{ij} + v(j) \end{array}$$

soit en faisant la différence  $c \mid A_{ij} + v(j) - v(i)$  d'où  $c(A) \mid c'$ . Réciproquement, soit  $\alpha = (i_1, \dots, i_k)$  un circuit. On a

$$w(\alpha) = A_{i_1 i_2} + \dots + A_{i_k i_1} .$$

Comme

$$\begin{array}{l} c' \mid v(i_2) - v(i_1) + A_{i_1 i_2}, \\ \vdots \\ c' \mid v(i_1) - v(i_k) + A_{i_k i_1} \end{array}$$

on a en sommant  $c' \mid w(\alpha)$  donc  $c' \mid c(A)$ . ■

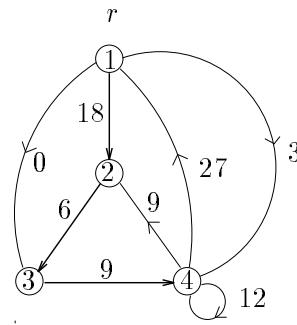


Figure B.5: Un graphe et un arbre sous-jacent (en gras)

### 3.2.2 Exemple

Pour le graphe de la Figure B.5, on obtient par application de (3.2.b):

$$\begin{aligned} c(A) &= \operatorname{pgcd}[\operatorname{pgcd}(0 - 18 + 18, 0 - 24 + 0, 0 - 33 + 3), \\ &\quad \operatorname{pgcd}(18 - 24 + 6), \operatorname{pgcd}(24 - 33 + 9), \\ &\quad \operatorname{pgcd}(33 - 9 + 18, 33 - 0 + 27, 33 - 33 + 12)] = 6 . \end{aligned}$$



# Bibliographie

- [1] M.J. Atallah. Finding the cycle index of an irreducible, nonnegative matrix. *SIAM J. Comput.*, 11:567–570, 1982.
- [2] J.P. Aubin. *L'Analyse non linéaire et ses motivations économiques*. Masson, 1984.
- [3] F. Baccelli, G. Cohen, G. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity*. Wiley, 1992.
- [4] R.C. Backhouse and B.A. Carré. Regular algebra applied to path finding problems. *J. of the Inst. of Maths and Appl.*, 15:161–186, 1975.
- [5] C. Benzaken. Structures algébrique des cheminement: pseudo-treillis, gerbiers de carré nul. In G. Biorci, editor, *Network and Switching Theory*, pages 40–47. Academic Press, 1968.
- [6] A. Berman and R.J. Plemmons. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. Academic Press, 1979.
- [7] J. Berstel and C. Reutenauer. *Les séries rationnelles et leurs langages*. Masson, Paris, 1984.
- [8] A. Bigard, K. Keimel, and S. Wolfenstein. *Groupes et anneaux réticulés*. Number 608 in Lecture notes in Mathematics. Springer.
- [9] G. Birkhoff. *Lattice Theory*, volume XXV of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. A.M.S, Providence, Rhode Island, 1940.
- [10] T.S. Blyth. Matrices over ordered algebraic structures. *J. of London Mathematical Society*, 39:427–432, 1964.
- [11] T.S. Blyth and M.F. Janowitz. *Residuation Theory*. Pergamon press, 1972.
- [12] N. Bourbaki. *Eléments de Mathématique (Algèbre)*. Hermann, Paris, 1970.
- [13] A. Brauer. On a problem of partitions. *Am. J. Math.*, 64:299–312, 1942.
- [14] R. R. Brualdi and H. J. Ryser. *Combinatorial Matrix Theory*. Cambridge University Press, 1991.
- [15] P. Caspi and N. Halbwachs. A functional model for describing and reasoning about time behaviour of computing systems. *Acta Informatica*, 22:595–627, 1986.
- [16] P. Chretienne. *Les Réseaux de Petri Temporisés*. Thèse Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris, 1983.

- [17] G. Cohen, D. Dubois, J.P. Quadrat, and M. Viot. Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes. Report 191, INRIA, Le Chesnay, France, 1983.
- [18] G. Cohen, D. Dubois, J.P. Quadrat, and M. Viot. A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-30:210–220, 1985.
- [19] G. Cohen, S. Gaubert, R. Nikoukhah, and J.P. Quadrat. Convex analysis and spectral analysis of timed event graphs. In *28th Conf. Decision and Control*, Tampa, FL, Dec 1989.
- [20] G. Cohen, P. Moller, J.P. Quadrat, and M. Viot. Linear system theory for discrete-event systems. In *23rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, 1984.
- [21] G. Cohen, P. Moller, J.P. Quadrat, and M. Viot. Une théorie linéaire des systèmes à événements discrets. Report 362, INRIA, Le Chesnay, France, 1985.
- [22] G. Cohen, P. Moller, J.P. Quadrat, and M. Viot. Dating and counting events in discrete event systems. In *25th IEEE Conf. on Decision and Control*, Athens, Greece, 1986.
- [23] G. Cohen, P. Moller, J.P. Quadrat, and M. Viot. Algebraic tools for the performance evaluation of discrete event systems. *IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems*, 77(1), January 1989.
- [24] R.A. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra*. Number 166 in Lectures notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, Berlin, 1979.
- [25] R.A. Cuninghame-Green. The characteristic maxpolynomial of a matrix. *J. of Math. Analysis and Appl.*, 95:110–116, 1983.
- [26] R.A. Cuninghame-Green. Algebraic realization of discrete dynamics systems. In *Proceedings of the 1991 IFAC Workshop on Discrete Event System Theory and applications in manufacturing and social phenomena*, Shenyang, China, June 1991.
- [27] E.V. Denardo. Period of connected networks. *Math. Oper. Res.*, 2:20–24, 1977.
- [28] M. di Mascolo. *Modélisation et évaluation de performance de systèmes de production gérés en Kanban*. Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, 1990.
- [29] P. Dubreil and M.L. Dubreil-Jacotin. *Leçons d'Algèbre Moderne*, 2nd ed. Dunod, Paris, 1964.
- [30] M.L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, and R. Croisot. *Leçons sur la Théorie des Treillis, des Structures Algébriques Ordonnées, et des Treillis géométriques*, volume XXI of *Cahiers Scientifiques*. Gauthier Villar, Paris, 1953.
- [31] P.I. Dudnikov and S.N. Samborskii. Endomorphisms of semimodules over semirings with an idempotent operation. Report 87-48, Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrainian SSR, 1987. preprint (Russian) MR 89f:16057.
- [32] S. Eilenberg and M.P. Schützenberger. Rational sets in commutative monoids. *J. Algebra*, 13:173–191, 1969.
- [33] L. Elsner, C.R. Johnson, and J. Dias da Silva. The Perron root of a weighted geometric mean of nonnegative matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 24:1–13, 1988.

- [34] C.J. Everett. Closure operators and galois theory in lattices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 55:514–525, 1944.
- [35] P. Faurre, M. Clerget, and F. Germain. *Opérateurs Rationnels Positifs: applications à l'instabilité et aux processus aléatoires*. Dunod, Paris, 1979.
- [36] M. Fliess. Matrices de hankel. *J. Math. Pures Appl.*, 15:161–186, 1975.
- [37] M. Fliess. Séries rationnelles positives et processus stochastiques. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, XI(1):1–21, 1975.
- [38] M. Fliess. Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives. *Bull. Soc. Math. France*, 109:3–40, 1981.
- [39] S. Friedland. Limit eigenvalues of nonnegatives matrices. *Linear Alg. and Appl.*, 74:173–178, 1986.
- [40] G. Frobenius. Über matrizen aus nicht negativen elementen. *S.-B. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.*, pages 456–477, 1912.
- [41] S. Gaubert. An algebraic method for optimizing resources in timed event graphs. In A.Bensoussan and J.L. Lions, editors, *Proceedings of the 9th International Conference on Analysis and Optimization of Systems*, Antibes, June 1990, number 144 in Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 1990.
- [42] S. Gaubert and C. Klimann. Rational computation in dioid algebra and its application to performance evaluation of discrete event systems. In G. Jacob and F. Lamnabhi-Lagarrigue, editors, *Algebraic computing in control*, number 165 in Lecture Notes in Control and Inf. Sci. Springer, 1991.
- [43] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D Lawson, M. Mislove, and D.S. Scott. *A Compendium of Continuous Lattices*. Springer, 1980.
- [44] M. Gondran. Algèbre linéaire et cheminement dans un graphe. *R.A.I.R.O.*, V1:77–99, 1975. (Note EDF 1973).
- [45] M. Gondran and M. Minoux. Valeurs propres et vecteurs propres en théorie des graphes. In *Problèmes combinatoires et théorie des graphes*, number 260 in Colloques internationaux CNRS, Orsay, 1976.
- [46] M. Gondran and M. Minoux. Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes. *EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie C, Mathématiques Informatique*, 2:25–41, 1977.
- [47] M. Gondran and M. Minoux. L'indépendance linéaire dans les dioïdes. *E.D.F., Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C, Mathématiques, Informatique*, 1:67–90, 1978.
- [48] M. Gondran and M. Minoux. *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, Paris, 1979.
- [49] M. Gondran and M. Minoux. Linear algebra in dioids: a survey of recent results. *Annals of Discrete Mathematics*, 19:147–164, 1984.
- [50] D.A. Gregory and N.J. Pullman. Semiring rank: boolean rank and nonnegative rank factorizations. *J. Combin. Inform. System Sci.*, 8:223–233, 1983.

- [51] H.P. Hillion. *Modélisation et Analyse des Systèmes de Production Discrets par les Réseaux de Petri*. Thèse de doctorat de l'université pierre et marie curie (paris vi), Université Pierre et Marie Curie, Janvier 1989.
- [52] H.P. Hillion and J.M. Proth. Performance evaluation of job-shop systems using timed event-graphs. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 34(1):3–9, Jan 1989.
- [53] G. Jacob. Réalisation des systèmes réguliers (ou bilinéaires) et séries formelles non commutatives. In I.D. Landau, editor, *Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse des Données, et le Traitement du Signal*, pages 325–358, Paris, 1981. CNRS.
- [54] R.M. Karp. A characterization of the minimum mean-cycle in a digraph. *Discrete Maths.*, 23:309–311, 1978.
- [55] K.H. Kim. *Boolean Matrix Theory and Applications*. Marcel Dekker, New York, 1982.
- [56] D. König. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Chelsea, 1950.
- [57] H. Krawczyk and A. Paz. The diophantine problem of frobenius: a close bound. *Discrete Applied Mathematics*, 23:289–291, 1989.
- [58] J. Kuntzmann. *Théorie des réseaux. Graphes*. Dunod, Paris, 1972.
- [59] S. Laftit, J.M. Proth, and X.L. Xie. Optimization of invariant criteria for event graphs. 1992. preprint.
- [60] G. Lallement. *Semigroups and Combinatorial Applications*. Wiley, 1979.
- [61] E.L. Lawler. *Combinatorial Optimization, Networks and Matroids*. Holt, Rinehart and Winston, 1976.
- [62] M. Lothaire. *Combinatorics on Words*. Encyclopedia of Mathematics and its applications. Addison-Wesley, 1983.
- [63] R.D. Luce. A note on boolean matrix theory. *Proc Amer. Math. Soc.*, 3:382–388, 1952.
- [64] R. Lyndon and D. Schupp. *Combinatorial Group Theory*. Ergebnisse der mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer Verlag, New York.
- [65] W. Magnus, A. Karass, and D. Solitar. *Combinatorial Group Theory*. Dover, 1976.
- [66] M. Marcus and H. Minc. *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*. Allyn and Bacon, Boston, 1964.
- [67] V.P. Maslov. *Méthodes Operatorielles*. Mir, Moscou, 1973. trad. fr. 1987.
- [68] H. Minc. *Permanents*. Addison Wesley, 1978.
- [69] H. Minc. *Nonnegative matrices*. Wiley, 1988.
- [70] P. Moller. Théorème de cayley-hamilton dans les dioides et application à l'étude des systèmes à événements discrets. In *7th INRIA International Conference on Analysis and Optimization of Systems*, Antibes, France, 1986. Springer Verlag.
- [71] P. Moller. Notions de rang dans les dioides vectoriels. In *CNRS/CNET/INRIA Seminar: Algèbres Exotiques et Systèmes à Evénements Discrets*, Issy-les-Moulineaux, France, 1987.

- [72] P. Moller. *Théorie Algébrique des Systèmes à Evénements Discrets*. PhD thesis, Ecole des Mines, Paris, 1988.
- [73] G.J. Olsder. Some results on the minimal realization of discrete event systems. In *25th IEEE Conf. on Decision and Control*, Athens, Greece, 1986.
- [74] G.J. Olsder. On the characteristic equation and minimal realizations for discrete event dynamic systems. In A. Bensoussan and J.L. Lions, editors, *Analysis and Optimizaton of Systems*, number 83 in Lecture notes in Control and Information Sciences, pages 189–201. Springer, 1986.
- [75] G.J. Olsder and R.E. de Vries. On an analogy of minimal realizations in conventional and discrete-event dynamic systems. In *Algèbres Exotiques et Systèmes à Evénements Discrets: Séminaire CNRS/CNET/INRIA*, Issy les Moulineaux, France, Juin 1987.
- [76] G.J. Olsder, J.A.C. Resing, R.E. de Vries, M.S. Keane, and G. Hooghiemstra. Discrete event systems with stochastic processing times. In *27th IEEE Conf. on Decision and Control*, Austin, Texas, 1988.
- [77] G.J. Olsder and C. Roos. Cramer and cayley-hamilton in the max-algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 101:87–108, 1988.
- [78] O. Ore. Galois connexions. *Trans. Amer. Math Soc.*, 55:493–513, 1944.
- [79] Max Plus. L’algèbre ( $\max, +$ ) et sa symétrisation ou l’algèbre des équilibres. *Comptes Rendus à l’Académie des Sciences, Section Automatique*, 1990.
- [80] Max Plus. Linear systems in ( $\max, +$ )-algebra. In *Proceeding of the 29th Conference on Decision and Control*, Honolulu, December 1990.
- [81] Max Plus. A linear system theory for systems subject to synchronization and saturation constraints. In *Proceedings of the first European Control Conference*, Grenoble, July 1991.
- [82] Max Plus. Second order theory of min-linear systems and its application to discrete event systems. In *Proceedings of the 30th CDC*, Brighton, December 1991.
- [83] J.M. Proth and X.L. Xie. Les critères invariants dans un graphe d’événements déterministes. *CRAS, Série I*, 313:797–800, 1991.
- [84] C. Reutenauer. Ensembles libres de chemins dans un graphe. *Bull. Soc. Math. Fr.*, 114(2):135–152, 1986.
- [85] C. Reutenauer. *Aspects mathématiques des réseaux de Petri*. Masson, Paris, 1989.
- [86] C. Reutenauer and H. Straubing. Inversion of matrices over a commutative semiring. *J. Algebra*, 88(2):350–360, June 1984.
- [87] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, New Jersey, 1970.
- [88] R.E. Rutherford. Inverses of boolean matrices. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 6:49–53, 1963.
- [89] S.N. Samborskii and A.A. Tarashchan. On semirings arising in multicriterion optimization problems and problems of analysis of computational media. *Soviet Math. Dokl*, 40(2), 1990.
- [90] I. Stewart. *Galois Theory*. Chapman and Hall, 1973.

- [91] H. Straubing. A combinatorial proof of the cayley-hamilton theorem. *Discrete Mathematics*, 43:273–279, 1983.
- [92] R.E. Tarjan. Depth first search and linear graph algorithms. *SIAM J. Comput*, 1:146–160, 1972.
- [93] A.D. Ventsel'. On the asymptotics of eigenvalues of matrices with elements of order  $\exp(-v_{i,j}/(2\epsilon^2))$ . *Soviet Math. Dokl.*, 13(1), 1972.
- [94] Y. Vitek. Bounds for a linear diophantine problem of Frobenius. *J. London Math. Soc.*, 2(10):79–85, 1975.
- [95] Y. Vitek. Bounds for a linear diophantine problem of Frobenius ii. *Canad. J. Math.*, 28(6):1280–1288, 1976.
- [96] Y. Vitek. *Exponents of primitive matrices and a Diophantine problem of Frobenius*. Ph.d. thesis, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 1977.
- [97] E. Wagneur. Moduloids and pseudomodules. 1. dimension theory. In J.L. Lions and A. Ben-soussan, editors, *Analysis and Optimization of Systems*, Lecture notes in Control and Information Sciences, 1988.
- [98] E. Wagneur. Moduloids and pseudomodules. 3. the lattice structure problem. Report, GERAD,HEC, Montréal, Septembre 1989. Cahiers du GERAD.
- [99] E. Wagneur. Moduloids and pseudomodules. 1. dimension theory. *Discrete Math.*, 98:57–73, 1991.
- [100] J.M.M. Wedderburn. Boolean linear associative algebra. *Ann. Math.*, 35(1):185–194, 1934.
- [101] Xu Xinhe, Yu Haibin, Lui Changyou, and Wang Liming. Taking sum and product of discrete event star sequences. In *Proceedings of the 1991 IFA C Workshop on Discrete Event System Theory and Applications in Manufacturing and Social Phenomena*, pages 16–21, Shenyang, Chnia, June 1991. International Academic Publishers.
- [102] M. Yoeli. A note on a generalization of boolean matrix theory. *Amer. Math. Monthly*, 68:552–557, 1961.
- [103] U. Zimmermann. *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures*. North Holland, 1981.

# Index

- $\Gamma$ , 126
- $\mathcal{M}_{\text{ax}}^{\text{in}}[[\gamma, \delta]]$ , 183
- $\Psi$ , 65
- $|\nabla|$ , 108
- $\mathcal{A}(p)$ , 202
- $\mathcal{D}[[A]]$ , 23
- $\mathcal{D}\langle\langle A\rangle\rangle$ , 23
- $\mathcal{S}^\nabla$ , 64
- $\text{compl}$ , 277
- $\text{DP}$ , 266
- $\deg$ , 277
- $|$ , 195
- $\xrightarrow{*}$ , 126
- $[u, v]$ , 70
- $\downarrow(x)$ , 25
- $\text{Min}$ , 127
- $\mu$ , 79
- $\nabla$ -libre (famille), 93
- $\odot$ , 140
- $\varpi_\infty$ , 195, 283
- $\preceq$ , 24
- $\sqcap$ , 192
- $\sigma$ , 198
- $s$ , 72
- $\sigma_\infty$ , 195
- $\mathbb{S}_{\max}$ , 62
- $\mathbb{S}_{\max}^\bullet$ , 63
- $\mathbb{S}_{\max}^\vee$ , 63
- $\mathbb{S}_{\max}^c$ , 74
- $\sqcup$ , 190
- $\tilde{A}$ , 130
- $\text{val}$ , 277
- $w_A(p)$ , 200
- archimédien (faiblement), 48
- base faible, 30
- bonne congruence, 267
- causale (série), 278
- causalité, 152
- classes, 126
- clos (ensemble), 126
- conducteur, 197
- continu (système linéaire), 147
- convolution, 152
- critique (graphe), 131
- Cyclicité, 204
- d-premier, 266
- demi-anneau symétrisé, 67
- demi-module, 28
- descendant (ensemble), 25
- dimension faible, 43, 76
- divisibilité, 195
- dominance diagonale, 108
- ensemble accessible de circuits, 202
- filtre, 25
- Frobenius (problème diophantien), 197
- génératrice (partie), 267
- Gauss-Seidel (algorithme), 112
- graphe (d'une matrice), 125
- idéal, 25
- idéaux, 44
- impulsion, 150
- intègre, 68
- irréductible (matrice), 127
- Jacobi (algorithme), 108
- libre (famille), 93
- limitateur de débit, 149
- moduloïde, 28
- monomiale (matrice), 45
- orthogonal, 86
- période ultime, 195
- périodicité, 164

périodique, 194  
périodique (dateur), 194  
pente, 197  
pente minimale, 198  
pente ultime, 195  
positif (demi-anneau), 45  
presque nulle, 93  
principal (ensemble clos), 127  
principal (idéal), 25  
  
réalisabilité, 164  
réponse impulsionnelle, 151  
rang, 94  
rationalité, 163  
redondance, 268  
retard (opérateur), 149  
  
signés (éléments), 63  
signaux, 146  
solution dégénérée, 73  
sous-valeur propre, 129  
stationnaire (système), 151  
stock (opérateur), 148  
substituable (élément), 81  
sur-valeur propre, 129  
symétrisation régulière, 64  
système linéaire, 146  
  
taux de production, 181  
transitif (élément), 79  
  
Yoeli (théorème), 111